

Werk

Jahr: 1932

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:8

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0008

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0008

LOG Id: LOG_0058

LOG Titel: Theorie einiger gravimetrischer Instrumente nach dem Prinzip der bifilaren Aufhängung

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Theorie einiger gravimetrischer Instrumente nach dem Prinzip der bifilaren Aufhängung

Von **A. Berroth**, Aachen — (Mit 13 Abbildungen)

Es gibt bei bifilarer Aufhängung einer schweren Masse zwecks Messung der Schwerebeschleunigung zwei Möglichkeiten, Bifilarschwingungen von großer Periode zu erhalten. Diese sind gegeben, wenn man die hängende Masse mittels einer geeigneten Zusatzkraft um etwas mehr als 90° dreht und wenn man das Gehänge in eine um 180° gedrehte Lage versetzt. Beiden Möglichkeiten liegt die Benutzung der Nähe eines labilen Gleichgewichtszustandes als Prinzip zugrunde. In beiden Fällen können die Schwingungszeiten theoretisch $= \infty$ gemacht werden, und in diesem Zusammenhang gibt eine kleine Veränderung des Gewichts eine große Winkeländerung der Gleichgewichtslage oder eine große Veränderung der Schwingungszeit, die je nachdem der Messung unterworfen werden sollen. Der erste Fall schließt infolge der erreichbaren hohen Empfindlichkeit die Möglichkeit in sich, die in die Lotrichtung fallende Komponente der Flutkraft von Sonne und Mond und ihre Variationen und damit das elastische Verhalten und die dynamischen Meereszeiten der Erde zu messen. Um jedoch auch lokale Schweredifferenzen auf der Erdoberfläche messen zu können, ist in beiden Fällen besondere Rücksicht auf die Transportmöglichkeit der Apparaturen genommen worden. Bekanntlich sind seit Kriegsende von verschiedenen Seiten und auf verschiedenen Wegen die Anstrengungen vervielfältigt worden, durch Entgegenstellung elastischer Kräfte Schweredifferenzen zu messen. Da wohl alle diese Apparate an ein und derselben „Krankheit“ leiden, nämlich der trotz der epochemachenden Erfindungen von Ch. Guillaume nur knapp genügenden thermischen Konstanz, so schien es lohnend, die vorliegenden elastischen Verhältnisse im Rahmen des gesteckten Zieles zu untersuchen. Im III. Teil ist die Theorie einer Bifilar-Drehwaage erörtert. Alle Zahlenrechnungen beziehen sich auf das absolute Maßsystem.

I. Theorie des festaufgestellten Gravimeters Perrot-Schmidt und eines transportablen Instruments nach diesem Prinzip

Das einzige Instrument, das bisher bekannt geworden ist zur praktischen Messung der zeitlichen Veränderungen der Schwerebeschleunigung auf ein und demselben Standpunkt in Richtung der Lotrichtung ist das Gravimeter von Perrot-Schmidt*). Dieses Instrument war schon ursprünglich zur Messung

*) M. Perrot: Comptes rendus **54**, 728 (1862). In diesem Bericht ist die Rede von zwei Apparaten, von denen der zweite ein Horizontalpendel darstellt. Da es sich um die Richtigstellung einer Namengebung handelt, sei im folgenden die auf den obigen Apparat bezügliche Stelle wörtlich angeführt. Danach hat der Erfinder den Apparat praktisch erprobt und auch bereits die empfindliche Einstellung erkannt (angle de

von Variationen der Schwerebeschleunigung an ein und demselben Ort gedacht (Perrot 1862), wozu späterhin die Erkenntnis der Eignung als Seismometer trat (Schmidt), es wurde jedoch sehr bald als ein zur Messung aller vertikalen Beschleunigungen brauchbarer Apparat erkannt (Schmidt). Das Instrument kann entstanden sein in Anlehnung an das Bifilarmagnetometer von C. F. Gauß, an welchem die erdmagnetische Richtkraft durch eine tordierte Feder ersetzt wird, doch ist über einen solchen Zusammenhang nichts bekannt. Perrot hat bereits darauf hingewiesen, daß der Apparat eine Änderung der Schwerkraft bis zu $1/100000000$ der Intensität erkennen lasse, eine Wirkung, die nach Angaben des Konstrukteurs zehnmal kleiner sei als die Maximalwirkung des Mondes.

Er hat nach dem vorhandenen kurzen Bericht offenbar auch Versuche angestellt (expériences), jedoch ist über Ergebnisse nichts bekannt geworden. Die ersten brauchbaren Beobachtungen auf Grund eines verbesserten Apparates hat erstmalig (1913) W. Schweydar angestellt, dem es gelang, damit die Hauptmondwelle M_2 aus einjährigen Registrierungen abzuleiten.

Schweydars Änderungen des Perrot-Schmidtschen Apparates bestanden hauptsächlich darin, die Seidenfäden des Bifilargehänges durch 0.04 mm dicke gealterte Platiniridiumfäden zu ersetzen und eine tordierte Feder aus 0.6 mm dickem gehärtetem Stahldraht anzuwenden.

Die Messung konnte, wie im folgenden gezeigt wird, nur gelingen unter der Voraussetzung außergewöhnlicher Ansprüche an die Konstanz der Temperatur.

Besonders gefährlich hätten der Messung periodische Temperaturschwankungen von der Periode des abzuleitenden Gliedes werden müssen, die jedoch bei der Aufstellung 25 m unter der Oberfläche offenbar nicht vorhanden waren. Aber auch jede andere noch so geringfügige Temperaturschwankung mußte als höchst lästig empfunden werden.

rotation appréciable). Da M. Schmidt in seiner ersten Arbeit (Gerlands Beitr. z. Geophysik 4, 109) auf diesen Artikel Bezug nimmt, so ist damit erwiesen, daß die Nennung Trifilar-Gravimeter von Schmidt, die auch W. Schweydar anwendet, nicht genau zutrifft, sondern daß das Instrument heißen muß: Gravimeter von Perrot-Schmidt.

M. Perrot soumet au jugement de l'Académie les principes de deux appareils destinés à rendre manifestes et mesurables les variations occasionées dans l'intensité et la direction de la pesanteur à la surface de la terre par les divers mouvements de notre globe et l'attraction des corps célestes.

Un plateau étant suspendu à l'extrémité inférieure d'un ressort hélicoidal très long, si l'on dépose un poids sur ce plateau, deux effets simultanés sont produits: abaissement et rotation du plateau. Négligeant l'abaissement, je crois, dit M. Perrot, pouvoir conclure de mes expériences qu'à l'aide d'un ressort de quelques mètres de hauteur et de diamètre très petit, on peut concevoir l'espérance de constater par un angle de rotation appréciable un centmillionème de variation dans l'intensité de la pesanteur c'est à dire une action dix fois plus faible que le maximum de la lune.

Renvoi à l'examen d'une commission composée de MM Babinet & Delaunay.

W. Schweydar: Beobachtung der Änderung der Intensität der Schwerkraft durch den Mond, Akad. d. Wiss. Berlin 1914.

Es war im folgenden das Ziel, die störenden Einflüsse theoretisch zu untersuchen (worüber bisher nichts bekannt geworden ist) und die Bedingungen so zu verbessern, daß bei einer Wiederholung der Messung auch die anderen größeren Wellen und womöglich noch genauere Resultate erhalten werden, so daß sie mit den besten Horizontalpendelmessungen auf einer Stufe stehen*). Außerdem werden die Prinzipien erörtert, die an einem transportablen Apparat zu erfüllen sind. Es wird sich im folgenden zeigen, daß die empfindlichste Stelle des Apparates die Feder darstellt. Da seit 1914 beträchtliche Fortschritte in der Herstellung von Stählen erzielt worden sind, dürften eine Ersetzung der Feder aus gewöhnlichem Stahl und ähnlich der Platiniridiumfäden durch geeignetere Materialien wie auch sonstige Verbesserungen ein beträchtlich günstigeres Ergebnis erwarten lassen.

Über das Material der unteren Scheibe, an welcher die Bifilarfäden befestigt waren, ist keine Angabe zu finden. Auch hier wird man mit temperatur-unempfindlichem Material Verbesserungen erzielen können.

Die obere Befestigungsstelle der Bifilarfäden war ein Glaszylinder. Obwohl gewöhnliches Glas bereits einen kleinen Ausdehnungskoeffizienten hat ($9 \cdot 10^{-6}$), wird man doch späterhin zu Quarzglas aus amorphem Quarz übergehen ($0.5 \cdot 10^{-6}$). Verhältnismäßig stark gehen infolge der Auftriebswirkung die Störungen der Luftdichte ein. Obwohl dieselben unregelmäßig sind (abgesehen von den Gezeiten des Luftmeeres), wird man sie doch durch eine luftdichte Aufstellung vermeiden. Diese Anregung für späterhin hat bereits W. Schweydar gegeben, jedoch bei seinem Apparat noch nicht angewandt. Von grundlegender Wichtigkeit für alle Anwendungen ist die theoretische Kenntnis der Funktion aller Teile des Apparates und ihrer Gesamtwirkung sowie der günstigsten Arbeitsbedingungen.

Wirkungsweise des Apparates. Bringt man durch Drehen am Torsionskopf den Balken in eine Stellung zwischen 90 und 91.8° (nach gewähltem Beispiel) möglichst nah an den Umschlagpunkt, so wird die Schwingungszeit immer größer.

*) Bekanntlich ist die reine Bestimmung der Schwereänderung in ihren drei Komponenten oder die Bestimmung der elastischen Konstanten des Erdkörpers nach diesem Verfahren eine sehr komplizierte Aufgabe. Die beiden Einflüsse lassen sich nur durch eine Kombination von Horizontalpendel- und Gravimeterbeobachtungen trennen, wobei jedoch die sekundären Einflüsse der Gezeiten des Meeres (und auch in geringem Grade der Luft) außerordentlich stören.

Diese Störungen ließen sich jedoch größtenteils eliminieren, wenn man gewisse eintägige Wellen aus den Registrierungen ableiten könnte. Dies ist aber bis jetzt nur bei den Horizontalpendeln, nicht aber bei den Gravimeterbeobachtungen gelungen, so daß eine Ermöglichung der letzteren weittragende Schlüsse über die elastischen Konstanten der Erde und, was noch wichtiger ist, über die dynamischen Gezeiten der freien Ozeane zulassen würde, von welchen bis jetzt nur eine (nicht immer zutreffende) Theorie besteht, welche somit dadurch weitgehend befruchtet werden könnte; vgl. hierzu:

A. Berroth: Über die Messung der Variation der Schwere durch Sonne und Mond unter Berücksichtigung der dynamischen Meeresgezeiten. Nachr. d. Göttinger Ges. d. Wiss. 1932, V, S. 449.

Läßt man den Balken um die nun erreichte Stellung kleine Schwingungen ausführen, so kommt zur D'Alembertschen Trägheitskraft ein mit dem Ausschlagswinkel proportionaler Teil der Federkraft hinzu, der mit dem Winkel sein Vorzeichen ändert, während diesen Kräften ein kleiner Teil des Bifilmomentes entgegenwirkt, der ebenfalls mit dem Winkel sein Vorzeichen ändert.

Das Ganze läuft also, soweit man Schwingungszeiten messen will, im Grunde genau auf dasselbe Prinzip hinaus, das vor kurzem F. Holweck und P. Lejay*) auf ganz andere Weise erreicht haben.

Ein zweites Meßprinzip ist das der Beobachtung von Veränderungen der Gleichgewichtslage.

Man sollte vermuten, daß bereits bei einer Drehung des Gehänges um genau 90° die Federkraft ein Umschlagen bewirkt, da alsdann das bifilare Drehmoment sein Maximum erreicht hat. Da jedoch in der Nähe von 90° der Weiterlauf des Gehänges einen schnelleren Verlust an Federkraft mit sich bringt, als der Veränderung des bifilaren Drehmomentes entspricht, so bewirkt dieser Umstand ein geringes Hinausschieben der Stelle, an welcher das Maximum des Federmomentes erreicht wird, wie man leicht aus der Figur erkennt.

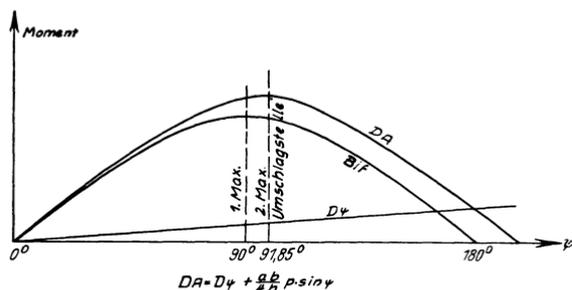


Fig. 1
Einstellung des Gravimeters Perrot-Schmidt

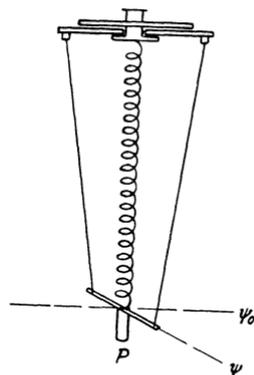


Fig. 2. Prinzip des Gravimeters Perrot-Schmidt

Bei dem für die Messung der Komponente der Flutkraft in Frage kommenden Apparat wird die rund 500mal höhere Genauigkeit durch einen besonderen Kunstgriff erreicht, der dem Scharfsinn seines Erfinders alle Ehre macht. Wenn nämlich von einem Totalgewicht von 500 g die Bifilarfäden nur wenige Gramm tragen, so gehen Schwereänderungen trotzdem multipliziert mit der Gesamtmasse, also mit 500 ein.

*) F. Holweck und P. Lejay: Comptes Rendus de l'Académie Paris 1930, p. 1387. Dieselben: Perfectionnements à l'instrument transportable pour la mesure rapide de la gravité. C. R. 1931, p. 1116. Dieselben: Nouveau modèle de pendule Holweck-Lejay; valeur de la gravité en quelques points de la France continentale et en Corse. C. R. 1931, déc. 21.

a) Allgemeine Theorie. Ist r der Radius des die Feder-Schraubenlinie enthaltenden Zylinders und α die Neigung oder der Steigungswinkel der Spirale gegen die Horizontale, so ist die Drillung pro Längeneinheit: $\tau = 1/r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, die Biegung der Schraubenlinie: $\beta = 1/r \cdot \cos^2 \alpha$ (Krümmung). Aus der Statik*) ist folgender Satz bekannt: Durch jeden Punkt der Mittellinie eines elastischen Drahtes gibt es drei bestimmte, zu einander senkrechte Richtungen, die so beschaffen sind, daß, wenn man auf irgend zwei Teile des Drahtes in Ebenen, die zu einer dieser Richtungen senkrecht sind, entgegengesetzte Kräftepaare wirken läßt, jeder dazwischenliegende Teil eine Rotation in einer Ebene erfährt, die den Ebenen der Kräftepaare parallel ist.

In dem vorliegenden Falle fällt eine solche ausgezeichnete Richtung in die Längsachse des Drahtes, während die zwei anderen Achsen darauf senkrecht stehen; die erste Achse ist eine Achse reiner Torsion, die beiden anderen solche reiner Biegung. Das Biegungskräftepaar hat man sich in der Schmiegungebene der Schraubenlinie, das Torsionskräftepaar in der zur Mittellinie des Drahtes senkrechten Ebene angreifend zu denken.

Die bei einer Verdrehung Δ in der Mantelfläche des Drahtes auftretende Schubspannung sei t , ρ sei der Radius des Drahtes und l seine Gesamtlänge, dann gilt:

$$\Delta = \frac{t}{E'} \cdot \frac{l}{\rho};$$

wo E' den Schubmodul bedeutet.

Für das Gleichgewicht muß das Moment des verdrehenden Kräftepaares gleich sein dem Moment M' sämtlicher in einem Drahtquerschnitt auftretenden Verdrehungswiderstände in Beziehung auf den Mittelpunkt des Querschnittes:

$$M' = \frac{t}{\rho} \cdot J'$$

oder

$$M' = \tau \cdot E' J'.$$

Die bei einer Biegung $1/r$ in der konvexen Mantelfläche im Abstand e von der neutralen Faser auftretende Zugspannung sei k , dann gilt:

$$k = \frac{E e}{r}$$

(E = Elastizitätsmodul). Für das Gleichgewicht muß das Moment M des biegender Kräftepaares gleich sein dem Moment sämtlicher in einem Drahtquerschnitt

*) W. Thomson und P. G. Tait: Natural Philosophy (Lehrbuch der Theoretischen Physik) Nr. 596 u. folgende.

auf tretenden Biegungswiderstände in Beziehung auf die Schwerlinie des Querschnittes:

$$M = \frac{k}{e} \cdot J,$$

$$M = \beta \cdot EJ.$$

Im Falle, daß die beiden Widerstandsmomente gegen Biegung gleich sind, was bei einem kreisrunden Draht der Fall ist, sind somit EJ und $E'J'$ die Größen der Kräftepaare, welche den vorhandenen Draht in die Einheit der Biegung und Torsion versetzen.

Die elastischen Kräfte müssen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein, wenn man den Draht in einer bestimmten Lage festhalten will.

Die äußeren Kräfte kann man sich im vorliegenden Falle auf eine einzige Kraft R und ein Kräftepaar G zurückgeführt denken, welche, falls man ein Ende des Drahtes festhält, am anderen Ende angreifen.

Nach den praktisch gegebenen Verhältnissen greift die äußere Kraft R am unteren Ende vertikal nach unten an und übt in der Vertikalebene durch die Achse der Spirale ein Drehmoment Rr aus, während das äußere Drehmoment in einer horizontalen Ebene wirkt. Nach einem Satz aus der Statik kann man die Kraft R weiterhin zurückgeführt denken auf eine gleich große in der Spiralachse wirkende Kraft und ein Kräftepaar Rr .

Wir werden also auch die elastischen Kräftepaare zerlegen in ihre Komponenten senkrecht und parallel zur Spiralachse. Die Gleichgewichtsbedingungen sind alsdann folgende:

$$R = -EJ(\beta/r) \sin \alpha + E'J'(\tau/r) \cos \alpha;$$

$$G = EJ\beta \cos \alpha + E'J'\tau \sin \alpha.$$

Hierbei wird die Kraft R positiv gerechnet, wenn sie die Spirale ausspannt, E ist der Youngsche Modul, E' der Schubmodul, für welchen nach den Gesetzen der Elastizitätslehre die Beziehung gilt:

$$E' = \frac{\sigma}{2(\sigma + 1)} E;$$

σ = Querkontraktionskoeffizient, der für Metalle zwischen 3 und 4 liegt.

J und J' sind die Flächenträgheitsmomente in Beziehung auf eine Schwerachse des Querschnittes und in Beziehung auf den Mittelpunkt.

Für Kreisquerschnitt gilt:

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad J' = 2J.$$

Wir denken uns die senkrecht hängende Feder, solange sie durch das Gehänge noch nicht belastet ist, in ihren Ausgangszustand gebracht durch eine virtuelle Kraft R_1 und ein virtuelles Drehmoment G_1 , die zusammen den Ausgangszustand vollständig umschreiben. Insbesondere sei das Eigengewicht der Feder in R_1 enthalten.

Im Anfangszustand seien also R_1, G_1, r_1 vorhanden, durch Belastung und Torsion wird die Feder in den Zustand R_2, G_2, r_2 versetzt, in welchem das Gehänge an den empfindlichen Punkt gelangt ist, an welchem die Messung vorgenommen werden soll. Alsdann gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} R_1 &= - EJ (\beta/r_1) \sin \alpha_1 + E' J' (\tau/r_1) \cos \alpha_1, \\ G_1 &= EJ \beta \cos \alpha_1 + E' J' \tau \sin \alpha_1, \\ R_2 &= - EJ (\beta/r_2) \sin \alpha_2 + E' J' (\tau/r_2) \cos \alpha_2, \\ G_2 &= EJ \beta \cos \alpha_2 + E' J' \tau \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Die Änderungen zwischen Ausgangs- und Endzustand sind also hervorgerufen durch die Kraft ΔR und das Drehmoment ΔG :

$$\begin{aligned} \Delta R &= - EJ \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_2 \sin \alpha_2}{r_2^2} - \frac{\cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1}{r_1^2} \right\} \\ &\quad + E' J' \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_2 \sin \alpha_2}{r_2^2} - \frac{\cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1}{r_1^2} \right\}, \\ \Delta G &= EJ \left\{ \frac{\cos^3 \alpha_2}{r_2} - \frac{\cos^3 \alpha_1}{r_1} \right\} \\ &\quad + E' J' \left\{ \frac{\cos \alpha_2 \sin^2 \alpha_2}{r_2} - \frac{\cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_1}{r_1} \right\}. \end{aligned}$$

Führen wir die Länge des Drahtes l , ferner den gegenseitigen senkrechten Abstand der Angriffspunkte der Kräfte (Enden der Feder) x und den Verdrehungswinkel φ des beweglichen Federendes gegen das feste ein, so gilt im Ausgangszustand:

$$\sin \alpha_1 = \frac{x_1}{l}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{r_1}{l} \varphi_1;$$

im Endzustand:

$$\sin \alpha_2 = \frac{x_2}{l}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r_2}{l} \varphi_2.$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta R &= - \frac{1}{l^3} (EJ - E' J') \{x_2 \varphi_2^2 - x_1 \varphi_1^2\}, \\ \Delta G &= \frac{EJ}{l^3} \{(l^2 - x_2^2) \varphi_2 - (l^2 - x_1^2) \varphi_1\} + \frac{E' J'}{l^3} (x_2^2 \varphi_2 - x_1^2 \varphi_1); \end{aligned}$$

für Kreisquerschnitt:

$$\begin{aligned} \Delta R &= - \frac{\pi d^4}{64 l^3} (E - 2 E') \{x_2 \varphi_2^2 - x_1 \varphi_1^2\}, \\ \Delta G &= \frac{\pi d^4}{64 l^3} \{E[(l^2 - x_2^2) \varphi_2 - (l^2 - x_1^2) \varphi_1] + 2 E' (x_2^2 \varphi_2 - x_1^2 \varphi_1)\}. \end{aligned}$$

Es falle die Ebene durch die Spiralachse und das obere Federende in die Richtung der Balkenachse, wenn dieser frei an zwei Fäden aufgehängt ist (eine Voraussetzung, die keine weiteren Folgen hat als die der Einfachheit) und die azimutale Richtung dieser Ebene sei ψ_0 . ψ_1 sei die Richtung des Balkens in der Ausgangsstellung der Feder, also vor der Belastung, ψ_2 die Richtung des Balkens in der Gebrauchsstellung, A_1 die Richtung des unteren Federendes in der Ausgangsstellung, A_2 seine Richtung in der Gebrauchslage.

Dann ist:

$$\varphi_1 = A_1 - \psi_1,$$

$$\varphi_2 = A_2 - \psi_2.$$

An der empfindlichen Stelle, an der die Beobachtung stattfinden soll, sei p der Gewichtsanteil des Gesamtgewichts P , der von den Fäden der bifilaren Aufhängung getragen wird (genauer die Summe der Vertikalspannungen der beiden Fäden). Das Federgewicht ist sowohl in R_1 als in R_2 enthalten. Das Fadengewicht rechnet zu p .

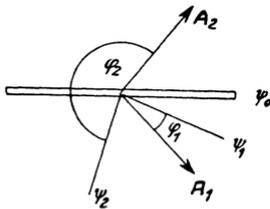


Fig. 3

Balken- und Federstellung

Das bifilare Drehmoment, auf welches wir später noch genauer eingehen, ist mit hoher Annäherung:

$$D = \frac{a b}{4 h} p \sin(\psi_2 - \psi_0),$$

$$p = P + \Delta R,$$

(ΔR ist negativ), wobei a, b die Horizontalprojektion der Verbindungslinien der oberen und unteren Fadenbefestigungsstellen, h der Vertikalabstand, gemessen in der Gebrauchslage, bedeuten.

Es besteht somit die Gleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{a b}{4 h} \sin(\psi_2 - \psi_0) & \left[P - \frac{1}{\gamma^3} (E J - E' J') \{ x_2 (A_2 - \psi_2)^2 - x_1 (A_1 - \psi_1)^2 \} \right] \\ & = \frac{E J}{\gamma^3} \{ (\gamma^2 - x_2^2) (A_2 - \psi_2) - (\gamma^2 - x_1^2) (A_1 - \psi_1) \} \\ & \quad + \frac{E' J'}{\gamma^3} \{ x_2^2 (A_2 - \psi_2) - x_1^2 (A_1 - \psi_1) \}, \end{aligned}$$

und die Differentialbeziehungen für alle Veränderliche, die zunächst in Frage kommen:

$$d \psi_2 = \frac{v}{s} d P + \frac{t}{s} d \psi_1 + \frac{u}{s} d x_1 + \frac{u'}{s} d x_2 + \frac{w}{s} d E + \frac{w'}{s} d E' + \frac{w''}{s} d l;$$

$$\begin{aligned} s & = \frac{a b p}{4 h} \cos(\psi_2 - \psi_0) + \frac{2 a b x_2}{4 h \gamma^3} (A_2 - \psi_2) \sin(\psi_2 - \psi_0) (E J - E' J') \\ & \quad + \frac{E J}{\gamma} - \frac{x_2^2}{\gamma^3} (E J - E' J'); \end{aligned}$$

$$t = \frac{a b x_1}{2 h \gamma^3} (A_1 - \psi_1) \sin(\psi_2 - \psi_0) (EJ - E' J') + \frac{EJ}{\gamma} - \frac{x_1^2}{\gamma^3} (EJ - E' J');$$

$$u = -\frac{a b}{4 h \gamma^3} (A_1 - \psi_1)^2 \sin(\psi_2 - \psi_0) (EJ - E' J') \\ + \frac{2 x_1}{\gamma^3} (A_1 - \psi_1) (EJ - E' J');$$

$$u' = \frac{a b}{4 h \gamma^3} (A_2 - \psi_2)^2 \sin(\psi_2 - \psi_0) (EJ - E' J') \\ - \frac{2 x_2}{\gamma^3} (A_2 - \psi_2) (EJ - E' J');$$

$$v = -\frac{a b}{4 h} \sin(\psi_2 - \psi_0);$$

$$w = \frac{a b}{4 h \gamma^3} J \{x_2 (A_2 - \psi_2)^2 - x_1 (A_1 - \psi_1)^2\} \sin(\psi_2 - \psi_0) \\ + \frac{J}{\gamma^3} [(\gamma^2 - x_2^2) (A_2 - \psi_2) - (\gamma^2 - x_1^2) (A_1 - \psi_1)];$$

$$w' = -\frac{a b}{4 h \gamma^3} J' \{x_2 (A_2 - \psi_2)^2 - x_1 (A_1 - \psi_1)^2\} \sin(\psi_2 - \psi_0) \\ + \frac{J'}{\gamma^3} [x_2^2 (A_2 - \psi_2) - x_1^2 (A_1 - \psi_1)];$$

$$w'' = -\frac{3 a b}{4 h \gamma^4} \{x_2 (A_2 - \psi_2)^2 - x_1 (A_1 - \psi_1)^2\} \sin(\psi_2 - \psi_0) (EJ - E' J') \\ - \frac{EJ}{\gamma^2} [(A_2 - \psi_2) - (A_1 - \psi_1)] + \frac{3 EJ}{\gamma^4} [x_2^2 (A_2 - \psi_2) - x_1^2 (A_1 - \psi_1)] \\ - \frac{3 E' J'}{\gamma^4} [x_2^2 (A_2 - \psi_2) - x_1^2 (A_1 - \psi_1)];$$

sowie

$$dg = -\frac{4 g h s}{a b P \sin(\psi_2 - \psi_0)} d\psi_2, \\ = -\frac{g}{K_b} \frac{p}{P} s d\psi_2.$$

Schwingungsbeobachtungen. Bedeutet j das Massenträgheitsmoment des schwingenden Körpers in Beziehung auf die Drehachse, $90^\circ + \Theta_n$ die normale Gleichgewichtslage, ϑ die Elongation aus derselben, so folgt aus dem Satz der Mechanik, daß die Summe der Drehmomente der äußeren Kräfte = dem Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung ist, die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung (ohne Dämpfung), wobei Θ_n als klein von

mit μ aus:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{p l^3}{2 x_2 \varphi_2 (E J - E' J')} \quad \text{und} \quad \gamma^2 = \left(\frac{a b p}{4 h} \right)^2 + \left(\frac{a b x_2 \varphi_2 (E J - E' J')}{2 h l^3} \right)^2,$$

oder einfacher aus:

$$\sin(\psi_2 - \psi_0 + \mu) = - \frac{4 h \sin \mu}{a b p l} \left\{ E J - \frac{x_2^3}{l^2} (E J - E' J') \right\}.$$

Es ergibt sich daraus, daß $(\psi_2 - \psi_0)$ in der Nähe von 90° liegen muß, und zwar größer als 90° ist.

Bemerkenswert ist dabei, daß die Phasenverschiebung $\mu \sim 90^\circ$ von den Dimensionen des Apparates, den Materialien und der Belastung, die die Fäden aufnehmen, abhängig ist. Z. B. erhält man für Fall 3*), S. 361 mit

$a = 3$	$x_2 = 29.92$
$b = 3$	$\varphi_2 = 68.5$
$p = 20.981$	$J = 8.9 \cdot 10^{-10}$
$l = 33$	$E = 2 \cdot 10^{12}$
$h = 29.92$	$E' = 0.8 \cdot 10^{12}$

das Resultat:

$$\mu = 89^\circ 53'$$

und

$$\begin{aligned} \psi_2 - \psi_0 + \mu &= 181^\circ 44' \\ \psi_2 - \psi_0 &= 91^\circ 51'. \end{aligned}$$

Man erreicht die höchste Empfindlichkeit jedoch auch so, daß man für Winkel $\psi_2 - \psi_0$ größer als 90° unter Beibehaltung des gewählten Winkels und Variieren des Gewichtes die Schwingungszeit steigert, d. h. daß man p aus der Gleichung $s = 0$ bestimmt.

Der Empfindlichkeitsgrad wird am besten empirisch ermittelt. Das Auflegen eines Gewichtes dM Gramm ist gleichbedeutend mit einer Änderung $dg = dM \cdot g/M$, wo M die Gesamtmasse des angehängten Gewichtes bedeutet.

Rechnet man dg in Einheiten 10^{-6} und entspricht dem Zusatzgewicht ein Ausschlag von $d\psi_2$ cm auf einer Skala (Spiegelablesung), und nimmt man an, daß man die Ablesungen auf 0.005 cm genau machen kann, so erhält man

*) Wir werden im folgenden zwei Fälle unterscheiden:

1. Ein fest aufgestelltes Instrument zur Registrierung der Sonne- und Mondwellen mit einer geforderten Genauigkeit in g von $1 \cdot 10^{-6}$ CGS.
2. Ein transportables Instrument zur Messung von lokalen Schweredifferenzen mit einer geforderten Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-3}$.

Während also im zweiten Falle in der Empfindlichkeit rund 1000mal geringere Ansprüche zu stellen sind, treten durch das Erfordernis des Transportes neben der Forderung nach größerer Handlichkeit neue Schwierigkeiten auf, die im folgenden ebenfalls zu untersuchen sind.

eine Einheit 10^{-6} in g , falls bei einer Belastung dM ein Ausschlag an der Skala von

$$0.005 \cdot 10^6 \cdot dM \cdot g/M \text{ (cm),}$$

erhalten wird. Für ein transportables Instrument muß verlangt werden, daß eine Gewichtsaufgabe dM Gramm einen Ausschlag von $0.005 \cdot 10^3 \cdot dM \cdot g/M \text{ cm}$ hervorruft.

Danach ist die Empfindlichkeit zu regulieren, also im zweiten Falle, z. B. für $dM = 1 \text{ mg}$, $M = 21$ ein Ausschlag von 2.6 mm. Da die Empfindlichkeit abnimmt, wenn man sich von der Gegend des labilen Gleichgewichtes entfernt, die Empfindlichkeitsbestimmung mit aufgelegtem Gewicht jedoch einen Mittelwert über das ganze $d\psi_2$ darstellt, so wird man bei Belastung einen etwas geringeren Ausschlag als den oben berechneten zu verlangen brauchen.

Zum praktischen Gebrauch muß man sich eine Empfindlichkeitsskala herstellen.

2. Unsymmetrische Gewichtsverteilung, Neigungseinfluß. Der auf S. 338 eingeführte Ausdruck für das bifilare Drehmoment ist nicht vollständig.

Bedeutet p die Summe der Vertikalspannungen beider Fäden und h die mittlere Vertikalhöhe, p_0 und p'_0 die vertikalen Spannungen des linken und rechten Fadens, h_0 und h'_0 die Vertikalhöhen des linken und rechten Fadens zwischen den Befestigungspunkten, gemessen in der Gebrauchslage, und setzt man:

$$h_0 = h(1 + \varepsilon), \quad p_0 = (1 + \delta) \frac{p}{2};$$

$$h'_0 = h(1 - \varepsilon), \quad p'_0 = (1 - \delta) \frac{p}{2},$$

so ist nach J. C. Maxwell*) und F. Kohlrausch**) das bifilare Drehmoment:

$$D = \frac{a b}{4 h} p \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} \cdot \sin(\psi_2 - \psi_0);$$

hierbei ist vorausgesetzt, daß sowohl die unteren wie die oberen Befestigungsstellen der Bifilarfäden nahezu in Horizontalebene liegen, und daß die Spannungen beider Fäden nur wenig verschieden sind, d. h. daß der Schwerpunkt des aufgehängten Körpers nahezu in der Mittellinie der Fäden liegt. Die Steifigkeit der Fäden wirkt sich aus wie eine Verkürzung der Fäden. Diese beträgt nach F. Kohlrausch:

$$\varrho^2 \sqrt{\frac{2 \pi E}{p}},$$

worin ϱ der Halbmesser des Fadens und E der Youngsche Modul ist. Die korrigierte Länge ist somit:

$$L = h - \varrho^2 \sqrt{\frac{2 \pi E}{p}}.$$

*) J. C. Maxwell: Treatise on electricity and magnetism 1873, II, p. 102.

**) F. Kohlrausch: Annalen der Physik und Chemie 1882, XVII, Nr. 13.

Die Torsionswirkung beider Fäden zusammen für die Winkeleinheit genommen ist:

$$D' = \frac{\pi \varrho^4}{L} E',$$

(wo E' = Torsionsmodul). Daraus ergibt sich der Ausdruck für das vollständige bifilare Drehmoment:

$$D = \frac{abmg}{4\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2}} \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} \sin(\psi_2 - \psi_0) + \pi \varrho^4 E' \frac{\psi_2 - \psi_0}{L},$$

und der Ausdruck für die Berechnung der Änderung der Torsionswirkung der beiden Fäden zusammen wegen Temperatureinfluß auf den Elastizitätsmodul:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{ab\sqrt{p}}{4[L^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2]^{3/2}} \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} \frac{L \varrho^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} E} \frac{dE}{dt} \sin(\psi_2 - \psi_0) + \pi \varrho^4 \frac{dE'}{dt} \frac{\psi_2 - \psi_0}{L},$$

wobei in m die Masse der Fäden inbegriffen ist.

Wenn wir in dg/dt eine erstrebenswerte Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-6}$ (Gezeiteninstrument) festlegen, so muß, da

$$\frac{dD/dt}{D} = \frac{dg/dt}{g}$$

ist, in diesem Ausdruck eine Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-9}$ festgehalten werden. Bei einem transportablen Instrument genügt hierin eine Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-6}$.

Da der von dE/dt abhängige Ausdruck viel kleiner ist, so genügt es, den zweiten Ausdruck zu untersuchen (S. 349).

Auch bei absolut fester Aufstellung spielen Neigungseinflüsse doch eine gewisse Rolle, einmal, weil der Boden und die Niveauflächen infolge periodischer Einflüsse sich fortgesetzt neigen, sodann wegen zufälliger Bodensenkungen. Bei transportablem Instrument ist jedoch dieser Punkt von grundlegender Bedeutung, weil es Schwierigkeiten macht, wieder in die alte Stellung zum Lot zu kommen. Um solche Einflüsse möglichst unschädlich zu machen, suchen wir die Bedingungen auf, bei welchen Neigungseinflüsse die geringste Wirkung haben (Fig. 3).

Es sei λ die Neigung der Verbindungslinie der oberen Fadenpunkte, $(\lambda + \eta)$ die der unteren in der Beobachtungslage, dann gilt mit f_0, f_u als schiefen Abständen der Anknüpfungspunkte oben und unten:

$$\sin(\lambda + \eta) - \frac{f_0}{f_u} \sin \lambda = \frac{h_0 - h'_0}{f_u}.$$

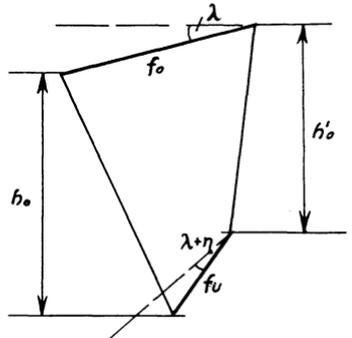


Fig. 5. Neigungseinfluß

Ist nun das bifilare Drehmoment:

$$D = \frac{ab}{\frac{h_0}{p_0} + \frac{h'_0}{p'_0}} \sin(\psi_2 - \psi_0),$$

so wird aus

$$D = \frac{ab}{4h} p \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} \sin(\psi_2 - \psi_0) \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{h_0 - h'_0}{2h}:$$

$$D = \frac{ab}{4h} p \frac{(1 - \delta^2) \sin(\psi_2 - \psi_0)}{1 - \frac{\delta}{2h} [f_u \sin(\lambda + \eta) - f_0 \sin \lambda]},$$

$$D = \frac{f_0 f_u}{4h} p \cos \lambda \cos(\lambda + \eta) \left\{ 1 - \delta^2 + \frac{\delta}{2h} [f_u \sin(\lambda + \eta) - f_0 \sin \lambda] \right\} \sin(\psi_2 - \psi_0).$$

Und der Differentialausdruck:

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{f_0 f_u}{4h} p \sin(\psi_2 - \psi_0) (I + II),$$

$$I = -\sin(2\lambda + \eta) \left\{ 1 - \delta^2 + \frac{\delta}{2h} [f_u \sin(\lambda + \eta) - f_0 \sin \lambda] \right\},$$

$$II = \frac{\delta}{2h} \{ f_u \cos(\lambda + \eta) - f_0 \cos \lambda \}.$$

Mit $\delta = 0$, d. h. falls keinerlei Unsymmetrie in der Belastung der Fäden vorhanden ist, erhalten wir:

$$\frac{dD}{d\lambda} = -\frac{f_0 f_u}{4h} p (2\lambda + \eta) \sin(\psi_2 - \psi_0).$$

Bei vollkommener Symmetrie der Belastung der Bifilarfäden wird somit ein Neigungseinfluß = 0 für $\lambda = -1/2 \eta$. Diesen Punkt kann man durch Probieren finden, und zwar so, daß man die Neigung künstlich ändert und die zugehörige Winkeländerung ($\psi_2 - \psi_0$) vermerkt.

Bei einer vorhandenen Neigung $2\lambda + \eta = 1^\circ$ ($\lambda = 20'$, $\eta = 20'$) würde in unjustiertem Zustand eine Neigungsänderung von $0.01''$ eine Änderung in g von $1 \cdot 10^{-6}$ vortäuschen.

Da beim Zusammenbau aber in λ und η leicht mehrere Grade vorkommen können, die mit bloßem Auge nicht zu erkennen sind, so würde der Apparat in diesem Zustand ein kleiner Konkurrent des Horizontalpendels werden, was nicht beabsichtigt ist; tatsächlich artet der Apparat auch zu einem Horizontalpendel aus, wenn man in diesem Sinne bei unsymmetrischer Belastung weitergeht.

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, setzen wir $\Delta R = 0$, indem wir die Federhöhe entsprechend regulieren oder durch entsprechende Mehrbelastung den Zug der Feder wieder aufgehoben denken. Dann erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung für das Trägheitsmoment J des Drahtquerschnittes, der als kreisförmig angenommen wird:

$$\frac{1}{J} = \frac{4h}{ab l^3 p} (III + IV) \frac{1}{\sin(\psi_2 - \psi_0)}, \quad d = 2,83 \sqrt[4]{\frac{J}{\pi}},$$

$$III = \{E l^2 - x_2^2 (E - 2 E')\} \varphi_2,$$

$$IV = - \{E l^2 - x_1^2 (E - 2 E')\} \varphi_1.$$

Läßt man insbesondere die Feder in einen rein tordierten Draht übergehen und wird $\varphi_1 = 0$ gesetzt, so erhält man für Kreisquerschnitt die bekannte Beziehung:

$$\frac{1}{J'} = \frac{4h E' \varphi_2}{ab l p \sin(\psi_2 - \psi_0)}, \quad J = 0,5 J'.$$

c) Temperatureinflüsse. a) Der Einfluß der Temperatur auf die elastischen Eigenschaften der Feder. Im Falle, daß alle anderen Größen konstant sind, hat man die Beziehung:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{w}{s} \frac{dE}{dt} + \frac{w'}{s} \frac{dE'}{dt}.$$

Um einen besseren Überblick zu gewinnen, nehmen wir für einen Augenblick an, daß

$$J = \frac{1}{i} J', \quad \frac{dE}{dt} = i \frac{dE'}{dt},$$

womit wir erhalten:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{J'}{sl} (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{dE'}{dt} = \frac{J'}{s} \left(\frac{\tau_2}{\sin \alpha_2} - \frac{\tau_1}{\sin \alpha_1} \right) \frac{dE'}{dt},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{s E'} \left(\frac{M_2'}{\sin \alpha_2} - \frac{M_1'}{\sin \alpha_1} \right) \frac{dE'}{dt}.$$

Bei Benötigung eines bestimmten Momentes der Verdrehungswiderstände ist es also vorteilhaft, Materialien mit möglichst großem Elastizitätsmodul zu verwenden.

Da die oben genannte einschränkende Voraussetzung im allgemeinen nicht zutrifft, bestimmen wir die Änderung aus der allgemeinen Beziehung.

Der Apparat sei im Gleichgewicht an der Stelle $\psi_2 - \psi_0$:

$$\Delta G = \frac{ab}{4h} (P + \Delta R) \sin(\psi_2 - \psi_0).$$

Durch Temperatureinflüsse ändere sich ΔG um dG und ΔR um dR . Um den Apparat an derselben Stelle ($\psi_2 - \psi_0$) wieder ins Gleichgewicht zu bringen, muß P um dP verändert werden.

$$\Delta G + dG = \frac{ab}{4h} [(P + dP) + (\Delta R + dR)] \sin(\psi_2 - \psi_0);$$

daraus folgt:

$$\frac{dG}{\Delta G} = \frac{dP}{P} + \frac{dR}{P}.$$

Mit

$$dP = \frac{P}{g} dg,$$

$$dg = g \frac{P}{P} \frac{dG}{\Delta G} - g \frac{dR}{P}.$$

Setzen wir:

$$q = -\frac{1}{l^3} (x_2 \varphi_2^3 - x_1 \varphi_1^3),$$

$$q' = \frac{1}{l^3} \{ (l^2 - x_2^3) \varphi_2 - (l^2 - x_1^3) \varphi_1 \},$$

$$q'' = \frac{1}{l^3} (x_2^3 \varphi_2 - x_1^3 \varphi_1),$$

so wird:

$$\frac{dg}{dt} = g \frac{P}{P} \frac{J \frac{dE}{dt} q' + J' \frac{dE'}{dt} q''}{EJq' + E'J'q''} - \frac{g}{P} q \left(J \frac{dE}{dt} - J' \frac{dE'}{dt} \right).$$

Für Kreisquerschnitt mit

$$P = \frac{4 \Delta G h}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)};$$

$$\frac{dg}{dt} = J \frac{g}{P} \left\{ \frac{4h}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} \left(\frac{dE}{dt} q' + 2 \frac{dE'}{dt} q'' \right) - q \left(\frac{dE}{dt} - 2 \frac{dE'}{dt} \right) \right\}.$$

Vorzeichen dg , wie auch im folgenden, im Sinne einer Aufhebung des Einflusses.

b) Der Einfluß der Temperatur auf die Länge der Feder. Wir gehen aus von der obenstehenden Gleichung:

$$\frac{dg}{g} = \frac{P}{P} \frac{dG}{\Delta G} - \frac{dR}{P};$$

$$dG = - \left\{ \frac{EJ}{l^2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3EJ}{l} q'' + \frac{3E'J'}{l} q'' \right\} dl;$$

$$dR = - \frac{3}{l} (EJ - E'J') q dl;$$

für Kreisquerschnitt:

$$\frac{dg}{dl/l} = -J \frac{g}{P} \left\{ \frac{4h}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} [E q' - 2(E - 3E') q''] - 3q(E - 2E') \right\},$$

ein Resultat, das auch aus der allgemeinen Beziehung S. 339

$$\frac{d\psi_2}{dg} = \frac{w''}{s} \frac{dl}{dg}$$

folgt. Insbesondere wird, wenn man die Windungszahl der Feder gegen Null abnehmen läßt ($x_2 = \sim x_1 = \sim l$), mit guter Annäherung erhalten:

$$\frac{dg}{dl/l} = J \frac{g}{P} \left\{ \frac{8h}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} (E - 3E') - 3 \frac{\varphi_2^2 - \varphi_1^2}{l^2} (E - 2E') \right\}$$

(transportables Instrument Fall 3).

c) Der Einfluß der Querausdehnung des Federquerschnittes mit der Temperatur. Wir gehen weiter aus von der Beziehung:

$$\frac{dg}{g} = \frac{p}{P} \frac{dG}{dG} - \frac{dR}{P}$$

und erhalten für Kreisquerschnitt:

$$\frac{dg}{\delta d/d} = 4J \frac{g}{P} \left\{ \frac{4h}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} (E q' + 2E' q'') - q(E - 2E') \right\}.$$

d) Längenausdehnung der Bifilarfäden mit der Temperatur:

$$\frac{d\psi_2}{dg} = \frac{1}{s} \frac{ab}{4h^2} \sin(\psi_2 - \psi_0) (P + \Delta R) \frac{dh}{dg};$$

$$\frac{d\psi_2}{dg} = - \frac{abP \sin(\psi_2 - \psi_0)}{4ghs};$$

$$\frac{dg}{g} = \left(\frac{dh}{h} \right) \left(1 + \frac{\Delta R}{P} \right);$$

ΔR ist negativ!

$$P \frac{dg}{g} = p \frac{dh}{h}$$

(Vorzeichen dg im Sinne einer Aufhebung des Einflusses). Mit $\Delta R = 0$ (Feder trägt nichts!):

$$\frac{dg}{g} = \frac{dh}{h}.$$

Hiermit hat man eine Kompensationsmöglichkeit, da dieses Glied das Vorzeichen + hat.

Die Schwereänderung, hervorgerufen durch die Längenänderung der Bifilarfäden, ist für $\Delta R = 0$ rund 1000mal so groß als der Ausdehnungskoeffizient.

Trägt beim ortsfesten Instrument die Feder 24/25 der Last, so ist die Schwereänderung nur rund 40mal so groß als der Ausdehnungskoeffizient, da hier jedoch

1000 mal schärfer gemessen werden muß, so ist dieser Einfluß relativ immer noch 25 mal ungünstiger als beim transportablen Instrument.

Da x_2 nahezu ebenso groß ist wie h , so ändert sich mit h auch x_2 um $dx_2 = dh$.

e) Einfluß der Veränderung des Grundabstandes mit der Temperatur. Einfluß von dx_2 :

$$\frac{d\psi_2}{dg} = \frac{u'}{s} \frac{dx_2}{dg} = -\frac{abP}{4ghs} \cdot \sin(\psi_2 - \psi_0);$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{u' 4h x_2}{abP \sin(\psi_2 - \psi_0)} \left(\frac{dx_2}{x_2} \right);$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{\varphi_2 x_2}{l^3 P} (EJ - E'J') \left[\varphi_2 - \frac{8h x_2}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} \right] \left(\frac{dx_2}{x_2} \right).$$

Vorzeichen dg im Sinne einer Aufhebung des Einflusses. Einfluß von dx_1 :

$$\frac{dg}{g} = - \left[\frac{\varphi_1 x_1}{l^3 P} (EJ - E'J') \left\{ \varphi_1 - \frac{8h x_1}{ab \sin(\psi_2 - \psi_0)} \right\} \right] \left(\frac{dx_1}{x_1} \right).$$

Für ein transportables Instrument $x_1 \sim x_2 \sim h$ geht die folgende Summe ein:

$$\frac{dg}{g} = \left\{ \frac{h}{l^3 P} (EJ - E'J') (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) - \frac{8h^2 (EJ - E'J')}{ab l^3 P \sin(\psi_2 - \psi_0)} (x_2 \varphi_2 - x_1 \varphi_1) \right\} \frac{dx_2}{h},$$

worin $dx_2/h =$ dem Ausdehnungskoeffizienten gesetzt werden kann.

f) Einfluß der Wärmeausdehnung der Querdimensionen des Bifilargehänges. Ähnlich wie auf S. 348 findet man:

$$\frac{dg}{g} = -\frac{p}{P} \left(\frac{da}{a} + \frac{db}{b} \right).$$

Daraus erkennt man, daß die linearen Maße keine Rolle spielen, vielmehr nur die Ausdehnungskoeffizienten, und daß für den Fall $p = P$ (transportables Instrument), wenn man amorphen Quarz benutzt ($\alpha = 0.5 \cdot 10^{-6}$), der Einfluß in g pro Grad Celsius $= -1 \cdot 10^{-3}$ wird (für Invar mit 36% Nickelgehalt $= -1.8 \cdot 10^{-3}$) im nämlichen Sinne wirkend wie die Wärmeänderungen der Feder.

g) Wärmeeinfluß auf die Torsion der Bifilarfäden. Für das Drehmoment der beiden Bifilarfäden zusammen gilt:

$$D' = 2 E' J' \frac{\psi_2 - \psi_0}{h} = \frac{\pi \varrho^4}{h} E' (\psi_2 - \psi_0),$$

$$\frac{dD'}{dt} = \frac{\pi \varrho^4}{h} (\psi_2 - \psi_0) \frac{dE'}{dt},$$

$$D = \frac{ab}{4h} p \sin(\psi_2 - \psi_0),$$

$$\frac{dD'/dt}{D} = -\frac{dg}{g} = \frac{4\pi \varrho^4}{abp} \frac{\psi_2 - \psi_0}{\sin(\psi_2 - \psi_0)} \frac{dE'}{dt}.$$

Für ein ortsfestes Instrument erhält man mit:

$a = 12, \quad b = 6, \quad h = 110, \quad p = 12000, \quad \varrho = 0.002, \quad dE'/dt = -0.8 \cdot 10^7$
(Nickelstahl) das Resultat: $dg = 3 \cdot 10^{-6}$ pro Grad.

Für ein transportables Instrument mit:

$a = b = 3, \quad h = 30, \quad p = 20.981, \quad \varrho = 0.002, \quad dE'/dt = -20 \cdot 10^7$ (Stahl)
das Resultat: $dg = 0.36 \cdot 10^{-3}$ pro Grad.

Da die Wirkung dem Vorzeichen nach dieselbe ist wie die Längenänderung der Bifilarfäden, so hat man hiermit eine zweite Kompensationswirkung gegen den thermischen Elastizitätseinfluß der Feder, deren Größe man mit gewähltem Durchmesser und Stahlsorte regulieren kann. Man kann diesen Einfluß auch fast = Null machen dadurch, daß man die Fäden bereits in der Grundstellung mit 90° vortordiert befestigt.

Für doppelt so dicke Stahlfäden erhält man die 16fache Wirkung, also für $\varrho = 0.004$ cm: $+5.7 \cdot 10^{-3}$ in g , davon geht wieder ein geringer Betrag ab wegen der notwendigen vergrößerten Torsion der Feder. Dazu wirkt als weitere Kompensation die Längenausdehnung der Bifilarfäden, also

für $\alpha = 6 \cdot 10^{-6}$ zusammen $+6.0 \cdot 10^{-3}$ (Nickelstahl),

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ zusammen $+17.7$ (Stahl).

Man hat somit einen genügend großen Spielraum.

Aus der Veränderung der Steifigkeit der Bifilarfäden wegen Änderung der Biegeelastizität mit der Temperatur folgt die Beziehung:

$$-\frac{dg}{g} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \frac{\varrho^2}{h\sqrt{E}p} \frac{dE}{dt}.$$

Dies gibt mit: $h = 30, \quad p = 20.981, \quad \varrho = 0.002, \quad E = 2 \cdot 10^{12}, \quad dE/dt = -50 \cdot 10^7$ (Stahlfäden) das Resultat: $dg = 0.4 \cdot 10^{-3}$, also gerade soviel wie die Änderung der Torsionselastizität der beiden Bifilarfäden zusammen. Wegen dem Faktor ϱ^2 bei der Biegung gegenüber dem Faktor ϱ^4 bei der Torsion überwiegt bei vergrößertem Fadendurchmesser die letztere stark.

Beachtenswert ist, daß man es hier mit einer dritten Kompensationsmöglichkeit gegenüber dem Temperatureinfluß auf die Feder zu tun hat.

d) Weitere störende Einflüsse. a) Der Einfluß des Luftauftriebs. Ist V das Volumen der durch Balken, Feder, Bifilarfäden und Gewicht P verdrängten Luft und δ ihre spezifische Dichte bei 0° und 760 mm in 45° Breite bezogen auf Wasser von 4° C, so ist bei t° und B die Luftdichte bei absolut trockener Luft

$$\delta = \frac{0,001\,292\,8}{1 + 0,003\,670\,t} \frac{B}{76},$$

$$\frac{d\delta}{dB} = \frac{0,001\,292\,8}{1 + 0,003\,670\,t} \frac{1}{76}.$$

Der Auftrieb = $V \cdot \delta \cdot g$ und die Gewichtsänderung infolge der Auftriebsänderung bei Veränderung um b mm Luftdruck:

$$dP = -Vg b \frac{d\delta}{dB}.$$

Mit

$$dP = \frac{P}{g} dg;$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{V}{P} g \frac{b}{76} \frac{1}{1 + 0,003670 t}$$

(Vorzeichen dg wie S. 347). Für ein ortsfestes Instrument setzen wir: $t = 20^\circ$, $b = 0.1$, $P = 337.981$, $v = 31$, womit sich $dg = 0.143 \cdot 10^{-3}$ ergibt. Bei einer Beobachtungsgenauigkeit von $1 \cdot 10^{-6}$ muß also, wenn man jede rechnerische Reduktion vermeiden will, für die Dauer eines Tages der Luftdruck auf 0.007 mm und die Lufttemperatur auf 2°C konstant gehalten werden.

Für ein transportables Instrument setzen wir:

$$t = 20^\circ, \quad b = 0.1, \quad P = 20.981, \quad v = 2,$$

womit sich $dg = 0.16 \cdot 10^{-3}$ ergibt. Bei Benutzung eines Goldgewichtes können alsdann die normalen täglichen Luftdruckschwankungen unberücksichtigt bleiben.

b) Der Einfluß der mit einer Winkeldrehung verbundenen Änderung des Vertikalabstandes. Ist λ die Länge eines der beiden Bifilarfäden, h der Vertikalabstand der Anknüpfungspunkte dieser Fäden in einer beliebigen Stellung, h_0 dasselbe in Grundstellung, h_{90} dasselbe für $\psi_2 - \psi_0 = 90^\circ$; so ist nach Fig. 7

$$h_0^2 = \lambda^2 - (a_2 - b_2)^2,$$

$$h^2 = \lambda^2 - a_2^2 - b_2^2 + 2 a_2 b_2 \cos(\psi_2 - \psi_0),$$

$$h_{90}^2 = \lambda^2 - a_2^2 - b_2^2;$$

folglich

$$h^2 = h_{90}^2 + 2 a_2 b_2 \cos(\psi_2 - \psi_0),$$

$$h = h_{90} + \frac{a_2 b_2}{h_{90}} \cos(\psi_2 - \psi_0) + \dots$$

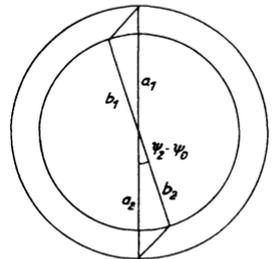


Fig. 7
Änderung des Vertikalabstandes

Die linke Seite der Gleichgewichtsbedingung S. 338 lautet demnach vollständig, wenn wir annehmen, daß $\lambda_1 = \lambda_2$ und $a_1 = a_2 = a/2$, $b_1 = b_2 = b/2$ ist, d. h. völlige Symmetrie herrscht:

$$\frac{a b p}{4 h_{90}} \sin(\psi_2 - \psi_0) - \frac{a^2 b^2 p}{32 h_{90}^3} \sin 2(\psi_2 - \psi_0) + \dots,$$

wobei wir noch zur Abkürzung setzen:

$$\sigma = \frac{a^2 b^2}{32 h_{90}^3}.$$

In der Gegend von 91.8^0 ist somit das Korrektionsglied für das Drehmoment der $(127 h^2/ab)$ -te Teil des Hauptgliedes, z. B. für den Fall 3, S. 361 = $1/12700$. Da wir für ein transportables Instrument noch $dD/D = 1 \cdot 10^{-6}$ in Rechnung setzen müssen, so ist demnach der genannte Betrag theoretisch von Bedeutung.

Damit erhalten wir folgende kleine Veränderungen:

1. in s wird rechts eingefügt das Glied

$$- 2 \sigma p \cos 2 (\psi_2 - \psi_0);$$

2. in allen anderen Gliedern der S. 338/339 ist zu setzen statt $\sin (\psi_2 - \psi_0)$:

$$\sin (\psi_2 - \psi_0) \left\{ 1 - \frac{a b}{4 h_0^2} \cos (\psi_2 - \psi_0) \right\}.$$

In dem praktisch allein durchführbaren Falle, daß eine Empfindlichkeitsskala empirisch hergestellt wird, hat man dadurch die Einwirkung des Gliedes 1 bereits berücksichtigt.

Für die anderen Glieder erreicht die Korrektion 2 nur geringe Beträge, die vernachlässigt werden dürfen. Strenggenommen sind auch die Projektionen der oberen und unteren Verbindungslinien der Fadenenden und die auf die Fäden entfallenden vertikalen Spannungskomponenten Funktionen des Ablenkungswinkels, doch können diese Einflüsse hier außer Betracht bleiben (empirisch bestimmte Empfindlichkeitsskala).

c) Gewichtsverlagerungen der Feder nur für transportables Instrument. Da man das Instrument nicht in genau vertikaler Stellung befördern kann, so wird, obwohl die Endpunkte starr befestigt sind, die Feder sich nicht jedesmal vollkommen gleich einhängen, vor allem, wenn sie nichts zu tragen hat oder wenn sie drückt.

Wir nehmen für $\sin (\psi_2 - \psi_0) = 1$ das bifilare Drehmoment:

$$D = \frac{a b}{4 h} p (1 - \delta^2 + \delta \epsilon),$$

$$d D = - \frac{a b}{4 h} p (2 \delta - \epsilon) d \delta.$$

Zusätzliche maximale vertikale Fadenspannung

$$\frac{p + Q}{2} \delta = Q \frac{e}{b}.$$

Q = Federdruck, $d \delta = 2 \delta$ maximal, da nach links und rechts unkontrollierbar schwankend.

$$\frac{d D}{D} = - \frac{(2 \delta - \epsilon) d \delta}{1 - \delta^2 + \delta \cdot \epsilon}.$$

Dieser Wert muß für das transportable Instrument unter $1 \cdot 10^{-6}$ bleiben.

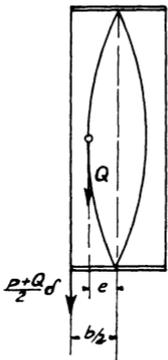


Fig. 8. Gewichtsverlagerung

Mit $Q = 981$, $p = 20.981$, $b = 3$, $e = 0.01$, $\varepsilon = 0$ wird erhalten $\delta = 0.00032$, $dD/D = -0.4 \cdot 10^{-6}$, außerdem können dann, wie man leicht sieht, die Fadenlängen bis zu 1 mm differieren.

Verlagerungen der Feder geht man jedoch so gut wie ganz aus dem Wege, wenn man, wie das auch sonst zweckmäßig ist, die Feder einen Teil der Last tragen läßt.

e) Die Auswahl der Materialien. *A. Feder.* Der Elastizitätsmodul soll möglichst groß sein. Der thermoelastische Koeffizient soll möglichst klein sein. Der Ausdehnungskoeffizient soll möglichst klein sein. Über die in Betracht kommenden Nickelstähle sind untenstehende Veröffentlichungen herangezogen worden*).

Da für das vorliegende Instrument ganz spezielle Anforderungen gestellt werden, die in den Veröffentlichungen nur zum Teil berücksichtigt sind, so ist es nicht gelungen, vollkommen präzise Zahlenangaben zu erhalten. Vor allem hinderlich ist der Umstand, daß die Einflüsse der Temperatur auf den Elastizitätsmodul, die Längen- und Querausdehnung nicht getrennt angegeben werden können.

P. Chevenard nennt deshalb die Gesamtwirkung „apparent“ und gibt für verschiedene Materialien einen Wert für diesen Koeffizienten an.

Es wird gezeigt werden, daß dieser „augenscheinliche“ Koeffizient gerade auch in dem vorliegenden Falle anwendbar ist, so daß es möglich ist, mit experimentell bestimmten Zahlenangaben zu arbeiten.

Obwohl wir also späterhin den „augenscheinlichen“ Koeffizienten benutzen können, ist es doch nützlich, sich über die Größe der Einzelwirkungen im klaren zu sein, ohne damit behaupten zu wollen, daß sie sich superponieren.

Aus der Fig. 9, die anzeigt, wie die Nickelstähle je nach dem Nickelgehalt ihren Elastizitätsmodul ändern, erkennt man, daß z. B. ein Nickelgehalt von 35% das thermische Verhalten Null zeigen soll.

Die Untersuchungen von Guillaume sind jedoch nur durch Chronometer angestellt und es ist gesagt, daß z. B. für die Legierung 0447 in Verbindung mit einer Unruhe aus Messing die Gangänderung Null herauskommt.

Da Messing einen Ausdehnungskoeffizienten von $+18 \cdot 10^{-6}$ hat, so nimmt das Trägheitsmoment der Unruhe mit der Temperatur zu und folglich muß, um zu einer Gangänderung Null zu kommen, der effektive Temperaturkoeffizient des Torsionsmoduls für 0447 positiv sein.

Dies folgt aus der auf eine flache Chronometerspirale angewandten Beziehung S. 340:

$$T = \pi \sqrt{\frac{jl}{JE}}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{E}{j} \frac{dj}{dt}.$$

*) Ch. Guillaume: Recherches Métrologiques sur les aciers au nickel. Paris 1927. P. Chevenard: Recherches experimentales sur les alliages de Fer, de Nickel et de Chrome. Paris 1927.

Wir betrachten bei vorläufiger Ignorierung der Querausdehnung des Federquerschnittes die verschiedenen Möglichkeiten, um zu einer Kompensation zu gelangen.

1. Bei einem Ausdehnungskoeffizienten von $6 \cdot 10^{-6}$ der Feder beträgt die Wirkung in g durchschnittlich $= -6 \cdot 10^{-3}$ (Fall 2, S. 359) pro Grad.

2. Dieser Betrag kann auf verschiedene Weise kompensiert werden: a) mit Bifilarfäden aus Indilatans, Längenausdehnung $= +1 \cdot 10^{-3}$, dazu Torsionsfeder aus Nickelstahl mit $dE/dt = +1 \cdot 10^7$ ($dg = +5 \cdot 10^{-3}$);

b) mit Bifilarfäden aus Stahl, Längenausdehnung $= +12 \cdot 10^{-3}$, dazu Torsionsfeder aus Nickelstahl mit $dE/dt = -1 \cdot 10^7$ ($dg = -5 \cdot 10^{-3}$).

Über $+1 \cdot 10^7$ kann der thermoelastische Koeffizient also nicht liegen, aber darunter.

Es scheinen demnach folgende Legierungen in Frage zu kommen, die alle einen Nickelgehalt von 35–36% haben.

Legierung :	Ni	Cr	Mn	W	C
α) 0447	35.0	7.4	2.1	3.6	0.74
β) 0418	35.2	8.3	2.0	1.6	0.68
γ) 0206	35.2	7.1	2.5	3.6	0.97
δ) 019	36.2	8.1	1.4	3.4	0.45

Es sind im folgenden noch die Eigenschaften zu betrachten, die durch den Gehalt an den verschiedenen Elementen bedingt sind.

a) Beeinflussung der Größe des Elastizitätsmoduls E . 1. Chrom steigert den Modul. Danach kann der in Frage kommende Modul für alle vier Legierungen zu

$$E = 1.74 \cdot 10^{12}$$

angenommen werden.

2. Kohlenstoff verringert den Modul. Angegeben ist nur ein Einfluß von 0.1 bis 0.4% C. Danach verringert sich der Modul bei 35% Ni um $0.14 \cdot 10^{12}$. Da der Kohlenstoffgehalt bei α) bis δ) zwischen 0.97 und 0.45 schwankt, so ist anzunehmen, daß der Modul bei α) bis δ) um $0.2 \cdot 10^{12}$ sinkt.

3. Mangan steigert den Modul. Man findet für 35% Ni und Mn = 2 und 4 $E = 1.54$ und 1.65 , somit für α) bis δ) $E = 1.6 \cdot 10^{12}$.

4. Wolfram erhöht die Elastizitätsgrenze, steigert somit die Härte (Zahlenangaben sind nicht zu finden). Somit sind Stähle mit hohem Wolframgehalt für vorliegenden Fall günstiger als solche mit niederem.

Als besten Wert für E hat man somit anzunehmen $E = 1.6 \cdot 10^{12}$.

b) Beeinflussung der Größe des Schubmoduls E' . Wie weit hier das Gesetz:

$$E' = \frac{\sigma}{2(\sigma + 1)} E$$

gilt, ist nicht erwiesen, jedenfalls gilt es genähert. Nach P. Chevenard würde bei einem Nickelgehalt von 35% $E' = 0.8 \cdot 10^{12}$ sein. Dabei sind jedoch die obengenannten Zusätze nicht berücksichtigt. Man wird daher für α) bis δ) als Wert E' anzunehmen haben

$$\underline{E' = 0.6 \cdot 10^{12}}.$$

c) Thermoelastischer Koeffizient. Derselbe darf zur Erreichung einer Kompensation nicht über $dE'/dt = +1 \cdot 10^7$ betragen, aber darunter. Am geeignetsten erscheint die Legierung Nr. 0447, weniger geeignet wegen des geringen W-Gehalts 0418. Für dE'/dt ist dann ungefähr $1/3 dE/dt$ zu setzen, doch ist dies fraglich.

d) Beeinflussung der Größe des Ausdehnungskoeffizienten.
1. Chrom. Erhöhter Chromzusatz steigert den Ausdehnungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \text{für 35\% Ni und 5\% Cr } \alpha &= 5.3 \cdot 10^{-6}, \\ & \quad 10\% \text{ Cr } \alpha = 7.3 \cdot 10^{-6}, \\ \text{somit für } \alpha) \text{ bis } \delta) \quad \alpha &= 6.3 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

2. Kohlenstoff. Erhöhter Kohlenstoffzusatz steigert den Ausdehnungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \text{für 35\% Ni und 0.2\% C } \alpha &= 1.5 \cdot 10^{-6}, \\ & \quad 0.4\% \text{ C } \alpha = 2.0 \cdot 10^{-6}, \\ \text{somit für } \alpha) \text{ bis } \delta) \quad \alpha &= 3 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

3. Mangan. Erhöhter Manganzusatz steigert den Ausdehnungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \text{für 35\% Ni und 1\% Mn } \alpha &= 2 \cdot 10^{-6}, \\ & \quad 3\% \text{ Mn } \alpha = 3.9 \cdot 10^{-6}, \\ \text{also durchschnittlich } \alpha &= 2 \text{ bis } 3 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

4. Wolfram. Um einen Anhalt zu gewinnen, kann man die Legierungen

$$\begin{aligned} 4207 \text{ heranziehen mit } \alpha &= 6.8 \cdot 10^{-6} \text{ bis } 5\% \text{ Cr,} \\ 4438 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \alpha &= 6.5 \cdot 10^{-6} \quad \text{,,} \quad 5\% \quad \text{,,} \\ 4450 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \alpha &= 7.7 \cdot 10^{-6} \quad \text{,,} \quad 10\% \quad \text{,,} \end{aligned}$$

somit in den Fällen α) bis δ) etwa $\alpha = 7.0 \cdot 10^{-6}$.

Als wahrscheinlichsten Wert für den Ausdehnungskoeffizienten kann man somit annehmen:

$$\underline{6 \cdot 10^{-6} \text{ pro Grad.}}$$

B. Material für die Bifilarfäden. Hierin hat man größere Auswahl. Im Falle, daß bei 0447 sich Längenausdehnung der Feder und thermoelastische Wirkung kompensieren, nimmt man, da Quarzfäden zu zerbrechlich sind, Indilatans mit einem Ausdehnungskoeffizienten von 1.0 bis $1.8 \cdot 10^{-6}$. Bei 0418 werden vielleicht

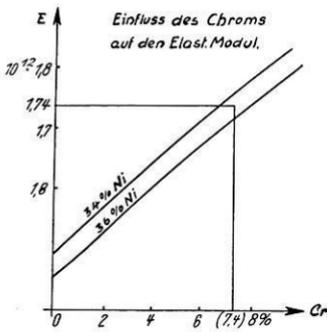


Fig. 9 a

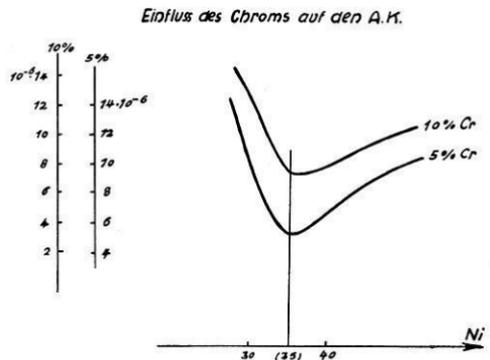


Fig. 9 d

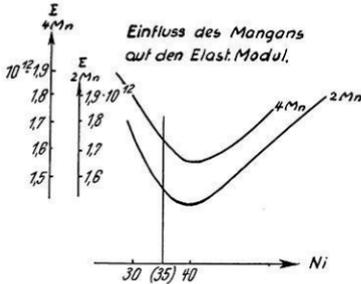


Fig. 9 b

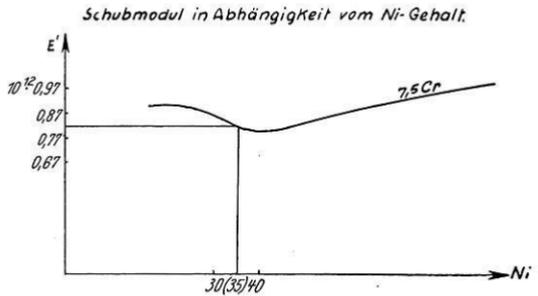


Fig. 9 c

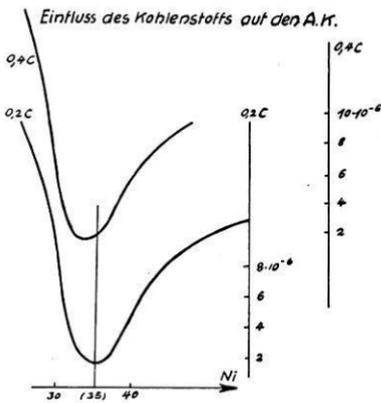


Fig. 9 e

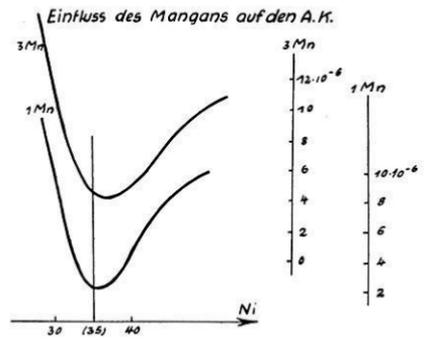


Fig. 9 f

Thermoelastische Wirkung und Ni-Gehalt.

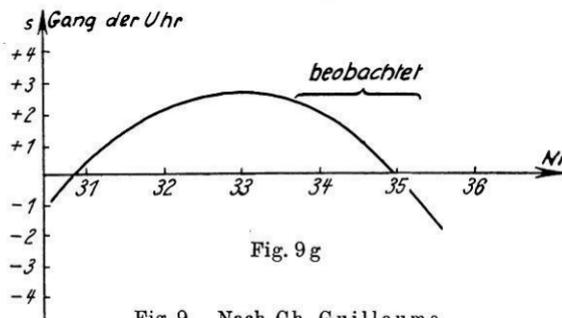


Fig. 9 g

Stahlfäden oder Fäden aus Kruppschem WT 10 Stahl mit Ausdehnungskoeffizienten = $8 \cdot 10^{-6}$ in Frage kommen.

C. *Material für die Querdimensionen.* Hier wäre Quarz am günstigsten, jedoch wegen der unsicheren Befestigungsmöglichkeit (Kitt) und schlechter Definition der Austrittsstelle wird vorgeschlagen Indilatans mit einem Ausdehnungskoeffizienten von $1 \cdot 10^{-6}$ und Befestigung mit Schrauben.

D. *Der „augenscheinliche“ oder effektive thermoelastische Koeffizient.* P. Chevenard, l. c., S. 52, führt, da es zu große Schwierigkeiten mit sich bringt, die Werte dE/dt , dE'/dt und die Wirkung der Längs- und Querdehnung einzeln anzugeben, deren Gesamtwirkung ein, wie diese in ein Torsionspendel eingeht.

Wenn man bei einem Torsionspendel die schwingende träge Masse bei konstanter Temperatur hält, den Torsionsfaden jedoch bei verschiedenen Temperaturen untersucht, so ergibt die resultierende Wirkung den „augenscheinlichen“ Koeffizienten γ nach Chevenard.

Diese Methode hat gegenüber der Beobachtung von Chronometern, für die im übrigen das gleiche gilt, den großen Vorteil, daß man die Änderung des Trägheitsmomentes nicht zu berücksichtigen braucht.

Für Torsionsschwingungen gilt mit j = Massenträgheitsmoment, l = Fadenslänge die bekannte Beziehung:

$$T = \pi \sqrt{\frac{j l}{J' E'}}$$

und daraus folgt durch Differentiierung:

$$\gamma = \frac{dE'/dt}{E'} + \frac{dJ'/dt}{J'} - \frac{dl/dt}{l}.$$

Die Werte γ lassen sich aus dem Verhältnis $-2 dT/T$ experimentell bestimmen, während die einzelnen Glieder, ganz abgesehen von dem Zusammenhang mit molekularen Veränderungen, unbekannt bleiben.

Für den vorliegenden Fall des Gravimeters wird der so bestimmte Koeffizient γ nur dann verwendbar sein, wenn die einzelnen Glieder in genau gleicher Weise eingehen. Dies ist für den in Vergleich gezogenen Fall 2b, S. 360 tatsächlich mit guter Annäherung der Fall, wie man aus dem dortigen Zahlenbeispiel ersieht.

Aus der dortigen Zahlenrechnung folgt:

1. die Wirkung des thermischen Elastizitätskoeffizienten:

$$= -9.8 \cdot 10^{-3}, \quad \text{dies ist} \quad = \frac{dE'/dt}{E'} \cdot g;$$

2. die Wirkung der Längenausdehnung:

$$= -6 \cdot 10^{-3}, \quad \text{dies ist} \quad = -\frac{dl/dt}{l} \cdot g;$$

3. die Wirkung der Querausdehnung (nach S. 348):

$$\text{dies ist} \quad = \sim \frac{dJ'/dt}{J'} \cdot g.$$

Da somit in ein Torsionspendel die in Frage stehenden Koeffizienten in genau derselben Weise eingehen, so kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit dem Instrument auch ohne große Fehler die aus Torsionsschwingungen abgeleiteten Werte γ zugrunde legen.

Die Beobachtung (nach eben genannter Art) eines Torsionspendels $(dT/T)g$ liefert somit das Maß dg , welches dem Einfluß der Änderungen des Elastizitätsmoduls, der Längen- und Querausdehnung zusammen entspricht.

Im folgenden sind, um die Wirkung verschiedener Maßnahmen zu erkennen, verschiedene Beispiele gerechnet worden, welche ermöglichen werden, die günstigste Ausführungsform zu finden.

f) Zahlenmäßige Durchrechnung der Instrumente. Fall 1. *Stationäres Instrument**) zur Registrierung der Sonnen- und Mondwellen. Angenommene Dimensionen (im absoluten Maßsystem):

$$\begin{array}{llll} a = 12, & x_2 = 110, & r_1 = 0.517, & \frac{dE}{dt} = -2.0 \cdot 10^7, \\ b = 6, & \varphi_1 = 500^{**}), & r_2 = 0.455, & \\ h = 110, & \varphi_2 = 517.5, & P = 337.0.981, & \frac{dE'}{dt} = -0.8 \cdot 10^7, \\ l = 260, & J = 6.4 \cdot 10^{-7}, & E = 2 \cdot 10^{12}, & \\ d = 0.06, & \alpha_1 = 6.6^\circ, & E' = 0.8 \cdot 10^{12}, & \text{A. K. } \alpha = 6 \cdot 10^{-6}; \\ x_1 = 30, & \alpha_2 = 24.3^\circ, & & \end{array}$$

1. Last an der Feder:

$$\frac{1}{g^3} (EJ - E'J') \{x_2 \varphi_2^2 - x_1 \varphi_1^2\} = 319\,000,$$

- 2. Drehmoment der Feder = 2 000 (berechnet),
- 3. bifilares Drehmoment = 2 000,
- 4. Last an den Bifilarfäden = 12 000,

*) Die angenommenen Zahlen dürften mit den tatsächlichen Dimensionen von Schweydar nur grob übereinstimmen, da Verfasser keine Gelegenheit hatte, die genauen Dimensionen in Erfahrung zu bringen. Außerdem ist die Berechnung durchgeführt unter Benutzung der Zahlenwerte für oben bezeichneten Spezialnickelstahl für die Feder und einen linearen Ausdehnungskoeffizient von $6 \cdot 10^{-6}$. Professor Schweydar hat gewöhnlichen Stahl benutzt, dessen Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls vielleicht 25mal so groß ist und dessen Ausdehnungskoeffizient ebenfalls größer gewesen sein dürfte.

***) Um die Anzahl der vollen Windungen zu erhalten, ist mit 6.2832 zu dividieren.

5. Temperaturkoeffizient $\frac{dE}{dt}, \frac{dE'}{dt}$:

$$\frac{4ghJ}{Pab \sin(\psi_2 - \psi_0)} = 1.2 \cdot 10^{-8},$$

$$q = -1.24,$$

$$q' = -0.26,$$

$$q'' = +0.33,$$

$$1.2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{dE}{dt} q' + 2 \frac{dE'}{dt} q'' \right) = -0.0008,$$

$$- \frac{g}{P} q J \left(\frac{dE}{dt} - 2 \frac{dE'}{dt} \right) = -0.0094,$$

$$dg = -0.010 \text{ pro Grad.}$$

Es darf also selbst bei Verwendung von Elinvar die tägliche thermische Variation nicht größer sein als einige $\frac{1}{10000}$ Grad Celsius, falls man die Gravitationssonnenwelle mit der Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-6}$ bestimmen will, eine Forderung, die in 200 m Tiefe sicher erfüllbar ist.

6. Längenausdehnung der Feder.

$$- \frac{4ghJ}{abP \sin(\psi_2 - \psi_0)} = -1.2 \cdot 10^{-8},$$

$$\{ \dots \} = -0.27 \cdot 10^{12},$$

$$3g \frac{q}{P} J (E - 2E') = -2.84 \cdot 10^3,$$

$$dg = +1.7 \cdot 10^{-3}.$$

7. Die Längenausdehnung der Bifilarfäden bringt auf jeden Fall eine positive Wirkung hervor, so daß man sieht, daß eine Kompensation erreicht werden kann.

Die Wirkung der Vergrößerung der Drahtdurchmesser ist nicht berechnet, da sie ungeklärt erscheint.

Fall 2a. *Transportables Instrument*. Sehr langer dünner Torsionsfaden mit vielen Windungen.

a) Angenommene Dimensionen:

$$a = 3, \quad d = 0.012, \quad E' = 0.8 \cdot 10^{12},$$

$$b = 3, \quad J = 1 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{dE}{dt} = -2.0 \cdot 10^7,$$

$$h = 29.92, \quad x_1 = 30,$$

$$l = 862, \quad x_2 = 29.92, \quad \frac{dE'}{dt} = -0.8 \cdot 10^7,$$

$$\varphi_1 = 1148. \quad P = p = 20.981,$$

$$\varphi_2 = 1748, \quad E = 2 \cdot 10^{12}, \quad \text{A. K. } \alpha = 6 \cdot 10^{-6}.$$

b) Federdimension:

$$\frac{4h}{ab l^3 p \sin(\psi_2 - \psi_0)} = 1.06 \cdot 10^{-12},$$

$$\text{III} = 2.6 \cdot 10^{21},$$

$$\text{IV} = -1.7 \cdot 10^{21},$$

$$1/J = 0.95 \cdot 10^9.$$

c) Thermoelastischer Koeffizient:

$$\frac{4ghJ}{Pab \sin(\psi_2 - \psi_0)} = 0.67 \cdot 10^{-9},$$

$$q = -8.1 \cdot 10^{-3},$$

$$q' = +0.69,$$

$$q'' = +0.84 \cdot 10^{-3},$$

$$dg = -9.2 \cdot 10^{-3}.$$

d) Längenausdehnung des Torsionsfadens:

$$-\frac{4ghJ}{Pab \sin(\psi_2 - \psi_0)} = -0.67 \cdot 10^{-9},$$

$$\{ \dots \} = 1.4 \cdot 10^{12},$$

$$3g \frac{q}{P} J(E - 2E') = -4.8,$$

$$dg = -5.6 \cdot 10^{-3}.$$

Fall 2b. *Transportables Instrument*. Sehr langer dickerer Torsionsfaden mit vielen Windungen.

a) Angenommene Dimensionen:

$$\begin{array}{lll} a = 3, & \varphi_1 = 1148, & x_1 = 30, \\ b = 3, & \varphi_2 = 1180, & x_2 = 29.92, \\ h = 29.92, & d = 0.026, & P = p = 20.981, \\ l = 862, & J = 2.2 \cdot 10^{-8}, & \text{sonst wie vorher.} \end{array}$$

b) Federdimension:

$$\frac{4h}{ab l^3 P \sin(\psi_2 - \psi_0)} = 1.06 \cdot 10^{-12},$$

$$\text{III} = 1.75 \cdot 10^{21},$$

$$\text{IV} = -1.71 \cdot 10^{21},$$

$$1/J = 0.045 \cdot 10^9.$$

c) Thermoelastischer Koeffizient:

$$\frac{4 g h J}{P a b \sin (\psi_2 - \psi_0)} = 1.46 \cdot 10^{-8},$$

$$q = -3.0 \cdot 10^{-3},$$

$$q' = 0.032,$$

$$q'' = 3.1 \cdot 10^{-5},$$

$$d g = -9.2 \cdot 10^{-3}.$$

d) Längenausdehnung:

$$-\frac{4 g h J}{P a b \sin (\psi_2 - \psi_0)} = -1.46 \cdot 10^{-8},$$

$$\{ \dots \} = +6.4 \cdot 10^{10},$$

$$3 g \frac{q}{P} J (E - 2 E') = 4.0,$$

$$d g = -5.6 \cdot 10^{-3}.$$

Fall 3. *Transportables Instrument.* Wenig gewundener, sehr dünner Torsions faden.

a) Angenommene Dimensionen:

$$a = 3, \quad d = 0.0115, \quad p = 20.981, \quad r_1 = 0.380,$$

$$b = 3, \quad J = 9.1 \cdot 10^{-10}, \quad E = 2 \cdot 10^{12}, \quad \alpha_1 = 65^\circ 10',$$

$$h = 29.92, \quad l = 33, \quad E' = 0.8 \cdot 10^{12}, \quad r_2 = 0.205,$$

$$\varphi_1 = 36.5, \quad x_1 = 30, \quad \frac{dE}{dt} = -2 \cdot 10^7, \quad \alpha_2 = 64^\circ 50',$$

$$\varphi_2 = 68.5, \quad x_2 = 29.92,$$

$$P = 21.981, \quad \frac{dE'}{dt} = -0.8 \cdot 10^7, \quad \text{A.K. } \alpha = 6 \cdot 10^{-6}.$$

b) Federdimension:

$$\frac{4 h}{a b l^3 p \sin (\psi_2 - \psi_0)} = 1.88 \cdot 10^{-8},$$

$$\text{III} = +124 \cdot 10^{15},$$

$$\text{IV} = -66.4 \cdot 10^{15},$$

$$1/J = 1.1 \cdot 10^9.$$

c) Einfluß dE/dt , dE'/dt :

$$\frac{4 g h J}{P a b \sin (\psi_2 - \psi_0)} = 5.7 \cdot 10^{-10},$$

$$q = -2.8,$$

$$q' = 0.18,$$

$$q'' = 0.79,$$

$$d g = -9.8 \cdot 10^{-3}.$$

d) Längenausdehnung der Feder:

$$\begin{aligned}
 -\frac{4ghJ}{Pab \sin(\psi_2 - \psi_0)} &= -5.7 \cdot 10^{-10}, \\
 \{ \dots \} &= +1 \cdot 10^{12}, \\
 3g \frac{q}{P} J(E - 2E') &= -1.5 \cdot 10^2, \\
 dg &= -4.4 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

e) Einfluß der Änderung des Grundabstandes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi_2 x_2}{l^3 P} (EJ - E'J') &= 1.0 \cdot 10^{-3}, \\
 [\dots] &= -726, \\
 \frac{\varphi_1 x_1}{l^3 P} (EJ - E'J') &= 0.54 \cdot 10^{-3}, \\
 [\dots] &= -760, \\
 dg &= -0.3 \cdot 10^{-3} \quad \text{für } \alpha = 1 \cdot 10^{-6} \text{ (Indilatans)}.
 \end{aligned}$$

g) Die elastische Hysterese a) der Bifilarfäden beim Arretieren und Entarretieren. Hierüber kann man theoretisch so gut wie nichts erfahren. Versuche, die mit der normalen Fadenspannung von 10 g bei einem Fadendurchmesser der Bifilarfäden von 0.005 längere Zeit angestellt wurden, haben ergeben, daß nach jedem Arretieren eine kleine Veränderung eintritt. Wenn man jedoch die Beobachtungen so anordnet, daß die Zeiten der Belastung und der Entlastung genau gleich gemacht werden, so hat sich gezeigt, daß der Fehler jedenfalls unter $1 \cdot 10^{-3}$ bleibt.

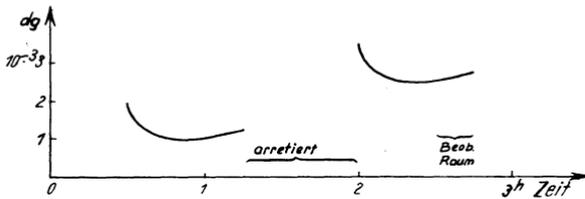


Fig. 10

Elastische Hysterese bei gleichabständigem Arretieren und Entarretieren auf Grund von Beobachtungen des Verfassers

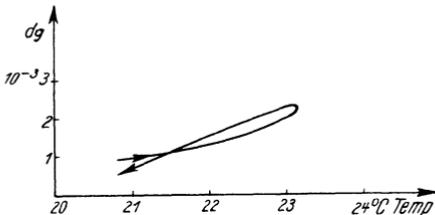


Fig. 11. Elastische Hysterese bei Temperaturumkehr nach Beobachtungen des Verfassers

Die vorstehenden Zahlenrechnungen haben jedoch gezeigt, daß die allgemeinen Verhältnisse nicht ungünstiger werden, wenn man die Hauptlast von den Fäden auf die Feder übernimmt. Dadurch gestaltet sich die Hysterese der Fäden wesentlich günstiger.

b) der Torsionsfeder. Ein günstiger Umstand ist es, daß die Feder in arretiertem und entarretiertem Zustand stets unter demselben Drehmoment steht. Für das Arretieren günstig ist auf jeden Fall die Benutzung einer Feder mit nicht zu wenig Windungen, weil alsdann beim Arretieren keine namhafte Verringerung des Zuges eintritt.

Es bleibt also im wesentlichen als Fehlereinfluß nur das fortwährend andauernde Abfallen der elastischen Kraft übrig. Versuche haben gezeigt, daß bei dem sehr harten Material des Elinvar das dauernde Nachlassen der elastischen Kräfte pro Stunde in Δg unter $1 \cdot 10^{-3}$ gehalten werden kann, falls die Feder einige Zeit unter dem nötigen Drehmoment gestanden hat.

c) durch Temperaturschwankungen. Obwohl hier stets vorausgesetzt wurde, daß nur geringe Temperaturunterschiede zugelassen sein sollen, bedingendoch die kleinen Schwankungen von wenigen Graden ebenfalls elastische Veränderungen.

Am augenfälligsten erkennt man das, wenn man eine Temperaturumkehr herbeiführt. Dann entsprechen gleichen absoluten Temperaturen nicht genau die gleichen Balkenstellungen.

h) Zusammenfassung und Schlußfolgerungen. Aus den im Jahre 1913 durch Professor W. Schweydar angestellten Registrierungen ließen sich im Gegensatz zu Horizontalpendelmessungen nicht alle größeren Wellen, sondern nur die Hauptmondwelle ableiten. Seither sind solche Beobachtungen nicht wieder gemacht worden. Bei Anwendung der seither entdeckten Nickelstähle besteht aber die Aussicht, die früheren Hindernisse aus dem Wege zu räumen und bei gesteigerter Beobachtungsgenauigkeit auch die hauptsächlich interessierenden eintägigen Wellen des Flutpotentials ableiten zu können.

Wenn man einen entsprechend gebauten Apparat als transportables Schwerevariometer benutzen will, so zeigen die vorstehenden Untersuchungen, daß die materiellen Bedingungen zur Zeit hierzu gerade ausreichen. Dabei ist von besonderem Interesse, daß die angewandten Dimensionen in gewissen Grenzen keine bedeutende Rolle spielen. Eine Rolle spielen nur die physikalischen Konstanten und ihre Veränderlichkeit mit der Temperatur, vor allen Dingen die Ausdehnungskoeffizienten und Temperaturkoeffizienten der Elastizitätsmoduli. Diese müssen durch ein besonderes hier angegebenes Verfahren ermittelt werden. Die Zahlenwerte, welche von den letzteren eingeführt worden sind, stellen bei weitem nicht die kleinst erreichbaren dar, so daß es möglich sein wird, in dieser Beziehung die Verhältnisse noch günstiger zu gestalten.

Bemerkenswert für die praktische Anwendung ist, daß der Apparat eine Kompensation der verschiedenen Temperatureinflüsse zuläßt und daß die Anwendung einer Feder kein wesentlich anderes thermisches Verhalten ergibt als ein einfacher tordierter Faden gleichen Materials.

Eine gewisse Erschwerung praktischer Art ergibt sich aus der Tatsache, daß selbst zwei aufeinanderfolgenden Stücken ein und desselben Drahtes nicht mit der notwendigen Präzision dieselben physikalischen Konstanten zukommen, so

daß man immer wieder von vorne anfangen muß, wenn durch Zufall ein endlich als brauchbar gefundenes Drahtstück zerbricht.

Es ist einleuchtend, daß die beschriebene Anordnung auch dazu benutzt werden kann, die absoluten und relativen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls von Metallen zu untersuchen, und zwar innerhalb so kleiner Temperaturintervalle, wie dies bisher meines Wissens niemals geschehen ist.

Nachweis der Lorentzkontraktion. Nach den Versuchen und Berechnungen von L. Courvoisier*) beträgt die kosmische Bewegung unseres Sonnensystems $7.5 \cdot 10^7$ cm/sec mit dem Apex 5 h, 40° .

Die dadurch entstehende periodische Lorentzkontraktion des Erddurchmessers in Richtung der Bewegung von der Periode eines Sterntags würde demnach die Amplitude von rund 10 m haben, die nach Vorstehendem mit mehr als 100facher Genauigkeit meßbar sein müßte.

Diese Versuche müssen jedoch sämtlich in ihrem Ergebnis illusorisch bleiben, weil diese Art von Kontraktion nur eine Folge der Betrachtungsweise ist und die Frage nach scheinbar oder wirklich von einem irdischen Beobachter nicht entschieden werden kann.

Nach der allgemeinen Einsteinschen Relativitätstheorie muß man nämlich folgern, daß nicht bloß eine Längenkontraktion stattfindet, sondern in Verbindung damit die Konstante des Newtonschen Gravitationsgesetzes in Richtung der Bewegung sich um $f \cdot v^2/c^2$ verkleinert und somit die Kontraktionswirkung gerade aufhebt.

In diesem Zusammenhang ist ein Experiment von R. Tomaschek und W. Schaffernicht**) von Interesse (worauf mich bei Einreichung des Manuskripts Prof. Dr. Angenheister aufmerksam machte). Diese benutzten vor kurzem das Gravimeter Perrot-Schmidt zum Nachweis eines etwaigen kosmischen Einflusses im Sinne einer Lorentzkontraktion.

Es hat sich jedoch — wie vorauszusehen war — keinerlei Einfluß dieser Art ergeben. Daß dabei die Meßgenauigkeit gegenüber den Registrierungen von W. Schweydar sogar noch gesteigert werden konnte, berechtigt, wie bereits ausgesprochen, zu der Hoffnung, daß dieses Instrument eine Bereicherung unserer Kenntnisse bezüglich Elastizität des Erdkörpers und Gezeitenverlauf bringen wird.

II. Theorie eines zweiten transportablen Gravimeters

(Schwingsbeobachtungen).

Der im folgenden beschriebene Apparat ist ein Gegenstück zu dem Apparat von Lejay-Holweck, mit welchem bekanntlich bereits praktische Messungen gelungen sind. Während bei diesem nur die Biegeelastizität beansprucht wird, kommt hier nur die Torsionelastizität in Frage. Da die Apparate sonst ihrem Prinzip nach ähnlich sind, so kann auch dieser Apparat als aussichtsreich bezeichnet werden.

Die Methode der Aufhängung eines Magnets an zwei Fäden zum Zwecke der Messung der Komponenten des Erdmagnetismus, die wir zum Vergleich heranziehen, wurde durch C. F. Gauß und Weber eingeführt.

*) L. Courvoisier: Astron. Nachr. **214**, 33; **226**, 241; **230**, 245; **234**, 137; **237**, 337; Phys. Zeitschr. **28**, 674.

) R. Tomaschek und W. Schaffernicht, Astron. Nachr. **244 (1932). Zur gravimetrischen Bestimmung der absoluten Erdbewegung; Nature, July 30, 1932: Tidal oscillations of gravity.

Die Bewegungsgleichung eines solchen Magnets im Erdfelde lautet bekanntlich*):

$$j \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = MH \sin(\delta - \Theta) + \frac{1}{4} \frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \Theta) + \tau(\alpha - \Theta),$$

wo $MH \sin(\delta - \Theta)$ das Kräftepaar der Horizontalintensität, δ die Deklination, Θ das Azimut der Magnetachse und τ die Direktionskraft der Fäden darstellt. Man kann die Gleichung auf drei charakteristische Fälle anwenden: 1. Magnet schwingt in der Nähe des magnetischen Meridians, 2. die Pole sind vertauscht, sonst wie 1. und 3. Magnet schwingt senkrecht zum magnetischen Meridian. Im Falle 1 wird die einfache Schwingungszeit.

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{j}{MH + \tau + \frac{ab}{4h} mg}}$$

Im Falle 2:

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{j}{-MH + \tau + \frac{ab}{4h} mg}}$$

Dem Fall 3 ähnlich ist das zuerst beschriebene labile Bifilargravimeter.

Man erkennt aus Fall 2, daß man T sehr groß machen kann dadurch, daß man den Nenner der Wurzel nahezu = 0 macht. Obwohl wir es hier nicht mit einem Magnet zu tun haben, können wir doch das Prinzip des Falles 2 anwenden dadurch, daß wir das Bifilargehänge durch Drehung um 180° in labiles Gleichgewicht bringen. Der Aufbau soll dabei so stattfinden, daß die oberen und unteren Balkenendpunkte durch sich kreuzende Fäden torsionslos verbunden werden, wobei dafür gesorgt sein muß, daß die Fäden sich nicht berühren. Man kann auch einen dritten in der Mitte angreifenden Faden zu Hilfe nehmen.

Die Gleichgewichtslage stellt sich nun an der Stelle ein, an welchem das Torsionsmoment der Fäden gleich dem bifilaren Drehmoment ist. Ist das erstere in der Stellung $180^\circ = 0$, so ist die Gleichgewichtslage bei 180° , falls man dafür sorgt, daß bei einer kleinen Elongation das entstehende Torsionsmoment ein klein wenig größer ist als das entstehende bifilare Moment. Durch nachträgliches Auflegen von Masse kann man dann die Schwingungszeit so weit steigern, daß das Torsionsmoment im richtigen Verhältnis zum Bifilarmoment steht und somit genügend Empfindlichkeit gegen Schwereänderungen vorhanden ist.

Für die Messung der Schwingungszeit ist alsdann keine so große Genauigkeit erforderlich, wie etwa bei Pendelmessungen, und die Anzahl der nötigen Schwingungen läßt sich ganz beträchtlich herabsetzen. Es genügt demnach ein einfaches Chronometer und eine Meßzeit von etwa 15 Minuten (beschleunigtes Meßverfahren).

* J. C. Maxwell: A treatise on Electricity and Magnetism. 2, 109 (Oxford 1873).

Bezeichnen wir als Nullage diejenige, welche ein bifilar aufgehängter Balken ohne Einwirkung weiterer Kräfte einnimmt, dann ist die um 180° vermehrte Stellung, nämlich die Stellung, bei der ein Bifilarmoment Null vorhanden ist, diejenige Ausgangslage, von welcher aus wir die Elongation Θ rechnen.

Auf unseren Fall angewandt, haben wir dann die Schwingungsgleichung:

$$-j \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \frac{E' J'}{L} (\Theta - \Theta_0) - \frac{a b}{4 h} m g \sin \Theta,$$

mit L = effektiver Fadenlänge, Θ_0 = Lage des unteren Balkens, wenn keine Torsion vorhanden ist, wobei wir im folgenden annehmen, daß Θ_0 klein von II. Ordnung, wenn Θ klein von I. Ordnung ist. Es ist notwendig, Rücksicht zu nehmen auf 1. die Neigung der Verbindungslinie der oberen Befestigungspunkte der Bifilar-

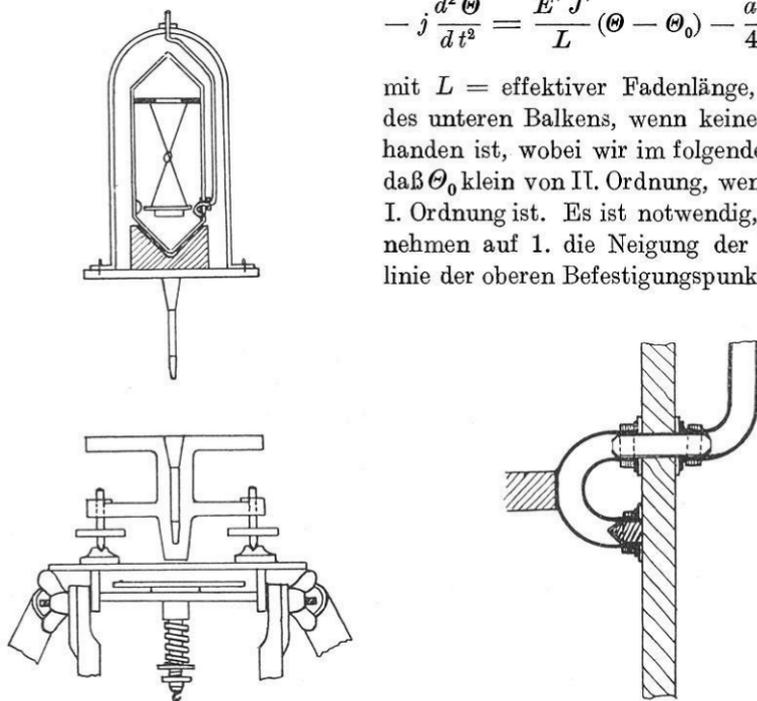


Fig. 12. Labiles Bifilargravimeter

fäden, 2. ungleiche Fadenlänge, 3. unsymmetrische Gewichtsverteilung, 4. die Änderung der vertikalen Abstände infolge der Elongationen.

Alle diese Einflüsse gehen als Korrekturen in die Grundgleichung ein und sind bereits im I. Teil berechnet.

Man erhält deshalb die genauere Schwingungsgleichung:

$$-j \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \frac{E' J'}{L} (\Theta - \Theta_0) - \frac{f_0 f_u}{4 h_{90}} m g \cos \lambda \cos (\lambda + \eta) \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} \sin \Theta + \frac{f_0^2 f_u^2}{32 h_{90}^3} m g \sin 2 \Theta.$$

Das letzte Glied rechts rührt von Punkt 4 her und beträgt mit den angenommenen Zahlen $1/26$ des Hauptgliedes. Die praktische Beobachtung soll so geschehen, daß

stets gleiche Anfangsamplitude und eine gleiche Anzahl von Schwingungen eingehalten werden (relative Messungen).

Wir setzen zur Abkürzung:

$$K_t = \frac{E' J'}{L},$$

$$K_b = \frac{f_0 f_u}{4 h_{90}} m g \cos \lambda \cos (\lambda + \eta) \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta \varepsilon} - \frac{f_0^2 f_u^2}{16 h_{90}^3} m g,$$

und erhalten somit:

$$-j \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = K_t (\Theta - \Theta_0) - K_b \sin \Theta.$$

Wenn (analog S. 339) $\Theta_n =$ Winkel der Gleichgewichtslage eine kleine Größe I. Ordnung, $\vartheta =$ Elongation klein von II. Ordnung, so hat man mit Abschluß bei Größen IV. Ordnung:

$$-j \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = K_t \vartheta - K_b \cos \Theta_n \sin \vartheta$$

und die Schwingungszeit für ∞ kleine Amplitude:

$$T = \pi \sqrt{\frac{j}{K_t - K_b \cos \Theta_n}},$$

$$dT = \frac{T}{2} \frac{K_b}{K_t - K_b \cos \Theta_n} \frac{d \cos \Theta_n}{\cos \Theta_n}.$$

Somit eine $K_b : (K_t - K_b \cos \Theta_n)$ -fache Empfindlichkeit gegenüber einem freischwingenden Pendel gleicher Periode.

Mit den Zahlenwerten: $f_0 = f_u = 2$, $h_0 = L = 6$, $m = 10$, $j = 3$, $d g = \pm 1 \cdot 10^{-3}$, $E' = 0.8 \cdot 10^{12}$, $J' = 1.23 \cdot 10^{-8}$, folgt $K_b = 1635$, $K_t = 1640$, $T = 2.44$ sec, $dT = \pm 4 \cdot 10^{-4}$ sec. Es braucht also in diesem Falle die Schwingungszeit nur auf $\frac{4}{10000}$ sec genau bestimmt zu werden, d. h. es sind etwa 350 einfache Schwingungen (14.2 Minuten) und die Fixierung des Anfangs- und Endpunktes mit ± 0.1 sec notwendig (keine Gangbestimmung).

Der Einfluß einer Neigungsänderung. Es bleibt zu untersuchen, ob die Neigungseinflüsse, die mit einem Ab- und Wiederaufbau verbunden sind, so klein als notwendig gehalten werden können.

Aus der Schwingungszeit folgt:

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{\partial T}{\partial K_b} \frac{\partial K_b}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial T}{\partial K_b} = \frac{T}{2(K_t - K_b)},$$

$$\frac{\partial K_b}{\partial \lambda} = -K_b \sin (2\lambda + \eta),$$

$$dT = -\frac{T}{2} \frac{K_b}{K_t - K_b} \sin (2\lambda + \eta) d\lambda,$$

und für einen zugelassenen Einstellfehler $d\lambda$ der Libelle:

$$2\lambda + \eta = - \frac{2 dT}{T d\lambda} \frac{K_t - K_b}{K_b}.$$

Daraus folgt, daß für $\lambda = 0$ und $d\lambda = 10''$ bei den sonstigen obigen Annahmen für $dT = 4 \cdot 10^{-4}$ sec die Neigung des unteren Balkens $\eta = \pm 1.2^\circ$, oder überhaupt $2\lambda + \eta = \pm 1.2^\circ$ höchstens sein darf, eine Voraussetzung, die praktisch keine besonderen Schwierigkeiten bereitet. In der Ebene senkrecht zur Arbeitslage sind die Anforderungen noch viel geringer. Ist v die Verkürzung wegen Steifigkeit der Fäden, so ist obige Gleichung für dT mit (v/h) zu multiplizieren*).

Der Aufbau des Instrumentes. Da die auftretenden Kräfte außerordentlich klein sind, so muß das Gehänge in einem stark luftverdünnten Raum schwingen, also z. B. in einer Vakuumröhre.

Dabei bereitet die Arretierung einige Schwierigkeiten. Diese kann z. B. dadurch bewerkstelligt werden, daß der Balken durch ein Stück dünnen Gummischlauchs nach Art eines Ventilschlauchs, der sich bei geringem Überdruck aufbläht, gegen eine Feder gedrückt wird, oder wie dies auch Holweck getan hat mittels einer Durchbohrung. Die bei einer vollständigen Entlastung auftretenden elastischen Veränderungen müssen durch einen gleichabständigen Meßvorgang eliminiert werden.

Als Unterbau für die Vakuumröhre kann ein gewöhnlicher Theodolitunterbau benutzt werden, in den die in einem Metallzapfen auslaufende Röhre eingesetzt wird.

Der anfängliche Rotationsantrieb kann dann durch die Feinbewegung des Theodolits geschehen.

Vergleich mit dem Apparat von F. Holweck und P. Lejay**). Dieser beruht auf dem geringen Überschuß des Biegemoments einer vertikal gestellten Blattfeder über das Drehmoment der Schwere. Wie bereits erwähnt, sind die theoretischen Grundlagen des vorliegenden Instrumentes fast dieselben wie bei dem genannten. Günstiger gestaltet sich jedoch der gemachte Vorschlag in zwei Punkten: 1. Es macht weniger Schwierigkeiten, den Wert Θ_0 streng einzuhalten, während dies bei dem Apparat von Lejay-Holweck nicht möglich ist und eine beachtliche Fehlerquelle darstellt. 2. Eine Lamelle ist wegen der notwendigen Größe ungünstiger als ein dünner Faden.

Ungünstiger ist das Hinzukommen von unvermeidlichen kleinen Pendelschwingungen in der Ebene senkrecht zur Balkenachse. Elektrische Störungen müssen ebenso, wie dies Holweck eingeführt hat, ausgeschaltet werden.

$$*) dT = - \left(\frac{v}{h} \right) \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{K_b}{K_t - K_b} \cdot tg \mu \cdot d\mu.$$

***) Nachdem im Mai 1932 Herr F. Holweck-Paris die Güte hatte, mir den von ihm und Herrn P. Lejay konstruierten erfolgreichen Apparat vorzuführen und zu erklären, habe ich mich zur Veröffentlichung des vorgeschlagenen, mir ebenfalls aussichtsreich erscheinenden Apparates entschlossen.

III. Theorie einer Bifilardrehwaage

Bekanntlich beträgt bei der gewöhnlichen Eötvösschen Drehwaage die Direktionskraft des Fadens gegen $0.6 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ und das dynamische Trägheitsmoment gegen 20000 gr cm^2 . Dieselbe Größe der Direktionskraft soll nunmehr durch Differenz größerer Kräfte erreicht werden.

a) Mit dem über das ganze Gehänge ausgedehnten horizontalen Drehmoment

$$S = \int (x g_y - y g_x) dM$$

wird mit Benutzung der Bezeichnungen der vorigen Nummer die Gleichgewichtsbedingung:

$$K_t (\Theta - \Theta_0) = K_b \sin \Theta + S,$$

$$K_t = \frac{E' J'}{L},$$

$$K_b = \frac{a b}{4 h} m g.$$

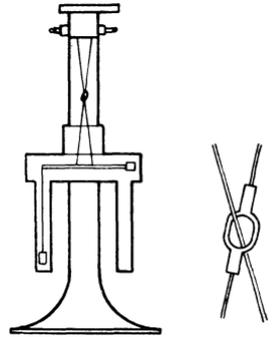


Fig. 13
Bifilardrehwaage

Für zwei aufeinanderfolgende Stationen hat man somit zur Bestimmung der zehn Unbekannten die zehn Gleichungen:

$$K_t (\Theta_i - \Theta_0) = K_b \sin \Theta_i + S_i, \quad i = 1 \text{ bis } 5,$$

$$K_t (\Theta_i - \Theta_0) = K'_b \sin \Theta_i + S_i, \quad i = 6 \text{ bis } 10,$$

die zur Berechnung der acht Potentialgrößen, der torsionslosen Lage Θ_0 und der Schweredifferenz dg ausreichen.

Durch Bevorzugung gewisser Azimute kann man die Auflösung der Gleichungen wesentlich vereinfachen, indem man die Summe dreier Integrale zum Verschwinden bringt und erhält die zwei letzten Größen aus:

$$\Theta_0 = \Theta_m \frac{K_t - K_b}{K_t}, \quad \Theta_m = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{3},$$

$$dg = \frac{\Theta'_m - \Theta_m}{\Theta'_m \Theta_m} \Theta_0 g \frac{K_t}{K_b}, \quad \Theta'_m = \frac{\Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7}{3},$$

während die anderen Größen wie gewöhnlich erhalten werden. Die Gleichgewichtslage wird für kleine Winkel Θ gefunden aus:

$$\Theta_n = \frac{K_t}{K_t - K_b} \Theta_0 + \frac{S}{K_t - K_b},$$

$$d\Theta_n = \frac{K_t}{K_t - K_b} d\Theta_0.$$

$$d\Theta_n = \left\{ \frac{K_b}{K_t - K_b} \Theta_n + \frac{K_b}{(K_t - K_b)^2} S \right\} \frac{dg}{g} + \frac{dS}{K_t - K_b}.$$

Zur Erreichung dieser Möglichkeit und der richtigen Empfindlichkeit müssen natürlich die Abmessungen im richtigen Verhältnis stehen.

Z. B. mit $a = b = 2$, $h = 60$, $m = 80$, $\Theta_0 = 10''$, $dg = 1 \cdot 10^{-3}$ $K_t = 1308.6$ (Dicke eines Fadens ~ 0.023) ergibt sich $\Theta_n = 6.06^\circ$ und $d\Theta = 48''$.

Da die Erreichung der Konstanz von Θ_0 dann besonders schwierig ist, wenn die Fäden dauernd unter Torsion gehalten sind, so ist ein Gelingen eher zu erwarten, wenn man $\Theta_0 = 0$ macht (Torsionsköpfe). Dann muß man für dg jedoch an Stelle der Beobachtung der Veränderungen der Gleichgewichtslage Schwingungszeiten messen und kommt alsdann kaum um ein Auspumpen der Waage herum. Da die Fäden wesentlich dicker gemacht werden müssen als bei der Originalwaage, so ist die Gefahr der zufälligen Veränderung von Θ_0 stark vermindert. Die Messung der Schwingungszeit ist aber bei der langsamen Bewegung ein besonderes Problem. Bezüglich der elastischen Eigenschaften gelten die nämlichen Grundsätze, wie im I. Abschnitt erörtert wurde.

b) Bei Anwendung einer Feder und Gleichgewicht bei $90^\circ + \Theta_n$ (siehe Nr. I) erhält man mit Weglassung von S die Gleichgewichtslage aus:

$$\Theta_n = \frac{K_t}{K_b} \pm \frac{1}{K_b} \sqrt{K_t^2 - 2 K_b K_t \left(A_2 - \frac{\pi}{2}\right) + 2 K_b^2},$$

$$d\Theta_n = \frac{K_t}{K_t - K_b \sin \Theta_n} dA_2,$$

$$d\Theta_n = - \frac{K_b P}{p (K_t - K_b \sin \Theta_n) g} dg.$$

Für gleiche Werte K_b kann also im Falle b) der Wert $K_t / \sin \Theta_n$ mal kleiner gehalten werden als im Falle a), d. h. der Fall b) ist gegenüber Nullpunktänderungen viel günstiger als a).

Luftelektrische und erdmagnetische Begleiterscheinungen von Erdbeben

Von **Hans Robert Scultetus**, Flugwetterwarte Berlin

Bei vielen Erdbeben, in allen Ländern der Erde, wurden gewisse Leuchterscheinungen beobachtet, auch traten gleichzeitig erdmagnetische Störungen auf, sowie zu Zeiten stärkerer seismischer Tätigkeit besondere Blitzformen. Alle diese Umstände deuten darauf hin, daß bei Erdbeben Luftelektrizität und Erdmagnetismus außergewöhnliche Zustandsänderungen erfahren. Zur raschen und nachhaltigen Aufklärung dieser Zusammenhänge und zur Förderung der kosmischen Synopsis wird ein deutsches Ursigramm angeregt.

Gelegentlich verschiedener Erdbeben wurde über eine eigentümliche Lichterscheinung berichtet, die dem Nordlicht ähnlich ist. Deshalb möchte ich sie kurz als „Erdbebenpolarlicht“ bezeichnen, auch wenn sie außerhalb der Polarregionen auftritt.