

Werk

Jahr: 1932

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:8

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0008

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0008

LOG Id: LOG_0008

LOG Titel: Schwere und Geoid bei Isostasie

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Schwere und Geoid bei Isostasie

Von **Karl Jung**, Potsdam — (Mit 4 Abbildungen)

Auch bei isostatischem Aufbau der Erdkruste sind die auf übliche Weise berechneten isostatischen Anomalien von Null etwas verschieden, weil bei der Niveaureduktion die Geoidundulation vernachlässigt wird und die der Massenreduktion zugrunde gelegte Beziehung zwischen Oberflächenrelief und Dichte (Pratt) bzw. Oberflächenrelief und Erdkrustendicke (Airy) wegen der Konvergenz der Erdradien und der nicht konstanten Schwere in der Erdkruste nicht ganz streng ist. Es werden Kugelfunktionsentwicklungen für die Geoidundulation, die Freiluftanomalie und die auf übliche Weise bestimmte isostatische Anomalie bei isostatischem Aufbau der Erdkruste berechnet, bis zur Kugelfunktion siebenter Ordnung zahlenmäßig ermittelt und in den Fig. 2, 3, 4 dargestellt.

Die Verteilung der Schwerkraft auf der Erde ist Grundlage zur Bestimmung des Geoids und zur Untersuchung des Massenaufbaues der Erdkruste.

Sollen bei Bestimmung der Geoidgestalt keine großen und schwer zu berechnenden Korrekturen notwendig sein, so muß nach Reduktion der Schwerewerte die ganze Masse der Erde sich innerhalb des Geoids befinden, und es muß die von der Reduktion hervorgerufene Verschiebung der Niveauläche bestimmt und in Rechnung gesetzt werden können. Beides ist der Fall bei Verwendung isostatisch reduzierter Schwerewerte*). Die Verschiebung der Niveauläche ist in erster Annäherung der Ausgleichstiefe proportional. Es ist also zur Bestimmung der Geoidgestalt eine Reduktion mit möglichst geringer Ausgleichstiefe zu empfehlen; am besten ist deshalb die Freiluftreduktion (= Kondensation ins Meeresniveau), die ja einer isostatischen Verteilung mit der Ausgleichstiefe Null entspricht. Jeffreys dürfte durch seine potentialtheoretische Begründung der Verwendung von Freiluftanomalien den Streit um die zweckmäßigste Reduktion zur Bestimmung der Geoidgestalt zugunsten der Freiluftreduktion entschieden haben**).

Bei Untersuchung des Massenaufbaues der Erdkruste wird durch die Reduktion die angenommene Massenverteilung in eine gleichmäßige verwandelt; und es wird diejenige Massenverteilung der Wirklichkeit am nächsten sein, deren Reduktion auf eine gleichmäßige Schwereverteilung führt.

Die isostatische Reduktion entspricht einer Massenverteilung, bei der die Erdkruste überall mit gleichem Druck auf den tieferen Niveaulächen lastet. Bei einer isostatisch aufgebauten Erdkruste sollen die isostatisch auf ein gemeinsames Niveau reduzierten Schwerewerte keine Anomalien mehr zeigen.

*) Karl Jung: Über die Bestimmung der Geoidundulationen aus Schwere-messungen. Zeitschr. f. Geophys. 7, 81—91, (1931). Die Bestimmung der Geoidundulationen aus Schwere-messungen. Gerlands Beitr. z. Geophys. 29, 29—58 (1931).

***) Harold Jeffreys: An application of the free-air reduction of gravity. Ebenda 31, 378—386 (1931).

Ganz genau ist dies jedoch nicht der Fall. Denn der Normalwert bezieht sich auf das Sphäroid, die einzelnen reduzierten Schwerewerte aber entsprechen dem Geoid, und es ist deshalb schon eine den Geoidundulationen entsprechende Anomalie zu erwarten. Aber auch die Reduktion der Massen läßt eine Anomalie bestehen. Denn die übliche, dem Reduktionsverfahren zugrunde gelegte Beziehung zwischen Oberflächenrelief und Dichte (bei Isostasie nach Pratt) oder Oberflächenrelief und Erdkrustendicke (bei Isostasie nach Airy) entspricht nicht genau dem oben definierten isostatischen Zustand, weil die Erdradien einander parallel und die Schwere im Innern der Erdkruste konstant angenommen werden, während in Wirklichkeit die Erdradien nach innen konvergieren und die Schwere in der Erdkruste nicht überall dieselbe ist.

Für streng isostatischen Aufbau der Erdkruste sollen im folgenden die isostatischen Anomalien, die Freiluftanomalien und die Geoidundulationen berechnet werden. Das Ergebnis ist in den Fig. 2, 3, 4 (S. 50/51) dargestellt.

I. Die strenge Bedingung für Isostasie

Es sei (Fig. 1):

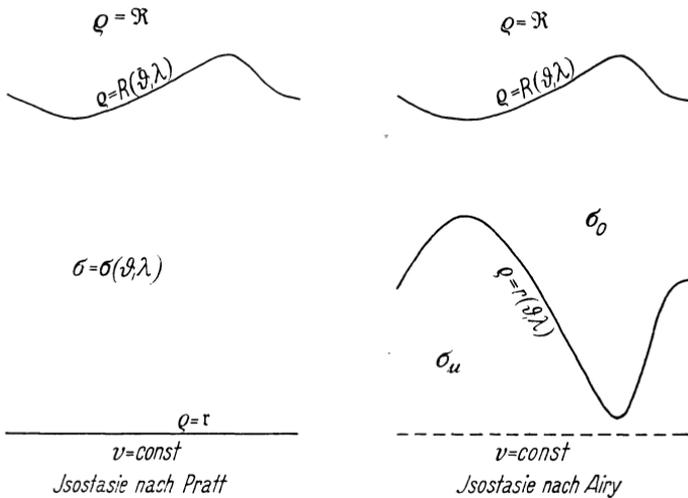


Fig. 1

- die Breite;
- λ die Länge;
- q die Entfernung vom Erdmittelpunkt;
- $q = R(\vartheta, \lambda)$ die Erdoberfläche, wobei das Wasser der Ozeane zu Kontinentaldichte kondensiert zu denken ist;
- $q = r$ die Ausgleichsfläche bei Isostasie nach Pratt, bei Isostasie nach Airy eine Niveauläche unter der Erdkruste;

$\varrho = r(\vartheta, \lambda)$ die untere Begrenzung der Erdkruste (physikalische Ausgleichsfläche) bei Isostasie nach Airy;

Oberhalb der Erdoberfläche, im massenfreien Raum, sei $\varrho = \mathfrak{R}$.

Ferner sei:

κ die Gravitationskonstante;

$\sigma = \sigma(\vartheta, \lambda)$ die Dichte in der Erdkruste bei Isostasie nach Pratt;

σ_o bei Isostasie nach Airy die konstante Dichte der Erdkruste;

σ_u bei Isostasie nach Airy die konstante Dichte des subkrustalen Materials ($> \sigma_o$);

V das Potential oberhalb der Ausgleichsfläche;

v bei Isostasie nach Pratt das Potential auf der Ausgleichsfläche;

bei Isostasie nach Airy das Potential auf einer Niveauläche, die ganz unterhalb der Erdkruste liegt;

$\delta V, \delta g$ Anomalien von V und g ;

u die Geoidundulation;

$\varrho', \vartheta', \lambda', \sigma'$ beziehen sich auf Massenpunkte;

$\varrho, \vartheta, \lambda, \sigma$ beziehen sich auf den Aufpunkt.

Folgende zulässige Vereinfachungen werden angenommen:

1. Die Fläche $\varrho = r$ sei eine Kugel, also $r = \text{const.}$ Man vernachlässigt die Abplattung der Erde.
2. Die Formeln für Potential und Schwere außerhalb der Kugel, die die Erde einschließt, sollen bis an die Erdoberfläche gelten.
3. Der Schwerevektor bestehe nur aus seiner zum Erdmittelpunkt gerichteten Hauptkomponente.

Ausführlich wird nur die Isostasie nach Pratt behandelt. Die entsprechenden Ergebnisse für Isostasie nach Airy werden auf ähnliche Weise hergeleitet und werden anhangsweise in den betreffenden Kapiteln angegeben.

Die strenge Bedingung für Isostasie ist $v = \text{const.}$ Es ist nach einer bekannten Formel der Potentialtheorie

$$v = \kappa \int_{\varrho'=r}^{R'} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\varrho'^{n-1}} P_n(\cos \gamma) \right) \sigma' \sin \vartheta' d\varrho' d\vartheta' d\lambda',$$

wobei $\gamma = \Delta(\vartheta, \lambda)(\vartheta', \lambda')$ und P_n die Legendresche Kugelfunktion n -ter Ordnung bedeuten.

Die Integration über ϱ' wird für $n = 2$ und $n \neq 2$ gesondert vorgenommen und ergibt für Isostasie nach Pratt:

$$v = \kappa \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n-2} \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) P_n(\cos \gamma) \right) \sigma' \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda' \\ + \kappa \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} r^2 (\ln R' - \ln r) P_2(\cos \gamma) \sigma' \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda',$$

wobei $\Sigma' = \Sigma$ ohne das Glied zweiter Ordnung. Man entwickelt die von ϑ' und λ' abhängigen Teile des Integranden nach Laplaceschen Kugelfunktionen:

$$\frac{\sigma'}{r^{n-2}} - \frac{\sigma'}{R^{n-2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma'}{r^{n-2}} - \frac{\sigma'}{R^{n-2}} \right]_i, \quad \sigma' \ln R' - \sigma' \ln r = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sigma' \ln R' - \sigma' \ln r \right]_i,$$

und benutzt die für alle Kugelfunktionen gültige Beziehung

$$\int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} X_i(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda' = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq n \\ \frac{4\pi}{2n+1} X_n(\vartheta, \lambda) & \text{„ } i = n. \end{cases}$$

So wird

$$v = 4\pi\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)(n-2)} \left[\frac{\sigma}{r^{n-2}} - \frac{\sigma}{R^{n-2}} \right]_n + 4\pi\kappa \frac{r^2}{5} [\sigma \ln R - \sigma \ln r]_2.$$

Wegen $v = \text{const}$ sind alle Glieder von erster und höherer Ordnung gleich Null, und es ist die strenge Bedingung für Isostasie nach Pratt:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\sigma}{r^{n-2}} - \frac{\sigma}{R^{n-2}} \right]_n &= 0 & \text{für } n > 0 \\ & \neq 2, & \\ [\sigma \ln R - \sigma \ln r]_n &= 0 & \text{„ } n = 2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Diese Gleichungen bestimmen σ als Funktion von R .

Bei Isostasie nach Airy findet man in ähnlicher Weise:

$$\left. \begin{aligned} \left[\sigma_u \frac{1}{r^{n-2}} - (\sigma_u - \sigma_o) \frac{1}{r^{n-2}} - \sigma_o \frac{1}{R^{n-2}} \right]_n &= 0 & \text{für } n > 0 \\ & \neq 2, & \\ [\sigma_o \ln R + (\sigma_u - \sigma_o) \ln r - \sigma_u \ln r]_n &= 0 & \text{„ } n = 2. \end{aligned} \right\} \dots \dots (1a)$$

Diese Gleichungen bestimmen r als Funktion von R .

II. Die strengen Ausdrücke für Potential, Geoid und Schwere

Die Geoidundulation ist

$$u \approx \frac{\delta V_{\mathfrak{R}=\text{const}}^*}{g},$$

wobei δV^* die Anomalie des Potentials im Außenraum ohne die der Abplattung entsprechenden Glieder mit P_{00} und P_{20} bedeutet.

Es ist für Isostasie nach Pratt:

$$\begin{aligned} \delta V &= \kappa \int_{\varrho'=r}^{R'} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho'^{n+2}}{\mathfrak{R}^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) \sigma' \sin \vartheta' d\varrho' d\vartheta' d\lambda' \\ &\quad - \kappa \sigma_m \int_{\varrho'=r}^{R_m} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho'^{n+2}}{\mathfrak{R}^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) \sin \vartheta' d\varrho' d\vartheta' d\lambda', \end{aligned}$$

wobei σ_m und R_m Mittelwerte von σ und R sind.

Man berechnet V ähnlich wie v , braucht aber das Glied zweiter Ordnung nicht besonders zu behandeln. Man erhält

$$\delta V^{(*)} = 4\pi\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+3)} \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n, \quad (2)$$

wobei der Index * bei Σ dieselbe Bedeutung hat wie bei δV .

Durch Differenzieren nach \mathfrak{R} findet man die Schwereanomalie:

$$\delta g^* = 4\pi\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(n+3)} \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n \quad (3)$$

Für Isostasie nach Airy ergibt sich in gleicher Weise:

$$\delta V^{(*)} = 4\pi\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+3)} \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} [\sigma_o R^{n+3} - \sigma_u R_m^{n+3} + (\sigma_u - \sigma_o) r^{n+3}]_n, \quad (2a)$$

$$\delta g^{(*)} = 4\pi\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(n+3)} \frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma_o R^{n+3} - \sigma_u R_m^{n+3} + (\sigma_u - \sigma_o) r^{n+3}]_n. \quad (3a)$$

Die Ausdrücke (2), (3), (2a), (3a) sind unter den Bedingungen (1) bzw. (1a) zu bestimmen. Eine Formel für die übliche isostatische Reduktion erhält man aus (3), (3a) mit der üblichen Beziehung zwischen Dichte bzw. Krustendicke und Oberflächenrelief.

III. Aufstellung von Näherungsformeln

Man setzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= R_m (1 + \mathfrak{S}), \\ R &= R_m (1 + H), \\ r &= R_m (1 - \tau), \\ r &= R_m (1 - t + h), \\ \sigma &= \sigma_m (1 + s), \end{aligned}$$

wobei R_m und σ_m Mittelwerte von R und σ bedeuten, τ und t konstant sind. Bei Isostasie nach Pratt bedeutet dann $T = R_m \cdot \tau$ die Ausgleichstiefe, und $R_m t$ ist die mittlere Erdkrustendicke bei Isostasie nach Airy.

Der Größenordnung nach ist $\mathfrak{S} < 1/600$, $H < 1/600$, $\tau \approx 1/50$, $t \approx 1/100$, $h < 1/60$, $s < 1/12$.

Um Näherungsformeln für die Beziehungen zwischen σ und R zu erhalten, werden die Ausdrücke

$$\frac{\sigma}{r^{n-2}} - \frac{\sigma}{R^{n-2}} \quad \text{und} \quad \sigma \ln R - \sigma \ln r$$

nach dem binomischen Satz und der Reihe für $\ln(1+x)$ entwickelt, wobei sich die konstanten Glieder ohne τ aufheben. Beachtet man, daß die Glieder

mit τ allein ebenfalls konstant sind, also keinen Beitrag zu den Kugelfunktionen von erster und höherer Ordnung geben, so findet man:

$$\left[\frac{\sigma}{r^{n-2}} - \frac{\sigma}{R^{n-2}} \right]_{n \neq 2} = \frac{\sigma_m}{R^{n-2}} (n-2) \left[H + \left(\tau + \frac{n-1}{2} \tau^2 + \frac{(n-1)n}{2 \cdot 3} \tau^3 \right) s + Hs - \frac{n-1}{2} H^2 - \frac{n-1}{2} H^2 s + \dots \right]_{n \neq 2}$$

$$[\sigma \ln R - \sigma \ln r]_2 = \sigma_m \left[H + \left(\tau + \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{3} \tau^3 \right) s + Hs - \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{2} H^2 s + \dots \right]_2,$$

und es ist somit die Bedingung für Isostasie nach Pratt:

$$[H]_n + \left(\tau + \frac{n-1}{2} \tau^2 + \frac{(n-1)n}{2 \cdot 3} \tau^3 \right) [s]_n + [Hs]_n - \frac{n-1}{2} [H^2]_n - \frac{n-1}{2} [H^2 s]_n = 0 \quad (4)$$

für alle $n > 0$

In ähnlicher Weise erhält man die Bedingung für Isostasie nach Airy:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_u - \sigma_o) \left(1 + (n-1)t + \frac{(n-1)n}{2} t^2 \right) [h]_n + \sigma_o [H]_n - \frac{n-1}{2} (\sigma_u - \sigma_o) \left(1 + \frac{n}{3} t \right) [h^2]_n \\ - \frac{n-1}{2} \sigma_o [H^2]_n = 0 \quad \text{für alle } n > 0 \end{aligned} \right\} (4a)$$

Die üblichen Bedingungen, die den isostatischen Reduktionen zugrunde liegen, lauten:

$$1 + s = \frac{\tau}{\tau + H} \quad \text{oder} \quad [H]_n + [Hs]_n + \tau [s]_n = 0 \dots (5)$$

für Isostasie nach Pratt, und

$$h = - \frac{\sigma_o}{\sigma_u - \sigma_o} H \quad \text{oder} \quad (\sigma_u - \sigma_o) [h]_n + \sigma_o [H]_n = 0 \dots (5a)$$

für Isostasie nach Airy. Sie können als Annäherungen an die Formeln (4) und (4a) angesehen werden, genügen aber strenggenommen nicht.

Zur Berechnung von V und u für Isostasie nach Pratt wird der Ausdruck

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} (\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}).$$

nach dem binomischen Satz entwickelt. Dies führt auf

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n = \sigma_m R_m^2 (1 - (n+1)\delta) (n+3) \left\{ [H]_n + \frac{n+2}{2} [H^2]_n + [Hs]_n + \frac{n+2}{2} [H^2 s]_n + \left(\tau - \frac{n+2}{2} \tau^2 + \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 3} \tau^3 \right) [s]_n + \dots \right\},$$

und mit der Beziehung (4),

$$[s]_n = - \frac{[H]_n + [Hs]_n}{\tau + \frac{n-1}{2} \tau^2 + \frac{(n-1)n}{2 \cdot 3} \tau^3} + \dots = - \frac{[H]_n + [Hs]_n}{\tau} \left(1 - \frac{n-1}{2} \tau - \frac{(n-1)n}{2 \cdot 3} \tau^3 \right) + \dots$$

auf

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n = \sigma_m R_m^2 \tau \frac{(2n+1)(n+3)}{2} (1 - \frac{2}{3}\tau) [H]_n. \quad (6)$$

Hierbei sind die Vernachlässigungen

$$\begin{aligned} \text{a) } [Hs]_n &< \frac{1}{600 \cdot 12} & \text{gegen } [H]_n &< \frac{1}{600}, \\ \text{b) } (n+1)\delta [H]_n &< \frac{n+1}{600 \cdot 600} & \text{gegen } [H]_n &< \frac{1}{600}, \end{aligned}$$

und es ist (6) wegen a) bis auf mehr als 0.083, wegen b) für $n \leq 16$ bis auf mehr als 0.028 genau.

Zur Berechnung der Schwereanomalie g hat man mit gleichen Vernachlässigungen

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n = \sigma_m R_m \tau \frac{(2n+1)(n+3)}{2} (1 - \frac{2}{3}\tau) [H]_n. \quad (7)$$

Für Isostasie nach Airy erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+1}} [\sigma_o R^{n+3} - \sigma_u R_u^{n+3} + (\sigma_u - \sigma_o) r^{n+3}]_n = \sigma_o R_m^2 t (1+t) (2n+1) (n+3) [H]_n, \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma_o R^{n+3} - \sigma_u R_u^{n+3} + (\sigma_u - \sigma_o) r^{n+3}]_n = \sigma_o R_m t (1+t) (2n+1) (n+3) [H]_n, \quad (7a)$$

nur sind die Vernachlässigungen erheblich größer.

Die Formeln (6), (7), (6a), (7a) führen zur Anomalie des Potentials, zur Geoidundulation und zum Schwerewert auf oder außerhalb der Erdkruste. Um einen Ausdruck für die auf übliche Weise reduzierte Schwere und Schwereanomalie zu erhalten, müssen entsprechende Formeln unter Anwendung der üblichen Bedingungen (5) bzw. (5a) hergeleitet werden.

Mit (5),

$$[s]_n = - \frac{[H]_n + [Hs]_n}{\tau},$$

erhält man

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma R^{n+3} - \sigma_m R_m^{n+3} + (\sigma_m - \sigma) r^{n+3}]_n \\ &= \sigma_m R_m \tau \frac{(n+3)(n+2)}{2} \left(1 - \frac{n+1}{3}\tau\right) [H]_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7')$$

für Isostasie nach Pratt, und entsprechend mit (5a):

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{R}^{n+2}} [\sigma_o R^{n+3} - \sigma_u R_u^{n+3} + (\sigma_u - \sigma_o) r^{n+3}]_n \\ &= \sigma_o R_m t (n+3)(n+2) \left(1 - \frac{n+1}{2}t\right) [H]_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7'a)$$

für Isostasie nach Airy.

Ein Vergleich der Formeln (6), (7), (7') mit (6a), (7a), (7'a) zeigt, daß die einander entsprechenden Ausdrücke für beide Arten der Isostasie in ihren Hauptgliedern fast übereinstimmen und zahlenmäßig dasselbe geben, wenn man für t den halben Betrag von τ , d. h. der mittleren Erdkrustendicke bei Isostasie nach Airy den halben Betrag der Ausgleichstiefe bei Isostasie nach Pratt zuschreibt, wie es wohl ungefähr üblich ist. Nur sind nach einer Abschätzung der Vernachlässigungen für den Fall der Isostasie nach Airy die Formeln (6a), (7a) und (7'a) wesentlich ungenauer als (6), (7) und (7'). Man kann im folgenden den Unterschied zwischen beiden Arten der Isostasie unberücksichtigt lassen, muß sich nur vergegenwärtigen, daß die Ergebnisse der geringeren Vernachlässigungen wegen eher für die Isostasie nach Pratt gelten als für die Isostasie nach Airy.

Man erhält also angenähert für beide Arten der Isostasie die Anomalie des Potentials aus Formel (2) und (6):

$$\delta V^* = 2 \pi \kappa \sigma_m T \left(1 - \frac{2}{3} \frac{T}{R_m} \right) \sum_{n=0}^{\infty} [R]_n \dots \dots \dots (8)$$

und hieraus die Geoidundulation:

$$u = \frac{2 \pi \kappa \sigma_m T}{g} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{T}{R_m} \right) \sum_{n=0}^{\infty} [R]_n^* \dots \dots \dots (9)$$

die also beide in erster Annäherung den Hebungen und Senkungen des Reliefs der Erdoberfläche proportional sind, und die Wirkung der Massenverteilung auf die Schwereintensität aus Formel (3) und (7):

$$\delta g^* = 2 \pi \kappa \sigma_m \frac{T}{R_m} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{T}{R_m} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [R]_n \dots \dots (10)$$

Hierbei bedeutet der Index *, daß beim Summieren die Glieder mit P_{00} und P_{20} auszulassen sind; T ist die Ausgleichstiefe nach Pratt, $[R]_n$ das n -te Glied der Kugelfunktionenentwicklung von R .

Die übliche isostatische Massenreduktion erhält man mit (3) und (7'):

$$\text{red}^* = - 2 \pi \kappa \sigma_m \frac{T}{R_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2n+1} \left(1 - \frac{n+1}{3} \frac{T}{R_m} \right) \left(l_n - \frac{1}{\sigma} m_n \right)^{**} (11)$$

Hierbei sind l_n und m_n die von Prey gegebenen Glieder n -ter Ordnung der Kugelfunktionenentwicklung von Lithosphäre und Hydrosphäre***). Es ist

$$\sum \left(l_n - \frac{1}{\sigma} m_n \right)$$

*) Unter Annahme der Isostasie nach Airy findet Jeffreys eine fast gleiche Formel für die Geoidundulation. H. Jeffreys: The Earth, S. 221, Formel (8).

**) Wie Prey gezeigt hat, erhält man diese Formel — ohne das kleine Glied mit T/R_m — auch dann, wenn man die Vereinfachungen 1. und 2., S. 42, nicht einführt, also auch unter Berücksichtigung der Abplattung. A. Prey: Neue Formeln zur Isostasie. Gerlands Beitr. z. Geophys. 18, 185—216 (1927).

***) A. Prey: Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Abhandl. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Neue Folge XI, S. 1 (1922).

nicht gleich R , obwohl beide Entwicklungen das Relief der Erdoberfläche nach Kondensation der Wassermassen auf Kontinentdicke geben. R ist gerechnet von der Kugel $\varrho = R_m$, dagegen $l_n - \frac{1}{\sigma} m_n$ vom Geoid aus, und es sind beide Entwicklungen um die Geoidundulation verschieden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [R]_n - u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(l_n - \frac{1}{\sigma} m_n \right)$$

In Zahlen ist:

$$\kappa = \frac{200}{3} \cdot 10^{-9} \text{ cgs-Einheiten,}$$

$$\sigma_m = 2.7,$$

$$T = 120 \text{ km,}$$

$$R_m = 6370 \text{ km,}$$

$$g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2},$$

und es genügt, in $l_n - \frac{1}{\sigma} m_n$ für σ den Näherungswert 3 einzuführen. Damit wird

$$u = 0.0137 \sum_{n=0}^{\infty} [R]_n = 0.0136 \sum_{n=0}^{\infty} \left(l_n - \frac{1}{3} m_n \right) \dots \dots (9')$$

$$\delta g^* = 0.00210 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [R]_n = 0.00213 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(l_n - \frac{1}{3} m_n \right) \quad (10')$$

Milligal, wenn l_n und m_n in Metern.

$$\text{red}^* \approx -0.00213 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2n+1} \left(l_n - \frac{1}{3} m_n \right) \dots \dots (11')$$

Milligal, wenn l_n und m_n in Metern.

IV. Geoid und Schwere bei Isostasie

Die Geoidundulation u ist durch (9') zahlenmäßig gegeben und ist den Hebungen und Senkungen der Erdoberfläche in erster Annäherung proportional.

Die Schwere auf oder über der Erdoberfläche ist

$$g^{(\mathfrak{R})} = \gamma_{\text{is}}^{(\mathfrak{R})} - \frac{2g \cdot (\mathfrak{R} - R_0)}{R_m} + \delta g^{*(\mathfrak{R})},$$

wobei R_0 das Sphäroid bezeichnet, das wegen der Vereinfachung 1., S. 42, als Kugel angenommen wird. $\gamma_{\text{is}}^{(\mathfrak{R})}$ ist der Normalwert der isostatisch reduzierten Schwere, wie er durch die Schwereformeln von Bowie und Heiskanen gegeben ist.

Die reine Schwereanomalie ist

$$g^{(\mathfrak{R})} - \gamma_{\text{is}}^{(\mathfrak{R})} = - \frac{2g(\mathfrak{R} - R_0)}{R_m} + \delta g^{*(\mathfrak{R})},$$

die auf übliche Weise auf das Geoid reduzierte Freiluftanomalie ist

$$\Delta g^{(u)} = -\frac{2gu}{R_m} + \delta g^{*(\mathfrak{R})} \dots \dots \dots (12)$$

die auf übliche Weise gefundene isostatische Anomalie ist

$$\Delta g_{is}^{(u)} = -\frac{2gu}{R_m} + \delta g^{*(\mathfrak{R})} + \text{red}^* \dots \dots \dots (13)$$

Mit (9'), (10'), (11') und den Zahlen für g und R_m erhält man also die Freiluftanomalie bei Isostasie:

$$\Delta g = + 0.00213 \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(l_n - \frac{1}{3} m_n \right) \dots \dots \dots (12')$$

Milligal, wenn l_n und m_n in Metern, und die isostatische Anomalie bei Isostasie:

$$\Delta g_{is} = - 0.00213 \sum_{n=0}^{\infty} \left[2 - (n+1) \left(1 - \frac{n+2}{2n+1} \right) \right] \left(l_n - \frac{1}{3} m_n \right) \dots \dots (13')$$

Milligal, wenn l_n und m_n in Metern.

Die Zahlenfaktoren

$$f = 0.00213 \cdot (n-1)$$

und

$$f_{is} = - 0.00213 \cdot \left[2 - (n+1) \left(1 - \frac{n+2}{2n+1} \right) \right]$$

sind für die ersten Glieder der Kugelfunktionenentwicklungen in nachstehender Tabelle gegeben.

n	f	f_{is}
1	0	- 0.00426
2	+ 0.00213	- 0.00298
3	+ 0.00426	- 0.00183
4	+ 0.00639	- 0.00071
5	+ 0.00852	+ 0.00039
6	+ 0.01065	+ 0.00148
7	+ 0.01278	+ 0.00255
8	+ 0.01491	+ 0.00363
9	+ 0.01704	+ 0.00470
10	+ 0.01917	+ 0.00578
16	+ 0.03195	+ 0.01220

Demnach sind bei den Freiluftanomalien über den Kontinenten im wesentlichen positive, über den Ozeanen negative Werte zu erwarten. Das Glied erster Ordnung gibt keinen Beitrag zu der Anomalie, und es wird daher der Unterschied zwischen der Land- und Wasserhalbkugel, d. h. der Unterschied zwischen den Kontinenten und dem Stillen Ozean, verhältnismäßig wenig ausgeprägt sein. Die höheren Glieder haben mit der Ordnungszahl wachsenden Einfluß.

Bei der isostatischen Anomalie geben die ersten Glieder negative Werte über Hebungen und positive Werte über Senkungen des Reliefs der Erdoberfläche, bei höheren Gliedern ist es umgekehrt. Das Glied erster Ordnung hat einen ziemlich großen Einfluß, der Unterschied zwischen Land- und Wasserhalbkugel wird stark ausgeprägt erscheinen. Auch hier wächst der Einfluß der höheren Glieder mit der Ordnungszahl und hat schließlich etwa den halben Betrag wie bei der Freiluftanomalie.

V. Die zahlenmäßigen Ergebnisse

Das Relief der Lithosphäre, die Freiluftanomalie [Formel (12')] und die isostatische Anomalie [Formel (13')] für den Fall vollkommener Isostasie wurden aus den von Prey gegebenen Koeffizienten der Kugelfunktionenentwicklungen

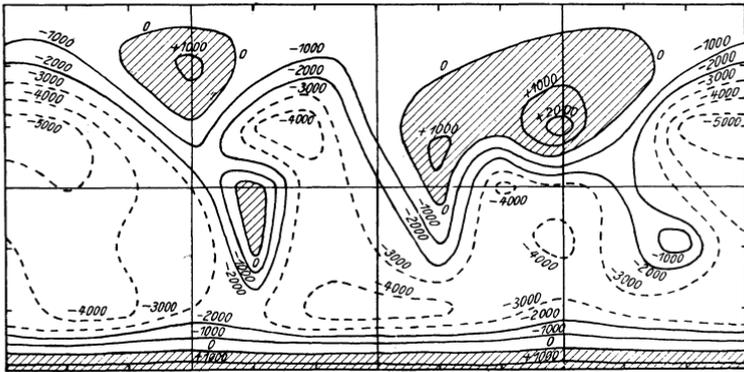


Fig. 2. Relief der Lithosphäre

In Metern. Entwicklung bis zur 7. Kugelfunktion. Gibt auch die Geoidundulationen, wenn die Glieder mit P_{00} und P_{20} abgezogen sind. 1000 m im Relief der Lithosphäre entsprechen für Kontinente 13.6 m der Geoidundulationen, für Ozeane 9.0 m

von Lithosphäre und Hydrosphäre bis zur siebenten Kugelfunktion berechnet und in den Fig. 2, 3, 4 dargestellt*). Wegen (9') gibt Fig. 2 zugleich die Geoidundulation, wenn man die Glieder mit den Kugelfunktionen P_{00} und P_{20} , d. h. das konstante Glied und den die Abplattung beeinflussenden Teil der Geoidundulation abgezogen denkt. Auf 1000 m im Relief der Lithosphäre kommen für Kontinente 13.6 m, für Ozeane $\frac{2}{3} \cdot 13.6 = 9.0$ m. Die Geoidundulation bei Isostasie wird also nur an wenigen Stellen der Erde ± 100 m erreichen oder überschreiten.

Die Darstellung der Freiluftanomalie bestätigt im wesentlichen die am Ende des vorigen Abschnittes ausgesprochenen Erwartungen. Die Freiluftanomalie

*) Eine Darstellung des Reliefs der Lithosphäre bis zur Kugelfunktion 16. Ordnung hat Prey gegeben (Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde, Tafel VIII, Karte II). Eine vom Verfasser berechnete Darstellung bis zur fünften Ordnung steht in dieser Zeitschr. 7, 87 (1931). Beide Darstellungen geben wie Fig. 2 ein entsprechendes Bild der Geoidundulation.

ist bei vollkommener Isostasie auf den Kontinenten im wesentlichen positiv, auf den großen Ozeanen negativ, dabei hebt sich der Stille Ozean weniger heraus als in Fig. 2. Zu bemerken ist die ausgeprägte Steilrandstörung, die sich als benachbarte positive und negative Extreme an Kontinenträndern kundgibt (Afrika—

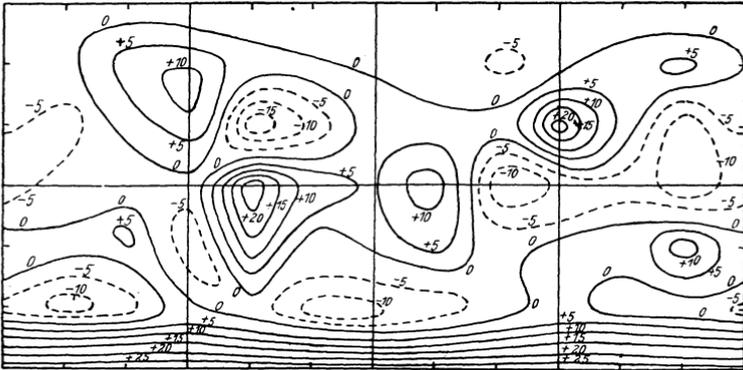


Fig. 3. Freiluftanomalie bei Isostasie
In Milligal. Entwicklung bis zur 7. Kugelfunktion

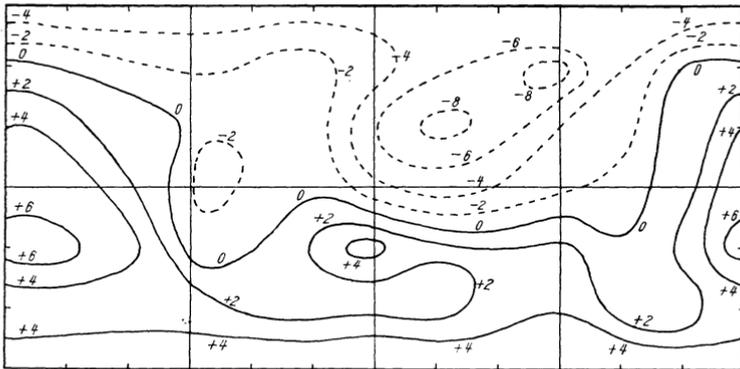


Fig. 4. Isostatische Anomalie bei Isostasie, auf übliche Weise berechnet
In Milligal. Entwicklung bis zur 7. Kugelfunktion

Indischer Ozean—Himalaya, Stiller Ozean—Australien, Nordamerika—Atlantischer Ozean—Südamerika—Stiller Ozean, Stiller Ozean—Antarktis, Atlantischer Ozean—Antarktis).

Auch die in üblicher Weise bestimmte isostatische Anomalie bei isostatisch aufgebauter Erdkruste bestätigt die im vorigen Abschnitt ausgesprochenen Erwartungen. Es überwiegt bei weitem das Glied erster Ordnung und hebt den Unterschied zwischen Land- und Wasserhalbkugel hervor. Wie zu erwarten, ist die Landhalbkugel, den ersten Gliedern entsprechend, mit negativen, die

Wasserhalbkugel mit positiven Werten bedeckt. In gleichem Sinne sind Südamerika, der Atlantische Ozean, Australien und der nördliche Stille Ozean durch Ausbuchtungen der Linien gleicher isostatischer Anomalie angedeutet. Dagegen verhindert der umgekehrte Einfluß der höheren Glieder das Auftreten eines besonderen Extremums über dem Himalaya; es ist anzunehmen, daß sich hier bei Hinzunahme noch höherer Glieder ein positives Extremum zeigen wird, wie es der Antarktische Kontinent andeutet.

Der Betrag dieser von der unvollständigen Niveaureduktion und der nicht ganz strengen Massenreduktion herkommenden restlichen Anomalien ist nicht groß, werden doch in Fig. 4 nirgend 10 Milligal erreicht. Wenn auch strenggenommen eine isostatische Anomalie Null nicht unbedingt auf vollkommene Isostasie schließen läßt, so wird man doch nach wie vor kleine isostatische Anomalien als Ausdruck ungefähr isostatischen Aufbaues der Erdkruste ansehen dürfen, auch wird man ohne Bedenken die bisherige Art der Reduktion beibehalten können. Eine Berücksichtigung nur eines der vernachlässigten Umstände, z. B. eine ergänzende Reduktion wegen der Geoidundulation allein, dürfte unzumutbar sein, da die restlichen Anomalien der Fig. 4 in dem größten Teil der Erde wesentlich kleiner sind, als sich eine die Geoidundulation berücksichtigende ergänzende Freiluftreduktion ergeben würde. Der Einfluß der Geoidundulationen und der Effekt der nur angenäherten Massenreduktion heben sich also von selbst zum guten Teil auf.

Auf den Ozeanen sind nach Fig. 4 die restlichen isostatischen Anomalien um einige Milligal größer als auf den Kontinenten. Dies genügt aber nicht, um die von Vening Meinesz gemessenen positiven isostatischen Anomalien (20 bis 30 Milligal im Mittel) zu erklären, auch hat Vening Meinesz nicht die negativen Freiluftanomalien der Fig. 3 gefunden. Es ist möglich, daß eine weitere Vermessung der Ozeane für andere Ozeangebiete anderes ergibt, vielleicht auch dazu zwingt, eine neue Formel für die Normalschwere aufzustellen. Vorläufig wird man noch annehmen müssen, daß die Ozeane wie die Kontinente dem isostatischen Zustand nahe sind, daß aber der Aufbau der Erdkruste nicht nur in Einzelheiten, sondern auch in den Großformen ein wenig davon abweicht. Zur Erweiterung der bisherigen Ergebnisse ist eine weitere gravimetrische Vermessung nicht nur der geologisch vielgestaltigen, sondern auch der sogenannten ungestörten Teile der Erde erwünscht.

Potsdam, Geodätisches Institut, November 1931.
