

Werk

Jahr: 1932

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:8

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0008

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0008

LOG Id: LOG_0050

LOG Titel: Das abrollende physikalische Pendel

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Das abrollende physikalische Pendel

Von **Hans Gebelein**, Göttingen — (Mit 7 Abbildungen)

Der Zusammenhang zwischen Amplitude und Schwingungszeit eines Pendels zeigt sich bei Präzisionsuhren, die auf Schneiden gelagert sind, abweichend vom Gesetz, das hierfür die Theorie des physikalischen Pendels liefert. Die Ursache ist der Einfluß der Gestalt der betreffenden Schneide auf die Schwingungszeit. Kenntnis der hier herrschenden Zusammenhänge ermöglicht, Schneiden von Uhrpendeln nach dem Uhrgang zu beurteilen, eine Reihe von Unzulänglichkeiten der Schneidenpendel zu erklären und neue Gesichtspunkte für die Konstruktion solcher Pendel zu gewinnen.

(Die folgenden Ausführungen sind im wesentlichen die Wiedergabe eines Vortrages, den der Verfasser am 6. Juli 1932 im Kolloquium über Fragen der angewandten Mechanik (bei Professor Prandtl) an der Universität Göttingen gehalten hat. Eine eingehende Darstellung der hier angeschnittenen Fragen wird in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1932 erscheinen.)

Die übliche Darstellung der Theorie des physikalischen Pendels, die in den Lehrbüchern der Mechanik gegeben wird, setzt voraus, daß die Schwingungen des Pendels in aller Strenge um einen festen Punkt, den Aufhängepunkt des Pendels erfolgen. Die Theorie gibt dann bekanntlich für beliebig große Schwingungen die Schwingungszeit wieder durch die Gleichung:

$$T(\varphi) = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot K(k) \quad \text{mit } k = \sin \varphi/2 \dots \dots \dots (1)$$

Dabei ist $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $k = \sin \varphi/2$; φ ist die Amplitude, g die Erdbeschleunigung und L die sogenannte reduzierte Pendellänge. Insbesondere ergibt sich aus (1) für unendlich kleine Schwingungen die Schwingungszeit

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \dots \dots \dots (1a)$$

und für nicht zu große Amplituden wird die Abhängigkeit der Schwingungszeit von der Amplitude durch ein quadratisches Gesetz wiedergegeben, denn für diese kann Gleichung (1) näherungsweise ersetzt werden durch

$$T(\varphi) = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi^2\right) \dots \dots \dots (1b)$$

Nun ist aber die dieser Theorie zugrunde liegende Voraussetzung des festen Drehpunktes eine jener Bedingungen, die sich in Wirklichkeit unter keinen Umständen in aller Strenge erfüllen lassen. Fassen wir ein Pendel ins Auge, das mit Hilfe einer Schneide aufgehängt ist, so wird auch die mit aller Sorgfalt scharf

geschliffene Schneide in Wirklichkeit noch einen endlichen, wenn auch sehr kleinen Krümmungsradius aufweisen und sie wird auf der Unterlage, die wir vorläufig als eben betrachten wollen, abrollen, wobei von keinem festliegenden Drehpunkt mehr die Rede sein kann.

Man wird nun vermuten, daß der Krümmungsradius, den die Schneide im Berührungspunkt der Ruhelage besitzt, für den Bewegungsvorgang entscheidende Bedeutung hat; man läßt die Voraussetzung des festen Drehpunktes fallen und rechnet statt dessen mit einer Schneide von konstantem Krümmungsradius, mit einer kreisförmigen Schneide. Diese Rechnung ist schon von Bessel durchgeführt worden. Als wichtigstes Ergebnis liefern die Gleichungen, die wir unten bringen, daß wie beim gewöhnlichen physikalischen Pendel auch hier die Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Amplitude für nicht zu große Schwingungen durch ein quadratisches Gesetz dargestellt wird.

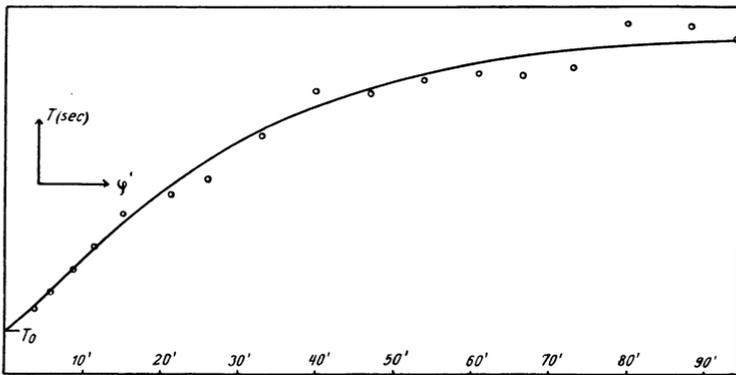


Fig. 1. Diagramm Schwingungszeit—Amplitude, aufgenommen an Prof. Schulers Versuchsuhr in Göttingen (November 1930)

Im Widerspruch hierzu stehen die Ergebnisse der Experimente. Wir bringen in Fig. 1 eine Meßreihe, die Herr Professor Schuler, Göttingen, mit seiner Versuchsuhr in der Göttinger Sternwarte, deren Pendel auf Schneiden gelagert ist, aufgenommen hat. Das Diagramm stellt die Beziehung dar zwischen der in bestimmter Zeiteinheit wiedergegebenen Schwingungszeit und der Amplitude für Ausschläge bis etwa $\pm 90'$ von der Gleichgewichtslage. Dabei wurde die Schwingungszeit jedesmal mit Hilfe des elliptischen Integrals in bekannter Weise auf kleine Schwingungen reduziert. Nach der gewöhnlichen Theorie des physikalischen Pendels müßte also das Ergebnis eine Konstante, nach der Theorie des Kreisrollpendels aber eine quadratische Funktion der Amplitude sein. Wie das Diagramm lehrt, kann hiervon keine Rede sein. Außerdem müßte man nach den Formeln des Kreisrollpendels aus Unstimmigkeiten des Uhranges in der hier vorliegenden Größenordnung auf einen Krümmungsradius von einigen Zentimetern schließen, was im krassen Widerspruch zur Wirklichkeit steht. So lehrt das Experiment,

daß die Theorie des Kreisrollpendels den Einfluß der Schneide auf die Schwingungszeit des Pendels im entscheidenden Punkte nicht erfaßt

Wir wenden uns nun der Berechnung der Schwingungszeit eines Pendels zu, dessen Schneide von beliebiger Gestalt auf einer ebenen Unterlage abrollt, ohne zu gleiten. Als einzige Voraussetzung über die Gestalt der Schneide machen wir die, daß sie, von unten gesehen, konvex sei. Hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn ein etwa vorhandener einspringender Teil der Schneide ist für den Abrollvorgang durch die Grenztangente zu überbrücken und damit ist bereits eine konvexe Gestalt der Schneide gewonnen. Wir wählen zweckmäßig für die Schneide die Darstellung

$$r = r(\alpha) \dots \dots \dots (2)$$

wobei r den Krümmungsradius der Schneide bedeutet und α den Neigungswinkel darstellt, nachdem zum Zwecke der Normierung dem Berührungspunkt in der Ruhelage der Neigungswinkel $\alpha = 0$ zugeteilt worden ist. Dadurch ist α gleichzeitig der Ausschlagwinkel des Pendels in dem Augenblick, in dem der zum Winkel α gehörige Punkt P der Schneide die Unterlage berührt.

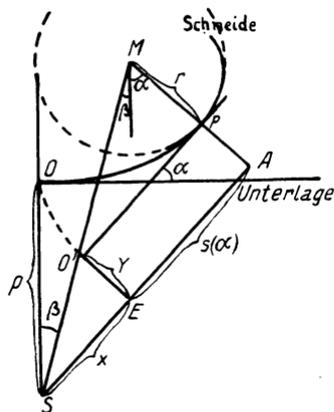


Fig. 2

Zum Abrollvorgang bei beliebiger geformter Schneide

Es sei nun (Fig. 2) P dieser Punkt der Schneide, zu dem der Winkel α und der Krümmungsradius r gehören. Auf der Normalen in P im Abstand r liegt dann der Krümmungsmittelpunkt M . Wir legen den Punkt A so auf PM , daß er mit dem Schwerpunkt S ein rechtwinkliges Dreieck MAS darstellt. Weiter sei O der Berührungspunkt in der Ruhelage und $OS = p$. Nun setzen wir zur Abkürzung die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks gleich $a(\alpha) = SM$ und führen außerdem den Winkel $\beta(\alpha)$ in die Rechnung ein, unter dem OM vom Schwerpunkt S aus erscheint. $a(\alpha)$ und $\beta(\alpha)$ sind gewisse Funktionen von α , deren Berechnung bei Kenntnis der Funktion $r(\alpha)$ grundsätzlich möglich ist. Nach Fig. 2 ist dann Winkel

$SMA = \alpha + \beta$ und Bogenlänge $OP = O'P = EA = s(\alpha)$. Aus Dreieck MAS sind nun in einfacher Weise die Schwerpunktskoordinaten x und y abzulesen, die vom Berührungspunkte O der Ruhelage aus in waagerechter und senkrechter Richtung gemessen werden. Es ist nämlich

$$SA = SE + EA = x + O'P = x + s(\alpha) = a \sin(\alpha + \beta)$$

und

$$AM = AP + PM = y + PM = y + r(\alpha) = a \cos(\alpha + \beta).$$

Nun ist entscheidend, daß beim Übergang zum Nachbarelement $P + \delta P$ sich nur α um $\delta\alpha$ und $s(\alpha)$ um δs ändern, während der Punkt M in seiner Eigen-

schaft als Krümmungsmittelpunkt liegen bleibt und daher $r(\alpha)$, $a(\alpha)$ und $\beta(\alpha)$ unverändert erhalten bleiben. Beachtet man noch, daß $ds/d\alpha = r$ ist, so folgt aus unseren Gleichungen durch Differentiation:

$$\frac{dx}{d\alpha} = a \cos(\alpha + \beta) - r(\alpha); \quad \frac{dy}{d\alpha} = -a \sin(\alpha + \beta) \dots \dots (3)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3) wird weiter die kinetische und die potentielle Energie gewonnen. Es ist, wenn wir das Trägheitsmoment des Pendelkörpers um den Schwerpunkt mit $m \varrho^2$ bezeichnen, die kinetische Energie:

$$V(\alpha) = \frac{m}{2} [a^2 + r^2 + \varrho^2 - 2ar \cos(\alpha + \beta)] \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

und die potentielle Energie:

$$U(\alpha) = -mgy = +mg \int_0^\alpha a \sin(\alpha + \beta) d\alpha.$$

Die weitere Rechnung verläuft nun ohne Schwierigkeiten. Auf dem Weg über die Differentialgleichung gelangt man zur Gleichung für die Schwingungsdauer, die folgende Gestalt hat, wenn wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, die Schneide und damit den Bewegungsvorgang als symmetrisch annehmen:

$$T(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{a^2 + r^2 + \varrho^2 - 2ar \cos(\alpha + \beta)}{\int_\alpha^\varphi a \sin(\alpha + \beta) d\alpha}} d\alpha \dots \dots (4)$$

In diesem Resultat erscheint die gesuchte Funktion $T(\varphi)$ abhängig von der vorgelegten Funktion $r(\alpha)$. Zu jeder Funktion $r(\alpha)$ gehört eine Funktion $T(\varphi)$, die durch Gleichung (4) in exakter und expliziter Weise gegeben wird.

Um uns mit dem Resultat (4) vertraut zu machen, betrachten wir erst einige Sonderfälle, deren Kenntnis uns später nützlich sein wird.

1. Gewöhnliches Pendel. Mit $r = 0$, und daher $a = p$ und $\beta = 0$ kommen wir zum gewöhnlichen Pendel zurück. Die Schwingungszeit wird dann:

$$T(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{p^2 + \varrho^2}{p(\cos \alpha - \cos \varphi)}} d\alpha = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} K(k) \quad \text{mit } k = \sin \varphi/2$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (1). Die reduzierte Pendellänge ist

$$L = \frac{p^2 + \varrho^2}{p}.$$

2. Das Kreisrollpendel. Mit $r = \text{const}$ wird $a = p + r$ und $\beta = 0$. Gleichung (4) liefert in diesem Falle:

$$T(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{(p+r)^2 + r^2 + \varrho^2 - 2(p+r)r \cos \alpha}{(p+r)(\cos \alpha - \cos \varphi)}} d\alpha$$

$$= 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{1 + 4 \frac{r}{L} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha - \cos \varphi}} d\alpha.$$

Dabei ist $L = (p^2 + \varrho^2)/(p + r)$ die reduzierte Pendellänge. Dem Ergebnis kann man die Gestalt geben:

$$T(\varphi) = T_0 \cdot K(r/L, \varphi) \dots \dots \dots (5)$$

Dabei ist

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

die Schwingungszeit für unendlich kleine Schwingungen und die Funktion $K(r/L, \varphi)$ ist eine dem Problem eigentümliche transzendente Funktion von φ und r/L , die speziell für $r = 0$ im wesentlichen mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung übereinstimmt. Sie nimmt für $\varphi = 0$ den Wert 1 an und man kann für sie folgende Reihenentwicklung angeben:

$$K(r/L, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \binom{-1/2}{m} \binom{-1/2}{n+m} (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{r}{L}\right)^n \sin^{2(n+m)} \varphi/2 \left\{ \right. (6)$$

$$\left. = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{L}\right) \sin^2 \varphi/2 + \left[\frac{9}{64} + \frac{3}{8} \frac{r}{L} - \frac{3}{4} \left(\frac{r}{L}\right)^2\right] \sin^4 \varphi/2 + \dots \right\}$$

die für $r/L < 1/4$ und beliebige Amplituden konvergiert. Aus dieser Darstellung der Schwingungszeit ist unsere Behauptung zu entnehmen, daß für nicht zu große Amplituden die Schwingungszeit in Abhängigkeit von φ durch ein quadratisches Gesetz dargestellt wird. Die Funktion $K(r/L, \varphi)$ nimmt bei den weiteren Untersuchungen eine grundlegende Stellung ein.

3. Das Pendel mit abgeschnittener Schneide. Die Schneide habe die Gestalt eines Keils, dessen Spitze abgeschnitten worden ist (Fig. 3). Wir nehmen an, p sei groß gegen b . Dann ist $r = 0$ und mit genügender Annäherung $a = p$ und $\beta = b/p = \text{const}$. Mit diesen Größen wird, wenn wir die Winkel φ und β als klein voraussetzen, jedoch so, daß φ/β beliebiger Werte fähig ist:

$$T(\varphi) = T^+ \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{1 + \varphi/\beta}\right) \quad \text{mit} \quad T^+ = 2\pi \sqrt{\frac{p^2 + \varrho^2}{pg}} \dots (7)$$

Den Verlauf der Funktion $T(\varphi)$ zeigt Fig. 4. Wir haben hier ein Beispiel für eine außerordentlich starke Abhängigkeit der Schwingungszeit von der Amplitude vor uns.

4. Kreisschneide mit endlichem Sprung der Krümmung. Die bisherigen Spezialfälle geben noch kein Bild vom funktionalen Zusammenhang

der Funktionen $r(\alpha)$ und $T(\varphi)$, der durch Gleichung (4) vermittelt wird. Um diesem Ziele näher zu kommen, betrachten wir als nächstes Beispiel folgenden wichtigsten Fall. Es sei (Fig. 5) $r = r_0$ für $\alpha < A$ und $r = r_1$ für $\alpha > A$.

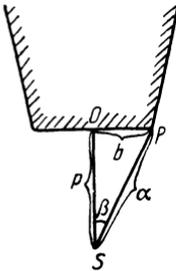


Fig. 3
Abgeschnittene Schneide

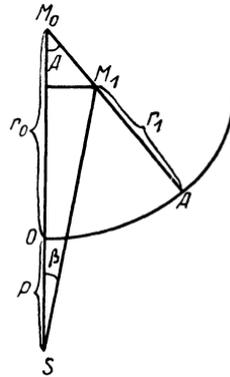


Fig. 5. Schneide, die aus zwei Kreisbogen zusammengesetzt ist

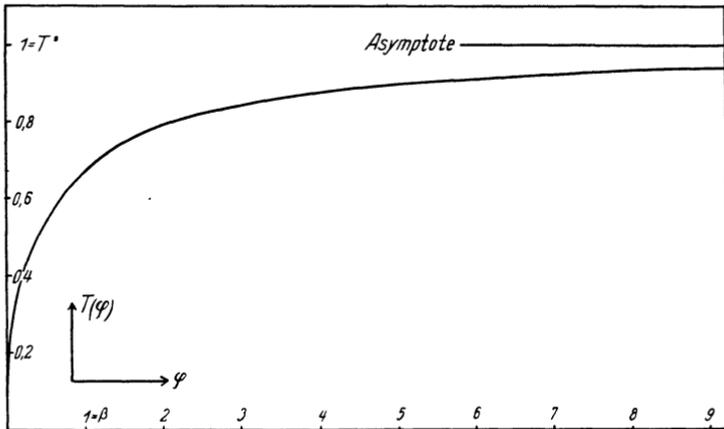


Fig. 4. Diagramm Schwingungszeit—Amplitude bei abgeschnittener Schneide

Wir führen den Parameter

$$\lambda = \frac{r_1 - r_0}{p + r_0}$$

ein und setzen von ihm voraus, daß er eine kleine Größe sei. Indem in λ nur die linearen Glieder berücksichtigt werden, bestätigt man leicht folgende Beziehungen:

$$r = \begin{cases} r_0 \\ r_0 + \lambda(p + r_0) \end{cases}; \quad \beta = \begin{cases} 0 \\ -\lambda \sin A \end{cases}; \quad a = \begin{cases} p + r_0 \\ (p + r_0)(1 + \lambda \cos A) \end{cases}; \quad \text{für } \begin{cases} \alpha < A \\ \alpha > A \end{cases} \quad (8)$$

Nun bedient man sich zweckmäßig einer einheitlichen Schreibweise, indem man die Einheitsfunktion $E^u(v)$ so definiert:

$$E^u(v) = 0 \quad \text{für} \quad v < u \quad \text{und} \quad E^u(v) = 1 \quad \text{für} \quad v > u \quad . \quad (9)$$

und mit ihrer Hilfe schreibt:

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 + \lambda (p + r_0) E^A(\alpha) \\ a &= (p + r_0) [1 + \lambda \cos A E^A(\alpha)] \\ \beta &= -\lambda \sin A E^A(\alpha) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8a)$$

Die Schwingungszeit $T(\varphi)$ nach (4) wird nun eine Funktion von λ . Diese wird nach Taylor entwickelt und diese Darstellung nach dem linearen Glied in λ abgebrochen. Das von λ freie Glied der Entwicklung ist die Lösung für das Kreis-

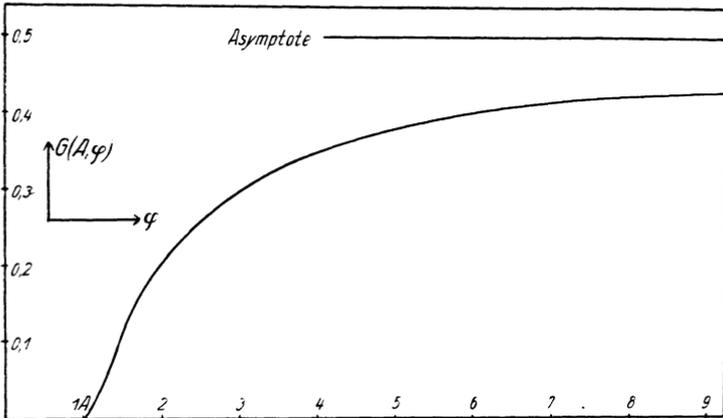


Fig. 6. Verlauf der Gewichtsfunktion $G(A, \varphi)$

rollpendel Beispiel (2) und heißt $T_0 \cdot K(r_0/L, \varphi)$. Für das in λ lineare Glied liefert die Rechnung, wenn wir wieder φ und A , nicht aber φ/A als klein voraussetzen: $\lambda T_0 G(A, \varphi)$. Die Funktion $G(A, \varphi)$ ist die andere grundlegende Funktion unserer Theorie. Sie lautet ausgeschrieben:

$$G(A, \varphi) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{A/\varphi} \sqrt{1-w^2} dw \right) \cdot E^A(\varphi) \dots \dots \dots (10)$$

Ihren Verlauf zeigt Fig. 6. Mit ihrer Hilfe erhalten wir, wenn wir auf die Bedeutung von λ zurückgreifen, für $T(\varphi)$ den Ausdruck:

$$T(\varphi) = T_0 \left\{ K(r_0/L, \varphi) - \frac{r_1 - r_0}{p + r_0} \cdot G(A, \varphi) \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Gleichung (11) sagt aus, daß ein kleiner Sprung der Krümmung der Schneide an der Stelle $\alpha = A$ sich an der Schwingungszeit mit dem Gewichte $G(A, \varphi)$

bemerkbar macht, wenn φ die Amplitude bedeutet und wenn $T(\varphi)$ in der Einheit T_0 und $r_1 - r_0$ in der Einheit $p + r_0$ gemessen wird.

5. Schneide von beliebiger Gestalt. Ist nun endlich für die betrachtete Schneide der Krümmungsradius in Abhängigkeit vom Neigungswinkel gegeben:

$$r = r(A) \quad r(0) = r_0.$$

so beachten wir, daß sich die Krümmung an der Stelle A um den infinitesimalen (oder auch endlichen) Betrag $dr(A)$ ändert. Alle diese Änderungen von r werden durch eine Integration der Gleichung (11) über alle beim Schwingungsvorgang beteiligten A erfaßt. Man erhält:

$$T(\varphi) = T_0 \left\{ K(r_0/L, \varphi) + \frac{2}{\pi(p+r_0)} \int_0^\varphi \sqrt{1-(A/\varphi)^2} [r_0 - r(A)] d(A/\varphi) \right\} \quad (12)$$

Gleichung (12) gibt die Schwingungszeit eines Pendels in Abhängigkeit von der Gestalt der Schneide wieder in einer sehr durchsichtigen Weise. Der erste Term beschreibt den Einfluß des endlichen Krümmungsradius r_0 , der zur Stelle Null der Ruhelage der Schneide gehört. Wie wir bereits wissen, ist dieser Term nicht wesentlich verschieden von der Funktion $T(\varphi)$ für das gewöhnliche physikalische Pendel. Die Besonderheiten von $T(\varphi)$, die bei der Schulerschen Messung uns begegnet sind, zu erklären, ist er nicht imstande. Der zweite Term gibt den Einfluß der speziellen Gestalt der Schneide auf die Schwingungszeit wieder. Da das Integral von $r_0 - r(A)$, nicht aber von r_0 abhängt, da weiter durch die Vorgabe von $r_0 - r(A)$ nicht die Gestalt der Schneide selbst, sondern nur die Gestalt ihrer Evolute festgelegt ist, so folgt, wenn man von der schwachen Abhängigkeit des Faktors $2/\pi(p+r_0)$ von r_0 absieht, der Satz:

Für das bei jedem Schneidenpendel individuell verschiedene Gesetz des Zusammenhanges zwischen Schwingungszeit und Amplitude, das durch den zweiten Term der Gleichung (12) dargestellt wird, ist die Evolute der Schneide maßgebend. Schneiden, die Evolventen der gleichen Evolute sind, verhalten sich gleich.

Da uns bei den weiteren Untersuchungen besonders dieser zweite Term interessiert, führen wir für ihn die Abkürzung $\tau(\varphi)$ ein und erhalten:

$$\tau(\varphi) = \frac{T(\varphi)}{T_0} - K(r_0/L, \varphi) = \frac{2}{\pi(p+r_0)} \int_0^\varphi \sqrt{1-(A/\varphi)^2} [r_0 - r(A)] dA/\varphi. \quad (13)$$

Damit ist das Problem des auf der Ebene abrollenden Pendels erledigt. Es ist noch von Interesse, zu erfahren, daß die Formeln (11) bis (13), denen nur näherungsweise Gültigkeit zukommt, richtig sind bis auf Glieder von der Größenordnung

$$o\left(\frac{r_{\max} - r_{\min}}{p}\right)^2 \quad \text{und} \quad o\left(\frac{r_{\max} - r_{\min}}{p}\right)\varphi^2.$$

Beim Schulerschen Pendel ist z. B. $\tau(\varphi) \sim 10^{-5}$, bei Amplituden $\varphi \sim 1^\circ \sim 10^{-2}$. Weiter ist $p \sim 10^2$ cm und daher nach (11) $\Delta r \sim 10^{-3}$ cm. Die nicht mehr durch unsere Formeln erfaßten Glieder sind viel kleiner als $\tau(\varphi)$, nämlich

$$\left(\frac{r_{\max} - r_{\min}}{p}\right)^2 \sim \lambda^2 \sim 10^{-10} \quad \text{und} \quad \left(\frac{r_{\max} - r_{\min}}{p}\right)\varphi^2 \sim \lambda\varphi^2 \sim 10^{-9}.$$

Wenn man von dem bemerkenswerten Einfluß einer nicht vollkommen spitzen Schneide auf die Schwingungszeit erfährt, so drängt sich die Frage auf, ob vielleicht eine nicht vollkommen ebene Unterlage einen ähnlichen Einfluß auf die Schwingungszeit besitzt. In der zu Beginn angekündigten Abhandlung wird diese Frage ebenfalls eingehend untersucht. Wir teilen hier nur das Ergebnis mit, daß jener Einfluß zwar von der gleichen Art ist wie der Einfluß der Schneide, indem wiederum die Funktion $G(A, \varphi)$ eine wichtige Rolle spielt, daß aber seine Größe sich zu unserem $\tau(\varphi)$ verhält wie der Krümmungsradius der Schneide zum Krümmungsradius der Unterlage, so daß er im allgemeinen wesentlich kleiner als $\tau(\varphi)$ ist und vernachlässigt werden kann. Bei der praktischen Beurteilung von Schneidpendeln auf Grund des Uhgangs, der wir uns nun zuwenden, ist man daher wohl berechtigt, die Unterlage als eben anzunehmen und für Besonderheiten des Uhgangs die Schneide verantwortlich zu machen.

Wir betrachten nun wieder die Meßreihe, die bei Schulers Pendel für die Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Amplitude aufgenommen worden ist. Da der Einfluß des elliptischen Integrals bei großen Amplituden bereits berücksichtigt ist, so liegt hier gerade unsere Funktion $\tau(\varphi)$ von Gleichung (13) vor. Wir schließen von $\tau(\varphi)$ zurück auf $r(A)$, indem wir $r(A)$ als Treppenkurve konstruieren. Ist uns nämlich $r(A)$ als Treppenkurve gegeben, so folgt nach (11):

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{p + r_0} \sum_{n=1}^m (r_{n-1} - r_n) G(A_n, \varphi) = \sum_{n=1}^m \lambda_n G(A_n, \varphi) . . \quad (14)$$

Die Umkehrung dieser Konstruktion geht so vor sich: $\tau(\varphi)$ liegt gezeichnet vor. Nun beginnt man mit einem ziemlich kleinen Wert A_1 und bestimmt ein λ_1 so, daß durch $\lambda_1 G(A_1, \varphi)$ ein erstes Stück der Kurve $\tau(\varphi)$ gut angenähert wird. Diese erste Kurve $\tau_1(\varphi)$ wird sich bald von der gemessenen Kurve $\tau(\varphi)$ entfernen. Das trete bei A_2 ein. Dann wird mit A_2 eine weitere Funktion $\lambda_2 G(A_2, \varphi)$ überlagert, zu der wiederum λ_2 so bestimmt wird, daß ein weiteres Stück der Kurve gut angenähert wird, und so fort. Auf diese Weise erhält man $r_0 - r(A)$ in der Längeneinheit $p + r_0$.

Das Ergebnis im Falle der Schulerschen Meßreihe zeigt Fig. 7. $\tau(\varphi)$ wurde durch Überlagerung dreier Funktionen $G(A_n, \varphi)$ angenähert, die in der Figur teilweise gestrichelt eingezeichnet sind. Da $p = 50$ cm ist, ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} A_1 = 2.5' & \lambda_1 = 1.2 \text{ sec/dies} & r_0 - r_1 = 7 \mu & r_0 - r_1 = 7 \mu \\ A_2 = 10' & \lambda_2 = 1.2 \quad ,, & r_1 - r_2 = 7 \mu & r_0 - r_2 = 14 \mu \\ A_3 = 20' & \lambda_3 = 1.4 \quad ,, & r_2 - r_3 = 8 \mu & r_0 - r_3 = 22 \mu \end{array}$$

So erhalten wir Aufschluß über die Schwankungen des Krümmungsradius längs der verwendeten Schneide. Über den Wert r_0 erfahren wir dagegen nichts, denn wir wissen, daß eine ganze Schar möglicher Schneidenformen, die Evolventen einer gemeinsamen Evolute sind, die gleiche Funktion $\tau(\varphi)$ zur Folge haben.

Für die Anwendung von Schneidenpendeln ergeben sich aus unseren Untersuchungen folgende neue Gesichtspunkte:

Jede Schneide trägt eine individuelle Funktion $\tau(\varphi)$ zur Theorie des betreffenden Pendels bei. Diese Funktion als Ganzes unter die Schranke der verlangten Genauigkeit herunterzudrücken, scheint wenig aussichtsreich zu sein, denn, um z. B. $\tau < 10^{-8}$ zu machen, müßte man bei der Länge $p \sim 10^2$ cm, die sich nicht wesentlich vergrößern läßt, als Schneide einen Kreiszyylinder oder eine Kugel verwenden, deren Krümmungsradius in dem bei der Schwingung abgewälzten Bereich noch nicht 10^{-6} cm Änderung erfährt. Dies ist aussichtslos und

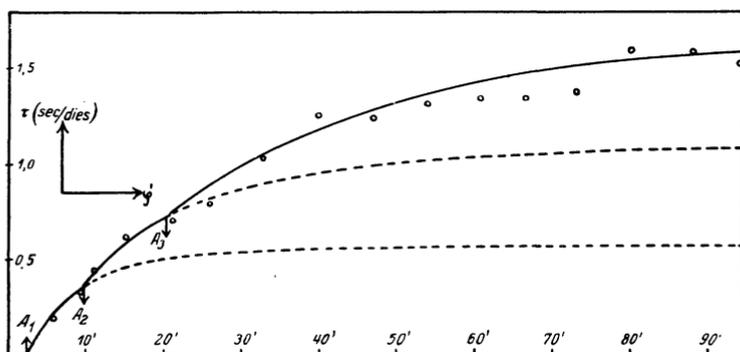


Fig. 7. Prof. Schulers Meßreihe von Fig. 1 durch drei G -Funktionen angenähert

daher wird man sich mit einem Einfluß der Schneide auf den Uhrgang vertraut machen müssen, sobald man entsprechend hohe Ansprüche an die Genauigkeit stellt.

Wird mit dem Einfluß der Schneide auf den Uhrgang gerechnet, so entstehen neue Fehler, wenn die Schneide im Lauf der Zeit an irgendeiner Stelle ihren Krümmungsradius ändert. Es sei $\delta r(A)$ die aus irgendwelchen Gründen eingetretene Änderung der Gleichung $r(A)$ der Schneide. Die dadurch eintretende Änderung der Funktion $T(\varphi)$ folgt dann aus Gleichung (12) durch Differentiation. Das Ergebnis lautet, wenn wir Glieder von der Größenordnung λ^2 wie stets fortlassen:

$$\delta T(\varphi) = -T_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta r_0}{p + r_0} - \frac{2}{\pi(p + r_0)} \int_0^\varphi \sqrt{1 - (A/\varphi)^2} \delta[r_0 - r(A)] dA/\varphi \right\} \quad (15)$$

Die so bedingte Änderung des Uhrgangs ist also wiederum von der Größenordnung $\Delta r/p$. Solche gefährliche Abänderungen der Schneide können durch Stoß oder

durch plastische Verformung infolge starker Beanspruchung der Schneide leicht eintreten. So wird es erklärlich, daß häufig bei Schneidenpendeln kleine Änderungen des Ganges festgestellt wurden, nachdem man sie transportiert und neu aufgestellt hatte. Auch erkennt man, daß es nicht möglich ist, den hier vorliegenden Schwierigkeiten dadurch aus dem Wege zu gehen, daß man die Schneiden, wie bisher üblich, möglichst scharf macht, denn solche Schneiden sind bei der im Verhältnis zur Größe besonders starken Beanspruchung in hohem Maße der Gefahr einer dauernden Verformung ausgesetzt, die schwer kontrollierbare Fehler zur Folge hat.

Endlich erscheint es, wie die Praktiker schon lange wissen, unzweckmäßig, das Pendel mit allzu kleinen Amplituden zu betreiben, denn das Beispiel der abgeschnittenen Schneide lehrt, daß eine örtlich begrenzte Unregelmäßigkeit der Schneide die Schwingungszeit außerordentlich stark beeinflussen kann, wenn die Schwingung sich nahezu auf diese Stelle beschränkt, während diese Unregelmäßigkeit bei größeren Amplituden rasch an Gewicht verliert.

So erwachsen durch den Einfluß der Schneide auf die Schwingungsdauer eines Pendels der Präzisionstechnik große Schwierigkeiten. Zu ihrer Überwindung ist die genaue Kenntnis des vorliegenden Sachverhaltes erforderlich und dazu soll diese Untersuchung beitragen. Es ist selbstverständlich, daß dabei die Frage nach dem zu verwendenden Material von größter Bedeutung ist und daß bei höheren Ansprüchen nur noch das beste und widerstandsfähigste Material Verwendung finden darf.

Ich will zum Abschluß der Untersuchungen zeigen, daß es durch Verwendung einer geeignet geformten Schneide möglich ist, ein Pendel zu bauen, dessen Schwingungszeit von der Amplitude nicht abhängt. Von einem solchen isochronen Pendel versprach sich schon Gauß große Vorteile, und zwar dachte er an das bekannte Zykloidenpendel. Gleichung (12) zeigt einen neuen Weg zur Erreichung dieses Zieles: es ist $\tau(\varphi) = -K(r_0/L, \varphi)$ zu machen. Dieser Bedingung genügt näherungsweise eine Schneide nach der Gleichung

$$r(A) = r_0 + \frac{1}{2} (p + r_0) (1 + 4 r_0/L) A^2 (16)$$

indem für diese Schneide der Einfluß der Amplitude auf die Schwingungszeit erst mit einem Glied φ^4 beginnt. Ein solches Pendel wurde roh handwerksmäßig im Institut für angewandte Mechanik zu Göttingen hergestellt und nachgeprüft. Die Messung ergab für Amplituden zwischen 0 und 40° übereinstimmend $T = 0.700 \pm 0.005$ sec, während bei einem gewöhnlichen Pendel in diesem Bereich die Schwingungszeit von 0.700 bis 0.734 sec ansteigen würde. Wenn es auch nicht gelingen dürfte, eine solche isochrone Schneide so genau herzustellen, daß die Schwingungszeit vollkommen unabhängig von der Amplitude wird, so sind doch die Vorteile einer nur schwach von der Amplitude abhängigen Schwingungszeit so groß, daß es nicht aussichtslos ist, den Gaußschen Erfindergedanken mit diesen neuen Mitteln wieder auferstehen zu lassen.