

Werk

Jahr: 1932

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:8

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0008

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0008

LOG Id: LOG_0070

LOG Titel: Ein Beitrag zum Zweipendelverfahren bei relativen Schweremessungen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ein Beitrag zum Zweipendelverfahren bei relativen Schweremessungen

Von **H. Schmehl**, Potsdam — (Mit 4 Abbildungen)

Die bisherigen Integrationen über den Furtwänglerschen Ausdruck für die momentanen Reduktionen der Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf gemeinsamer Unterlage schwingender Pendel auf starres Stativ beruhen auf Reihenentwicklungen nach Potenzen der Beobachtungszeit [F. A. Vening-Meinesz (1), 99—101; A. Berroth, diese Zeitschr. 1, 89—94, 1924/25; H. Schmehl: ebenda 3, 157—160, 1927]. Diese Reduktionsformeln haben einen beschränkten Gültigkeitsbereich bezüglich der Länge der Beobachtungszeit [P. Dore (1), S. 63]. Unter sehr allgemein gehaltenen Voraussetzungen wird in der vorliegenden Arbeit eine geschlossene Integration des Furtwänglerschen Ausdruckes auf zwei Wegen ausgeführt. Hierbei auftretende Winkelgrößen werden geometrisch gedeutet. Einige Folgerungen und Anwendungen.

Das bei relativen Schweremessungen verwendete Zweipendelverfahren hat bekanntlich den Zweck, das störende Mitschwingen des Pendelstativs möglichst auszuschalten. Schwingen zwei Pendel gleichzeitig auf einem gemeinsamen Stativ in der gleichen Schwingungsebene, so erzeugen die Pendelbewegungen keine Schwingungen des Stativs, wenn die Pendel einander vollkommen gleich sind, wenn sie mit genau gleichen Amplituden und mit einer Phasendifferenz von 180° schwingen.

Diese Voraussetzungen für eine vollständige Elimination des Mitschwingens lassen sich im allgemeinen praktisch nur mit einer gewissen Annäherung erfüllen. Im folgenden soll der verbleibende Einfluß der Elastizität des Pendelstativs auf die Schwingungszeiten der Pendel unter allgemein gehaltenen Voraussetzungen behandelt werden.

Die Bewegungen der beiden Pendel genügen bekanntlich den Differentialgleichungen*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + 2 \kappa_1 \frac{d \psi_1}{dt} + \frac{\pi^2}{T_1^2} \psi_1 &= -\frac{2 \gamma_2}{T_1} \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + 2 \kappa_2 \frac{d \psi_2}{dt} + \frac{\pi^2}{T_2^2} \psi_2 &= -\frac{2 \gamma_1}{T_2} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

Hierin bedeuten:

ψ_1, ψ_2 die Elongationen der beiden Pendel;

κ_1, κ_2 Dämpfungskoeffizienten;

T_1, T_2 die Schwingungszeiten (besser Halbschwingungszeiten) der beiden Pendel bei konstanter mittlerer Amplitude, wenn sie einzeln auf demselben elastischen Stativ schwingen;

γ_1, γ_2 die Vergrößerungen, welche die Schwingungszeiten der Pendel durch das Mitschwingen des Stativs erfahren, wenn sie einzeln auf demselben elastischen Stativ schwingen.

*) Furtwängler (1), S. 245.

Wir bezeichnen weiterhin mit

a_1, a_2 die Amplituden der Pendel;
 φ_1, φ_2 die Phasen der Pendel (von dem positiven Umkehrpunkt gerechnet),
 und setzen zur Abkürzung

$$\frac{a_2}{a_1} = a \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi \quad \frac{T_1 + T_2}{2} = T \dots \dots (2)$$

Nach Furtwängler*) ändern sich während der Schwingungen der beiden Pendel das Amplitudenverhältnis a und der Phasenunterschied φ gemäß den Differentialgleichungen

$$\frac{da}{dt} = -a \left(\kappa_2 - \kappa_1 + \frac{\pi}{T^2} (\gamma_1/a + a \gamma_2) \sin \varphi \right) \dots \dots (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1 + (\gamma_1/a - a \gamma_2) \cos \varphi), \dots \dots (4)$$

während die momentanen Reduktionen der beobachteten Schwingungszeiten der beiden Pendel auf starres Stativ

$$\left. \begin{aligned} & - \gamma_1 - \gamma_2 a \cos \varphi \\ & - \gamma_2 - \gamma_1 \frac{1}{a} \cos \varphi \end{aligned} \right\} (5)$$

sind. Ändern sich während der Beobachtungszeit t die Werte $a \cos \varphi$ und $1/a \cos \varphi$ nur sehr wenig oder so, daß diese Änderungen als proportional der Beobachtungszeit angenommen werden können, so rechnet man mit dem arithmetischen Mittel der Anfangs- und der Endwerte von (5). Um aber die Ausdrücke (5) allgemein praktisch verwerten zu können, müssen sie über die Beobachtungszeit t integriert werden. Die Reduktionen der beobachteten Schwingungszeiten auf starres Stativ sind daher

$$\Delta_1 = - \gamma_1 - \gamma_2 \frac{1}{t} \int_0^t a \cos \varphi dt \dots \dots (6)$$

$$\Delta_2 = - \gamma_2 - \gamma_1 \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{a} \cos \varphi dt \dots \dots (7)$$

Die Werte dieser Integrale lassen sich ermitteln, wenn man die Integranden in Reihen nach steigenden Potenzen der Beobachtungszeit entwickelt, d. h. wenn man setzt

$$a \cos \varphi = (a \cos \varphi)_0 + \left(\frac{d(a \cos \varphi)}{dt} \right)_0 t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2(a \cos \varphi)}{dt^2} \right)_0 t^2 + \dots \dots (8)$$

*) Furtwängler (1), S. 248 und 251.

Man erhält dann

$$\frac{1}{t} \int_0^t a \cos \varphi dt = (a \cos \varphi)_0 + \frac{1}{2!} \left(\frac{d(a \cos \varphi)}{dt} \right)_0 t + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^2(a \cos \varphi)}{dt^2} \right)_0 t^2 + \dots \quad (9)$$

Die Werte der rechts auftretenden Differentialquotienten ergeben sich leicht aus (3) und (4). Auf Grund derartiger Entwicklungen sind F. A. Vening-Meinesz, A. Berroth und H. Schmehl zu praktischen Gebrauchsformeln*) gelangt, indem die Glieder mit den vierten und höheren Potenzen von t vernachlässigt wurden.

P. Dore**) bemerkte zu den von mir abgeleiteten Formeln, daß man nicht a priori einsehen kann, daß die letztgenannte Vernachlässigung allgemein statthaft ist; dieser Bemerkung stimme ich zu. Bei einer näheren Untersuchung dieser Frage habe ich versucht, die Werte der in (6) und (7) auftretenden Integrale ohne Verwendung von Reihenentwicklungen anzugeben. Dabei gelang mir eine Auswertung dieser Integrale in geschlossener Form, die ich hier mitteilen möchte.

Es soll also unsere Aufgabe sein, die Integrale in (6) und (7) ohne jede Vernachlässigung auszuwerten unter der Bedingung, daß die Differentialgleichungen (3) und (4) während der gesamten Beobachtungszeit streng erfüllt werden. Wir benutzen die komplexe Größe (Pendelvektor)

$$p = a e^{i\varphi}, \quad i = \sqrt{-1} \dots \dots \dots (10)$$

die nach Furtwängler***) der Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = i \frac{\pi}{T^2} \gamma_2 \cdot p^2 - \left(\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1) \right) \cdot p - i \frac{\pi}{T^2} \gamma_1 \dots \dots (11)$$

genügt. Diese Gleichung ersetzt die Differentialgleichungen (3) und (4) vollkommen da diese aus der Gleichung (11) durch Zerspalten in deren reelle und imaginäre Bestandteile hervorgehen.

Wir gelangen jetzt schnell zum Ziele, wenn wir den Kunstgriff anwenden, die Gleichung (11) zu differenzieren und sie nach geringer Umformung wieder zu integrieren. Durch Differentiation folgt aus (11)

$$d \frac{dp}{dt} = 2 i \frac{\pi}{T^2} \gamma_2 p dp - \left(\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1) \right) dp \dots \dots (12)$$

oder

$$- \gamma_2 p dt = \left(i \frac{T^2}{2\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) - \frac{1}{2} (T_2 - T_1) \right) dt + i \frac{T^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{dp} d \frac{dp}{dt} \dots \dots (13)$$

*) Vening-Meinesz (1), S. 101; Berroth (1), S. 93; Schmehl (1), S. 160, (2), S. 97, (4), S. 232.

**) Dore (1), S. 63.

***) Furtwängler (1), S. 248.

und hieraus durch Integration

$$-\gamma_2 \frac{1}{t} \int_0^t p dt = i \frac{T^2}{2\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) - \frac{1}{2} (T_2 - T_1) + i \frac{T^2}{2\pi t} \left(\ln \frac{dp}{dt} - \ln \frac{dp}{dt} \Big|_{t=0} \right), \quad (14)$$

worin die rechts stehenden Differentialquotienten unmittelbar durch (11) gegeben sind. Unsere Aufgabe ist hiermit bereits gelöst, denn der reelle Teil der Gleichung (14) ergibt unmittelbar den Wert des gesuchten Integrals in (6).

Bevor wir den Realteil der Gleichung (14) näher untersuchen, leiten wir die Gleichung (14) noch auf eine zweite — zwar näherliegende, aber umständlichere — Art ab. Durch Integration folgt aus (11):

$$\left. \begin{aligned} & (p - p_0) w \cot wt \\ & = i \frac{\pi}{T^2} \gamma_2 \cdot p_0 p - \frac{1}{2} \left(\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1) \right) \cdot (p_0 + p) - i \frac{\pi}{T^2} \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

worin

$$p_0 = p_{t=0} \quad \text{und} \quad w^2 = \frac{\pi^2}{T^4} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{4} \left(\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1) \right)^2 \dots \dots (16)$$

Löst man Gleichung (15) nach p auf, so folgt durch eine zweite Integration:

$$\left. \begin{aligned} & -\gamma_2 \frac{1}{t} \int_0^t p dt = i \frac{T^2}{2\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) - \frac{1}{2} (T_2 - T_1) \\ & -i \frac{T^2}{\pi t} \ln \left[\cos wt - \frac{1}{w} \left(i \frac{\pi}{T^2} \gamma_2 p_0 - \frac{1}{2} (\kappa_2 - \kappa_1 + i \frac{\pi}{T^2} (T_2 - T_1)) \right) \sin wt \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Elimination von wt aus den Gleichungen (15) und (17) ergibt erneut die Gleichung (14). —

Zur Ermittlung des Realteiles der Gleichung (14) benötigen wir im wesentlichen die Imaginärteile I der darin auftretenden Logarithmen. Hierfür ergibt sich sofort aus (11):

$$I \left(\ln \frac{dp}{dt} \right) = i \arctan \frac{\gamma_2 a^2 \cos 2\varphi - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \sin \varphi - (T_2 - T_1) a \cos \varphi - \gamma_1}{-\gamma_2 a^2 \sin 2\varphi - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \cos \varphi + (T_2 - T_1) a \sin \varphi} \quad (18)$$

Die Reduktionsformeln (6) und (7) nehmen hiernach folgende sehr allgemein geltende Form an:

$$\Delta_1 = -\gamma_1 - \frac{T_2 - T_1}{2} + \frac{T^2}{\pi t} \cdot \alpha \dots \dots \dots (19)$$

$$\Delta_2 = -\gamma_2 + \frac{T_2 - T_1}{2} + \frac{T^2}{\pi t} \cdot \alpha' \dots \dots \dots (20)$$

worin

$$\left. \begin{aligned}
 2\alpha &= -\operatorname{arc\,tan} \frac{\gamma_2 a^2 \cos 2\varphi - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \sin \varphi - (T_2 - T_1) a \cos \varphi - \gamma_1}{-\gamma_2 a^2 \sin 2\varphi - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \cos \varphi + (T_2 - T_1) a \sin \varphi} \\
 &+ \operatorname{arc\,tan} \frac{\gamma_2 a_0^2 \cos 2\varphi_0 - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a_0 \sin \varphi_0 - (T_2 - T_1) a_0 \cos \varphi_0 - \gamma_1}{-\gamma_2 a_0^2 \sin 2\varphi_0 - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a_0 \cos \varphi_0 + (T_2 - T_1) a_0 \sin \varphi_0}
 \end{aligned} \right\} (21)$$

und

$$\left. \begin{aligned}
 2\alpha' &= -\operatorname{arc\,tan} \frac{\gamma_1 \cos 2\varphi - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \sin \varphi + (T_2 - T_1) a \cos \varphi - \gamma_2 a^2}{\gamma_1 \sin 2\varphi + \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a \cos \varphi + (T_2 - T_1) a \sin \varphi} \\
 &+ \operatorname{arc\,tan} \frac{\gamma_1 \cos 2\varphi_0 - \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a_0 \sin \varphi_0 + (T_2 - T_1) a_0 \cos \varphi_0 - \gamma_2 a_0^2}{\gamma_1 \sin 2\varphi_0 + \frac{T^2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) a_0 \cos \varphi_0 + (T_2 - T_1) a_0 \sin \varphi_0}
 \end{aligned} \right\} (22)$$

Die Ausdrücke für α und α' lassen sich noch vereinfachen, wenn man in (21) und (22) jeweils zwei Arcus zu einem Arcus zusammenzieht. Wir werden diese Rechnung im nächsten Abschnitt für einen Sonderfall durchführen. — Der Winkelunterschied $\alpha' - \alpha$ stellt die Änderung des Phasenunterschiedes während der Zeit t dar. Denn aus (19) und (20) folgt

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi t}{T^2} ((T_2 - T_1) + (\Delta_1 + \gamma_1) - (\Delta_2 + \gamma_2)),$$

d. h. gemäß (6) und (7)

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi}{T^2} ((T_2 - T_1) t + \int_0^t (\gamma_1/a - a \gamma_2) \cos \varphi \, dt),$$

mithin zufolge (4)

$$\alpha' - \alpha = \varphi - \varphi_0 \dots \dots \dots (23)$$

Die hier abgeleiteten Formeln gelten sehr allgemein, da keinerlei Beziehungen zwischen den in den Ausgangsgleichungen auftretenden Größen $\kappa_1, \kappa_2, T_1, T_2, \gamma_1, \gamma_2$ und keine Bedingungen über die Anfangswerte a_0 und φ_0 vorausgesetzt sind. Bezüglich der Größenordnung gilt die Furtwänglersche Annahme, daß T_1 und T_2 endliche Größen und $\psi_1, \psi_2, \kappa_1, \kappa_2, \gamma_1, \gamma_2, T_2 - T_1$ kleine Größen erster Ordnung sind.

Wir wollen uns etwas näher befassen mit dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, daß die Pendel gleiche Dämpfungskoeffizienten besitzen, und demgemäß

$$\kappa_2 = \kappa_1 \dots \dots \dots (24)$$

voraussetzen. Die Gleichungen (19) und (20) bleiben formal bestehen, nur ist darin z. B. nach (21) zu setzen:

$$2\alpha = \left. \begin{aligned} & - \arctan \frac{\gamma_2 a^2 \cos 2\varphi - (T_2 - T_1) a \cos \varphi - \gamma_1}{-\gamma_2 a^2 \sin 2\varphi + (T_2 - T_1) a \sin \varphi} \\ & + \arctan \frac{\gamma_2 a_0^2 \cos 2\varphi_0 - (T_2 - T_1) a_0 \cos \varphi_0 - \gamma_1}{-\gamma_2 a_0^2 \sin 2\varphi_0 + (T_2 - T_1) a_0 \sin \varphi_0} \end{aligned} \right\} (25)$$

Der rechts stehende Ausdruck läßt sich wesentlich vereinfachen. Durch Zerspalten der Gleichung (15) in ihre reellen und imaginären Bestandteile ergibt sich nämlich unter Beachtung von (24):

$$= - \frac{\pi}{T^2} (a a_0 \gamma_2 \sin(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{2}(T_2 - T_1)(a \sin \varphi + a_0 \sin \varphi_0)) \left. \begin{aligned} & (a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0) w \cot w t \end{aligned} \right\} (26)$$

$$= + \frac{\pi}{T^2} (a a_0 \gamma_2 \cos(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{2}(T_2 - T_1)(a \cos \varphi + a_0 \cos \varphi_0) - \gamma_1) \left. \begin{aligned} & (a \sin \varphi - a_0 \sin \varphi_0) w \cot w t \end{aligned} \right\} (27)$$

Die Elimination von $w t$ aus diesen Gleichungen liefert die Beziehung

$$\gamma_2 (a_0^2 \cdot a \cos \varphi - a^2 \cdot a_0 \cos \varphi_0) + \frac{1}{2} (T_2 - T_1) (a^2 - a_0^2) + \gamma_1 (a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0) = 0, (28)$$

unter deren Berücksichtigung (25) übergeht in

$$2\alpha = 2 \arctan \frac{a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0}{a \sin \varphi + a_0 \sin \varphi_0} \dots \dots \dots (29)$$

mithin ist

$$\tan \alpha = \frac{a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0}{a \sin \varphi + a_0 \sin \varphi_0} \dots \dots \dots (30)$$

und entsprechend

$$\tan \alpha' = \frac{a \cos \varphi_0 - a_0 \cos \varphi}{a \sin \varphi_0 + a_0 \sin \varphi} \dots \dots \dots (31)$$

Die in (19) und (20) auftretenden Winkel α und α' lassen sich also allein aus den am Anfang und am Ende der Beobachtung ermittelten Amplitudenverhältnissen a_0 und a und Phasenunterschieden φ_0 und φ berechnen. Die oben abgeleitete Beziehung (23) folgt aus (30) und (31) unmittelbar.

Die Winkel α und α' besitzen eine einfache geometrische Bedeutung. Der Endpunkt P des Vektors \mathfrak{p} (s. Fig. 1) beschreibt einen Kreisbogen [worauf zuerst Vening-Meinesz*) aufmerksam machte], da Gleichung (28) die Polargleichung eines Kreises darstellt. Ist \mathfrak{p}_0 der Anfangsvektor ($t = 0$), so liegt der Mittelpunkt M dieses Kreises auf der R -Achse im Abstände

$$m = \frac{a^2 - a_0^2}{2(a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0)} \dots \dots \dots (32)$$

*) Vening-Meinesz (2), S. 29 und 31.

von dem Punkte O . Der Radius r des Kreises ist durch

$$r^2 = m^2 + \frac{a_0^2 \cdot a \cos \varphi - a^3 \cdot a_0 \cos \varphi_0}{a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0} \dots \dots \dots (33)$$

gegeben. Der Winkel α ist der Peripheriewinkel über dem Bogen P_0P . Denn es folgt aus Fig. 2 (einseitige Phase) sowie aus Fig. 3 (zweiseitige Phase), wenn

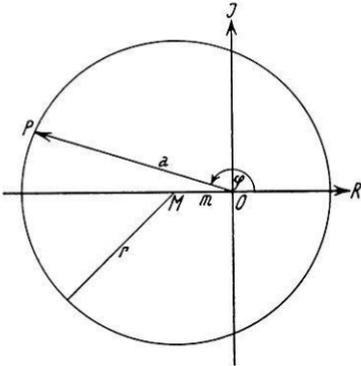


Fig. 1. Der Pendelvektor $p = a \cdot e^{i\varphi}$
(a Amplitudenverhältnis, φ Phasenunterschied)

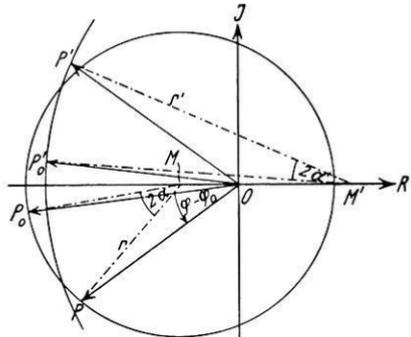


Fig. 4
Bewegung der Pendelvektoren p und p'

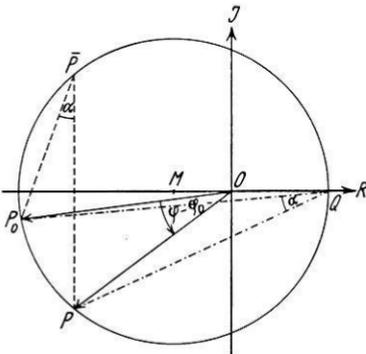


Fig. 2. Einseitige Phase

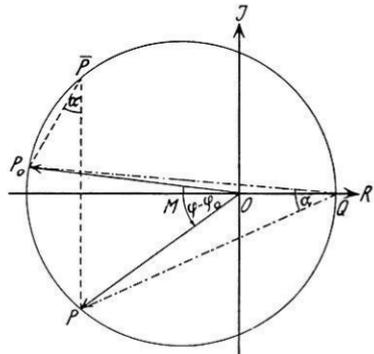


Fig. 3. Zweiseitige Phase

darin \bar{P} den Endpunkt des durch die zu p konjugiert komplexe Größe definierten Vektors \bar{p} bezeichnet, unmittelbar die Gleichung (30). Der Zentriwinkel P_0MP ist daher gleich 2α . Der Winkel α ist positiv — negativ — zu werten, wenn man auf dem Kreise um M von P_0 nach P im Sinne — im entgegengesetzten Sinne — der Uhrzeigerbewegung gelangt.

Werden die zu dem zweiten Pendel gehörenden Vektoren, Punkte, Winkel usw. durch gestrichene Buchstaben bezeichnet, so ist nach Definition zufolge (10)

$$p \cdot p' = 1 \dots \dots \dots (34)$$

Aus dieser Grundgleichung folgt für die gestrichenen und ungestrichenen Größen in Fig. 4 eine Reihe von Beziehungen, die aus der Theorie der Abbildung mittels reziproker Radien bekannt sind. Z. B. gilt

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \dots \dots \dots (35)$$

Auch die Beziehung (23) läßt sich leicht geometrisch nachweisen, wenn beachtet wird, daß zufolge (35) aus Fig. 4 folgt

$$\sphericalangle OP_0M = \sphericalangle OP'_0M' \quad \sphericalangle OPM = \sphericalangle OP'M'.$$

Wir wollen noch eine Darstellung der Winkel α und α' als Funktionen der Anfangswerte α_0, φ_0 und der Zeit t geben, wodurch u. a. eine Vergleichung unserer Ergebnisse mit solchen ermöglicht wird, zu denen man — auf wesentlich umständlicherem Wege — mittels direkter Integration der Ausgangsgleichungen (1) geführt wird*).

Zu diesem Zwecke brauchen wir nur den reellen Teil der Gleichung (17) aufzuschreiben. Mit Beachtung von (24) und (19) erhalten wir hieraus sofort:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\pi}{T^2} \left(-\gamma_2 \alpha_0 \cos \varphi_0 + \frac{T_2 - T_1}{2} \right) \cdot \frac{\tan wt}{w}}{1 + \frac{\pi}{T^2} \gamma_2 \alpha_0 \sin \varphi_0 \cdot \frac{\tan wt}{w}} \dots \dots \dots (36)$$

$$\tan \alpha' = \frac{\frac{\pi}{T^2} \left(-\gamma_1 \frac{1}{\alpha_0} \cos \varphi_0 - \frac{T_2 - T_1}{2} \right) \cdot \frac{\tan wt}{w}}{1 - \frac{\pi}{T^2} \gamma_1 \frac{1}{\alpha_0} \sin \varphi_0 \cdot \frac{\tan wt}{w}} \dots \dots \dots (37)$$

Hierin ist nach (16)

$$w = \frac{\pi}{T^2} \sqrt{\left(\frac{T_2 - T_1}{2}\right)^2 + \gamma_1 \gamma_2} \dots \dots \dots (38)$$

Ist insbesondere zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$)

$$\varphi_0 = \pi, \dots \dots \dots (39)$$

*) Durch die klassischen Abhandlungen von Furtwängler und Vening-Meinesz müssen alle Arbeiten, die das Problem des Mitschwingens mittels direkter Integration der Ausgangsgleichungen (1) behandeln, als überholt gelten.

so nehmen die Gleichungen (36) und (37) die einfache Form

$$\tan \alpha = \frac{\pi}{T_1^2} \left(a_0 \gamma_2 + \frac{T_2 - T_1}{2} \right) \frac{\tan w t}{w} \dots \dots \dots (40)$$

$$\tan \alpha' = \frac{\pi}{T_2^2} \left(\frac{1}{a_0} \gamma_1 - \frac{T_2 - T_1}{2} \right) \frac{\tan w t}{w} \dots \dots \dots (41)$$

an. Für den ganz allgemeinen Fall ($\kappa_2 \neq \kappa_1$) können aus (17) für α und α' leicht entsprechende Werte aufgeschrieben werden.

E. A. Ansel ging bei seinen Untersuchungen von den in unserer Bezeichnungswiese lautenden Differentialgleichungen*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \frac{\pi^2}{T_1^2} \psi_1 &= \frac{2 \gamma_2}{T_1} \cdot \frac{\pi^2}{T_2^2} \psi_2 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + \frac{\pi^2}{T_2^2} \psi_2 &= \frac{2 \gamma_1}{T_2} \cdot \frac{\pi^2}{T_1^2} \psi_1 \end{aligned} \right\} (42)$$

aus. Wenn man von den hierin fehlenden Dämpfungsgliedern absieht, stimmen diese Gleichungen bis auf kleine Größen zweiter Ordnung mit unseren Ausgangsgleichungen (1) überein. Ansel's Rechnungen führten zu folgender Darstellung für die Bewegung der Pendel**):

$$\psi_1 = a_1 \cos \varphi_1 \qquad \varphi_1 = n t + \alpha \dots \dots \dots (43)$$

$$\psi_2 = a_2 \cos \varphi_2 \qquad \varphi_2 = n t + \alpha' + \pi \dots \dots \dots (44)$$

worin

$$n = \pi \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \right)} \dots \dots \dots (45)$$

und für α und α' die Gleichungen (40) und (41) gelten; es wird also die Anfangsbedingung (39) als erfüllt vorausgesetzt.

Es läßt sich jetzt leicht zeigen, daß die Ansel'schen Gleichungen zu Reduktionen Δ_1 und Δ_2 führen, die für den Sonderfall (39) mit den von uns angegebenen Werten (19) und (20) identisch sind. Nach (43) ist die beobachtete Schwingungszeit $T_1^{(b)}$ des ersten Pendels

$$T_1^{(b)} = \frac{\pi t}{n t + \alpha}; \dots \dots \dots (46)$$

bis auf kleine Größen zweiter Ordnung ist nach (45)

$$n = \pi/T \dots \dots \dots (47)$$

so daß

$$T_1^{(b)} = \frac{T}{1 + \frac{T}{\pi t} \alpha} \dots \dots \dots (48)$$

*) Ansel (1), S. 38.

***) Ansel (1), S. 48, Gl. (32), (33) und (38).

oder entsprechend der Genauigkeit, mit der die Gleichungen (40) und (41) gelten:

$$T_1^{(b)} = T - \frac{T^2}{\pi t} \cdot \alpha \dots \dots \dots (49)$$

Also ist

$$\Delta_1 = -\gamma_1 - \frac{T_2 - T_1}{2} + \frac{T^2}{\pi t} \cdot \alpha$$

in vollständiger Übereinstimmung mit (19). Die Gleichung (20) ergibt sich in entsprechender Weise. Die von Ansel am Schlusse seiner Untersuchung gegebene Äußerung*), daß „die Furtwänglerschen Formeln (5) zur Reduktion von Schwingungszeiten wegen des Mitschwingens bei Schweremessungen nur mit Vorsicht benutzt werden dürfen“, ist daher nicht recht verständlich. Denn nach unseren Darlegungen stimmen die von uns aus den Furtwänglerschen Momentanformeln (5) sowie aus den Anselschen Bewegungsgleichungen (43) und (44) abgeleiteten Reduktionen Δ_1 und Δ_2 genau miteinander überein. Wir bemerken noch, daß die Beziehung (23) auch unmittelbar aus den Gleichungen (43) und (44) hervorgeht.

Entwickelt man in (19) α gemäß (36) in eine Reihe nach steigenden Potenzen von t^{**} , so wird man auf die in (9) auftretenden Differentialquotienten

$$\frac{d^\nu (a \cos \varphi)}{dt^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

geführt, deren Werte von mir bis $\nu = 3$ in der Zeitschr. f. Geophys. **3**, 159 (1927) für den Sonderfall $\varphi_0 = \pi$ und $\gamma_2 = \gamma_1$ angegeben wurden. Die von P. Dore aufgeworfene oben angegebene Frage kann durch eine Vergleichung der strengen Formeln (19) und (20) mit den durch (9) abgekürzten Formeln leicht beantwortet werden.

Hinsichtlich der praktischen Verwendung der hier mitgeteilten strengen Formeln (19) und (20) lassen sich die darin auftretenden Winkel α und α' nach unseren Ableitungen entweder als Funktionen der Anfangs- und der Endwerte der Amplitudenquotienten und der Phasenunterschiede oder als Funktionen dieser Anfangswerte und der Zeit t berechnen. Die erste Berechnungsart [z. B. nach den Formeln (30) und (31)] hat zur Bedingung, daß $\varphi_0 + \varphi \neq 2\pi$ sein muß. Die Genauigkeit, mit der sich α und α' nach diesen Formeln bestimmen lassen, ist geometrisch leicht zu beurteilen. Sie hängt nämlich lediglich davon ab, mit welcher Genauigkeit der Kreismittelpunkt M (bzw. M') aus den Vektoren p_0 und p (bzw. p'_0 und p') konstruiert werden kann, d. h. unter welchem Winkel die Mittelsenkrechte der Strecke P_0P die reelle Achse R schneidet. Nehmen wir an, daß dieser Schnitt nicht zu spitz und der Unterschied $a - a_0$ nicht zu klein ist,

*) Ansel (1), S. 52.

***) Auf die Konvergenzbereiche der Tangensreihe und der Arcustangensreihe ist Rücksicht zu nehmen.

so können wir die in (19) und (20) auftretenden Größen $T_2 - T_1, \gamma_1, \gamma_2$ ebenfalls als Funktionen der beobachteten Werte $a_0, \varphi_0, a, \varphi$ bestimmen, wenn $\kappa_2 - \kappa_1$ und das Verhältnis

$$u = \gamma_1 : \gamma_2 \dots \dots \dots (50)$$

als bekannt angenommen werden.

Wir wollen die Gleichung (24) als erfüllt voraussetzen. Weiterhin bemerken wir, daß

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{M_1 s_1}{T_1^3} : \frac{M_2 s_2}{T_2^3} \dots \dots \dots (51)$$

worin M_1, M_2 die Massen der beiden Pendel und s_1, s_2 die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Drehungsachsen bedeuten. $T_2 - T_1, \gamma_1, \gamma_2$ lassen sich aus folgendem Gleichungssystem leicht berechnen:

$$\gamma_1 = u \gamma_2 \dots \dots \dots (52)$$

$$\frac{T_2 - T_1}{2} = v \gamma_2 \dots \dots \dots (53)$$

$$\gamma_2 = k \cdot \frac{T^2}{\pi t} \text{arc cot } k s \dots \dots \dots (54)$$

$$s = \frac{a_0^2 + u}{a_0^2 - a^2} (a \sin \varphi + a_0 \sin \varphi_0) - a_0 \sin \varphi_0 \dots \dots (55)$$

$$v = \frac{a_0^2 + u}{a_0^2 - a^2} (a \cos \varphi - a_0 \cos \varphi_0) + a_0 \cos \varphi_0 \dots \dots (56)$$

$$k^2 = \frac{1}{u + v^2} \dots \dots \dots (57)$$

Hierin wird u gemäß (51) als bekannt angenommen. (53) und (56) folgen aus (28). (54), (55) und (57) ergeben sich aus (26) und (27) durch Elimination von $T_2 - T_1$.

Die nach (53) und (54) bestimmten Werte $T_2 - T_1$ und γ_2 werden im allgemeinen nicht sehr genau sein. Es ist indessen zu beachten, daß praktisch lediglich das Mittel der Reduktionen Δ_1 und Δ_2 verwendet wird; dieses ist aber von dem in der angegebenen Weise berechneten Werte $T_2 - T_1$ ganz unabhängig, denn es ist nach (19), (20), (30) und (31)

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \frac{T^2}{2 \pi t} (\alpha + \alpha') \dots \dots \dots (58)$$

worin

$$\tan (\alpha + \alpha') = \frac{(a_0^2 - a^2) \sin (\varphi_0 + \varphi)}{(a_0^2 + a^2) \cos (\varphi_0 + \varphi) - 2 a_0 a} \dots \dots \dots (59)$$

Die Genauigkeit, mit der man γ_1 und γ_2 nach den obigen Formeln erhält, läßt sich am einfachsten wohl praktisch durch eine Vergleichung mit denjenigen Werten

γ_1 und γ_2 feststellen, die durch besondere Beobachtungen nach dem gewöhnlichen Amplitudenverfahren ermittelt werden. Wie die Gleichungen (6) und (7) zu erkennen geben, geht fernerhin allgemein ein Fehler in der Bestimmung von γ nur mit einem verhältnismäßig kleinen Bruchteil desselben in das Endergebnis ein.

In einer anderen Veröffentlichung werde ich die Verwendung der hier abgeleiteten Formeln an Hand einer größeren Anzahl von Pendelbeobachtungen, die von mir in den letzten Jahren ausgeführt wurden, mit einer Genauigkeitsuntersuchung noch näher erörtern. Zum Schluß sei noch bemerkt, daß sich die in den Gleichungen (53) bis (57) vorkommenden Hilfsgrößen k, s, v auch durch eine geometrische Konstruktion in einfacher Weise ermitteln lassen.

Literatur

Ansel, E. A. (1): Das Mitschwingen als Fehlerquelle bei der Reduktion von Pendelbeobachtungen. Gerlands Beitr. z. Geophys. **25**, 36—52 (1930). [Berichtigung hierzu: ebenda **26**, 92—93 (1930)].

Berroth, A. (1): Schwermessungen mit zwei und vier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingenden Pendeln. Zeitschr. f. Geophys. **1**, 89—94 (1924/25).

Dore, P. (1): Sulla influenza della elasticità del supporto sulla durata di oscillazione di due pendoli simultaneamente oscillanti su di esso. Rend. Accad. naz. Lincei **10**, serie 6, 62—68, Rom 1929.

Furtwängler, Ph. (1): Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **12**, 245—253. Berlin 1902.

Schmehl, H. (1): Über den Einfluß der Elastizität des Pendelstativs auf die Schwingungszeiten zweier gleichzeitig auf demselben Stativ schwingender Pendel. Zeitschr. f. Geophys. **3**, 157—160 (1927).

— (2): Über ein einfaches Koinzidenzverfahren, zwei Schwerkraftpendel mit einer vorgegebenen Phasendifferenz in Bewegung zu setzen. Verh. Balt. Geod. Komm. in Riga 97—100. Helsinki 1928.

— (3): Das Mitschwingen als Fehlerquelle bei der Reduktion von Pendelbeobachtungen. Gerlands Beitr. z. Geophys. **26**, 92 (1930).

— (4): Schwerkraftmessungen. Handb. d. Experimentalphys. **25** (II), 192—242. Leipzig 1931.

Vening-Meinesz, F. A. (1): Bijdragen tot de theorie der slingerwaarnemingen. Amsterdam 1915.

— (2): Observations de pendule dans les Pays-Bas. Publ. de la comm. géod. néerlandaise. Delft 1923.

Potsdam, Geodätisches Institut, den 20. Oktober 1932.