Einfluß der Schneidenlagerung auf die Meßgenauigkeit geophysikalischer Instrumente

Von **G. Schmerwitz**, Jena — (Mit 3 Abbildungen)

Bei Anwendung der Ergebnisse experimenteller Schneidenuntersuchungen auf Minimumpendel zeigt sich, daß infolge der mit jeder Abnutzung der Schneide verbundenen Krümmungsänderung die von dieser Form erwartete Invariabilität nicht besteht. Die von Schneidenkrümmungsschwankungen herrührenden Veränderungen der Schwingungsdauer ergeben sich im allgemeinen etwa 500mal größer als die von der Minimumform korrigierten Beträge. Eine weitere Anwendung wird für schneidengelagerte magnetische Variometer durchgeführt und die Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Schneidenform berechnet.

Im Verlauf von Vorversuchen für die Konstruktion einer hochempfindlichen Waage, die mit einem Horizontalpendel versehen der Bestimmung vertikaler Schweregradienten dienen soll, hat es sich als unumgänglich und notwendig herausgestellt, den Schneideneinflüssen mehr Beachtung zuzuwenden, als bisher geschehen ist. Untersuchungen in dieser Richtung wurden auf einer etwas allgemeineren physikalischen Basis im Frühjahr 1931 in Angriff genommen. Hierbei wurde eine Meßmethode ausgearbeitet, mit der die Schneidenkrümmungsradien, deren Größen bisher nicht sicher bekannt waren, genau gemessen werden konnten. Im Verlauf der Versuche eröffneten sich Möglichkeiten zur Beantwortung verschiedener Fragen nicht nur rein geophysikalischer Natur, die sich zum Teil erst während der Entwicklung der Methode ergeben haben. Hierüber sowie über die Einzelheiten des Meßverfahrens ist in der Zeitschrift für Instrumentenkunde*) ausführlich berichtet worden. Als Ergänzung der Anwendungsmöglichkeiten werden in diesem Zusammenhang im folgenden zwei weitere rein geophysikalische Betrachtungen mitgeteilt.

1. Beurteilung der praktischen Bedeutung der Minimumpendelform. Vor einiger Zeit wurde die in der theoretischen Physik nicht unbekannte Minimumbedingung (siehe z. B. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik, Aufl. 1921, S. 203—204) für ein physikalisches Pendel durch den Bau und die Verwendung eines solchen Pendels in die Praxis übertragen**). Diesem Vorgehen sind sehr bald von anderen Seiten weitere Minimumpendelkonstruktionen gefolgt, entweder mit dem gleichen Ziel, genauere Zeitbestimmungen zu schaffen oder sie für relative g-Bestimmungen zu verwenden. Nach meiner Kenntnis ist bisher noch keine vergleichende Messung zwischen einem gewöhnlichen Pendel (z. B. einem Sterneckpendel) und einem Minimumpendel, bei der beide unter

*) G. Schmerwitz: Messung von Schneidenkrümmungsradien. Zeitschr. f. Instrdke. 1932, 52. Jahrg., S. 1—14.

) M. Schuler: Zeitschr. f. Phys. **42, 547—554 (1927) und weitere Veröffentlichungen auch anderer Autoren.

vollkommen gleichen Bedingungen einander gegenübergestellt sind, veröffentlicht worden.

Die folgenden Überlegungen sollen zeigen, warum bei Verwendung der Minimumform für Pendel, die auf Schneiden gelagert sind, praktisch keine Verbesserung gegenüber der alten Form erwartet werden kann.

Wie bekannt, wird die Minimumbedingung unter Voraussetzung der mathematischen Abstraktion einer unendlich dünnen Linie als Drehachse abgeleitet. Der Schneide wird unberechtigterweise diese Eigenschaft beigelegt, was auch oft in der Gleichsetzung des Begriffes Drehachse mit dem Begriff Schneide zum Ausdruck kommt. Hierin liegt eine Vernachlässigung, die bei einem solchen Instrument gesteigerter Meßgenauigkeit nicht begangen werden darf.

Um diesen Fehler mathematisch zu formulieren, sei die praktisch immer erfüllte Voraussetzung gemacht, daß der Krümmungsradius ϱ der Schneide nicht identisch Null ist.

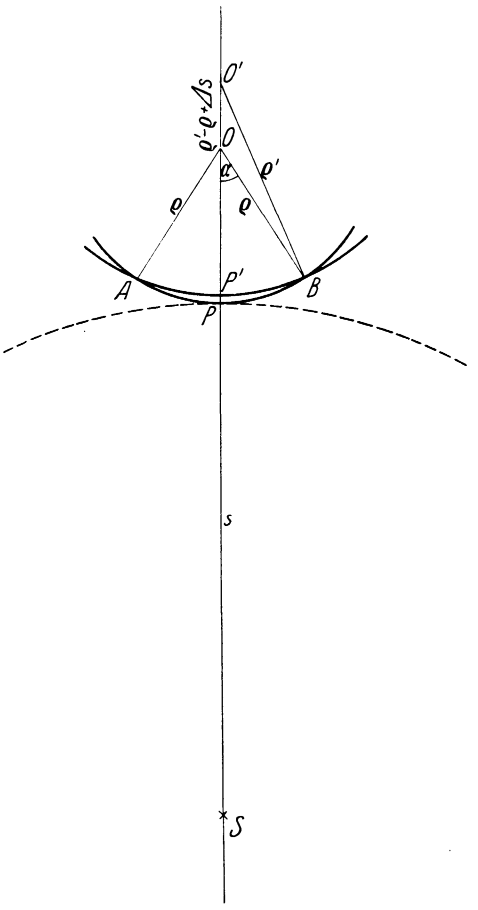

Fig. 1
Seitenansicht eines Pendels (schematisch)

In der Fig. 1, die eine stark vergrößerte Seitenansicht der wesentlichen Teile eines Pendels darstellt, ist der Krümmungsradius der Schneide im ursprünglichen Zustand mit ϱ bezeichnet. P ist der Berührungspunkt mit der Pfanne bei der Amplitude Null. Die Minimumbedingung bewirkt, falls sich die abstrahierte Drehachse durch Abnutzung von P nach P' verschiebt, daß l, die reduzierte Pendellänge und somit T_0, die Schwingungsdauer, unverändert bleibt. Eine kleine Verschiebung $\Delta s = PP'$ bewirkt, wie man leicht nachrechnen kann, in dem Quotienten Trägheitsmoment durch Direktionskraft bei einer Minimumform ohne Rücksicht auf ϱ in erster Näherung keine Veränderung. Zähler und Nenner ändern sich hierbei um gleiche Bruchteile!

Nun schwingt ein Pendel in Wirklichkeit nicht zuerst um eine Drehachse P und nach Abnutzung um eine Achse P', sondern ein jeweiliges Momentanzentrum der Schwingung wandert auf der Zylinderfläche mit dem Radius ϱ um Beträge $\varrho \cdot \varphi$ nach rechts und links von der Lage $\varphi = 0$ an gerechnet ($\varphi_{\max} \sim 1^0$). Hierbei bleibt, wie man auch leicht nachrechnet, das Trägheitsmoment in erster Näherung unabhängig von dem kleinen Winkel φ. Dieses ist ja auf einem Kreis z. B. mit dem Radius s um den Schwerpunkt S konstant! In der Figur gibt der gestrichelt gezeichnete Kreis einen Ort konstanten Trägheitsmomentes an. Das Drehmoment ist jedoch um den Betrag $\varrho \,.\, \varphi \,.\, M \,.\, g$, die Direktionskraft um $\varrho \,.\, M \,.\, g$ größer als bei dem Fall einer reinen Drehung um P. Durch diese Überlegungen kann man schneller und anschaulich zu der von Bessel abgeleiteten genäherten Beziehung kommen:

$$T_\varrho = T_0\left(1 - \frac{\varrho}{2\,s}\right),$$

wo T_ϱ die wirkliche Schwingungsdauer, T_0 die theoretische Grenzschwingungsdauer für $\varrho = 0$ und s den Schwerpunktsabstand von P für $\varphi = 0$ bedeuten.

Tritt nun eine Verlagerung des Drehpunktes durch Abnutzung der Schneide von P nach P' ein, so ist damit ganz automatisch eine Vergrößerung von ϱ verknüpft. Der neue Punkt P' definiert im Verein mit den festen Punkten A und B — den Grenzpunkten, die durch die Abnutzung gerade nicht mehr betroffen werden — einen Kreis von einem Radius $\varrho' > \varrho$. Die Vergrößerung von ϱ ist ihrem Betrag nach nur noch von der maximalen Berührungsbreite der Schneide AB und dem Ausgangsradius ϱ abhängig. Die Beziehung leitet man aus der Figur rein geometrisch ab.

Es ist in dem Dreieck BOO':

$$\varrho'^2 = \varrho'^2 + \varrho^2 + \varDelta s^2 - 2\,\varrho'\varrho - 2\,\varrho\varDelta s + 2\,\varrho'\varDelta s + \varrho^2 + 2\,\varrho'\,\varrho\cos\alpha - 2\,\varrho^2\cos\alpha + 2\,\varrho\varDelta s\cos\alpha,$$

$$2\,\varrho'\,(\varrho - \varDelta s - \varrho\cos\alpha) = 2\,\varrho^2 + \varDelta s^2 - 2\,\varrho\varDelta s - 2\,\varrho^2\cos\alpha + 2\,\varrho\,\varDelta s\cos\alpha,$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\varrho - \varDelta s - \varrho\cos\alpha + \varDelta s\,.\cos\alpha + \dfrac{\varDelta s^2}{2\,\varrho}}{\varrho - \varDelta s - \varrho\,.\cos\alpha} = 1 + \frac{\varDelta s\cos\alpha + \dfrac{\varDelta s^2}{2\,\varrho}}{\varrho - \varDelta s - \varrho\cos\alpha}$$

und da $\varDelta s/\varrho \ll \cos\alpha$:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = 1 + \frac{\varDelta s\cos\alpha}{\varrho\,(1 - \cos\alpha) - \varDelta s}.$$

Hieraus ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit das gesuchte Verhältnis, falls $\varrho' - \varrho = \varDelta\varrho$ gesetzt wird:

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta\varrho} = \frac{1 - \cos\alpha - \dfrac{\varDelta s}{\varrho}}{\cos\alpha} \sim \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\varDelta s}{\varrho}.$$

Von der Größenordnung des Einflusses überzeugt man sich durch Einsetzen folgender Werte: $2\alpha = 10^0$, $\Delta s = 0.01\,\mu$, $\varrho = 5\,\mu$*). Hierbei ist der Wert Δs noch unterhalb der Größenordnung, die bei einem gewöhnlichen Pendel keinen meßbaren Einfluß hervorruft! Man erhält:

$$\frac{\Delta s}{\Delta \varrho} \sim \frac{1}{550}.$$

Die Minimumbedingung macht den Einfluß von Δs zu Null, sie korrigiert aber nicht den zugleich immer auftretenden 550mal größeren Betrag $\Delta \varrho$. Von dem absoluten Betrag der Schwingungsdaueränderung: $\frac{\Delta \varrho}{2s} \cdot T$ wird von dieser, vom Vorzeichen abgesehen, nur ein ohne weiteres zu vernachlässigender Bruchteil erfaßt.

Vergleicht man allgemein den Korrektionswert eines Minimumpendels, für das $s = l/2$ zu setzen ist, also: $\frac{\Delta \varrho}{l} \cdot T$ mit dem eines Sterneckpendels: $\frac{\Delta \varrho}{2l} \cdot T$ (denn $s \sim l$), so sieht man, daß bei etwa gleicher Gesamtlänge diese alten Pendelformen den neuen immer noch um das Doppelte überlegen sein werden.

Bei diesen Ableitungen ist der leichteren Durchführbarkeit und besseren Verständlichkeit wegen der Anfangskrümmungsradius ϱ und der Endradius ϱ' über die ganze Auflagefläche als konstant vorausgesetzt worden. In der Praxis ist das natürlich nicht immer der Fall. Der Radius kann sich über einen gewissen Winkelbereich stetig oder unstetig ändern. Das geht mit Sicherheit schon aus den verschiedenen Meßbeispielen in der Zeitschrift für Instrumentenkunde hervor, wo in der erwähnten Arbeit Abb. 6, S. 6, ein Beispiel für eine sprunghafte Änderung im Mittelteil der Kurve, Abb. 7, S. 7, ein solches für eine stetige Krümmungsänderung an derselben Stelle darstellt. In solchem Fall kann man die Überlegungen auf einen kleineren Bereich beschränken, in dem ϱ nahezu konstant ist, was zur Folge hat, daß bei konstantem Δs das Verhältnis $\Delta \varrho / \Delta s$ noch größer wird.

Das Ergebnis der Betrachtungen bleibt vollkommen unberührt davon, ob der Krümmungsradius ϱ konstant, stetig, unstetig oder, wie im folgenden erst ausgeführt ist, durch Einsenkung in die Pfanne eine scheinbare Vergrößerung erleidet.

Bei allen schneidengelagerten Präzisionsinstrumenten hat — unabhängig davon, welche Krümmungsverteilung die Schneide besitzt — eine geringe Schwankung Δs sowohl der Schneide wie der Pfanne eine um mehrere Zehnerpotenzen größere Änderung $\Delta \varrho$ zur Folge.

Der Ableitung war bisher der Fall zugrunde gelegt, daß der Krümmungsradius ϱ_1 der Pfanne ∞ ist, was im allgemeinen nicht zutrifft, da diese durch

*) l. c., Zeitschr. f. Instrkde. S. 8 und S. 11—12.

Aufsetzen der Schneide konkav deformiert wird. Die Belastung geht bei Pendelschneiden immer bis an die Elastizitätsgrenze und darüber hinaus!*). Somit gilt hier, falls ϱ_1 den Radius der Pfanne an der Aufsatzstelle bedeutet:

$$T_{\varrho, \varrho_1} = T_{0, \infty} \left(1 - \frac{\varrho \cdot \varrho_1}{2(\varrho_1 - \varrho) s}\right).$$

Je nachdem ob beim Desarretieren auf der Pfanne in bezug auf ϱ_1 wieder die alte, eine größere oder kleinere Stelle getroffen wird, können, verglichen mit der vorhergehenden Schwingungsdauer, dieselben, größere oder auch kleinere Werte erhalten werden. Von diesem in beiden Richtungen schwankenden Einfluß ist die immer gleichsinnige Änderung des Schneidenradius durch Abnutzung zu unterscheiden, die eine dauernde Abnahme der Schwingungsdauer zur Folge hat. Auch diese Einflüsse werden von der Minimumbedingung nicht erfaßt.

Der letztgenannte Fall der Schwingungsdauerabnahme, verursacht durch Schneidenabnutzung, tritt besonders bei Beobachtungen, die über Zeiträume von einigen Jahren erstreckt sind, an experimentellen Beispielen der geophysikalischen Literatur gut hervor, wie es auf Grund dieser Ausführungen auch zu erwarten ist.

Auch die bei experimentellen Untersuchungen auftretenden sogenannten „Pendelsprünge" finden durch die erstgenannten Einflüsse eine wahrscheinlich richtigere Erklärung als durch die von einigen Autoren gemachte Annahme einer sprunghaften Kontraktion oder Dilatation des Materials.

Wäre eine derartige Erklärung zutreffend, so müßten schon sämtliche mittelguten physikalischen Waagen bei der Annahme gleich großer sprunghafter Dilatationen Nullpunktsschwankungen über den ganzen Skalenbereich zeigen!

Bezüglich der Minimumform könnte man sich nachträglich auf den Standpunkt stellen, daß durch sie ein Einfluß des ganzen in seiner Fassung locker sitzenden Schneidenkörpers auf die Schwingungsdauer beseitigt werden sollte. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß bei Waagenschneiden eine derartige Störung selbst bei Meßgenauigkeiten von 10^{-8} nicht festgestellt worden ist. Es ergibt sich somit, daß Verschiebungen des Schneidenkörpers gegen sein Lager von weniger als $0.01\,\mu$ sehr unwahrscheinlich sind und Korrektionseinrichtungen selbst für einen größeren Betrag noch als unzweckmäßig angesehen werden müssen.

2. Anwendung auf ein magnetisches Vertikalvariometer. Der Einfluß der inkonstanten Schneidenkrümmung auf die Leistungsgrenze der Hebelwaage ist durch Rechnung und Experiment nachgewiesen worden**). Unter den geophysikalischen Instrumenten sind die magnetischen Lokalvariometer

*) l. c., S. 13/14.

) G. Schmerwitz: Einfluß des Schneidenradius auf die Empfindlichkeit der Hebelwaage. Phys. Zeitschr. **33, Heft 6, S. 234—239 (1932).

im Prinzip nichts anderes als Waagebalken, die außer dem mechanischen Moment auch ein magnetisches besitzen. Vom Standpunkt der Hebelwaage betrachtet, ist solch ein magnetisches Lokalvariometer ein sehr empfindlich eingestellter Waagebalken.

Es ist nachgewiesen worden, daß gerade die Empfindlichkeit eines Waagebalkens sehr von dem Krümmungsradius der Schneide abhängen kann und eine ungleichmäßige Verteilung der Empfindlichkeit über die Skala auf eine Änderung des Krümmungsradius an der jeweiligen Berührungsstelle von Schneide und Pfanne zurückzuführen ist. Daher war es bei sehr empfindlichen magnetischen Vario-

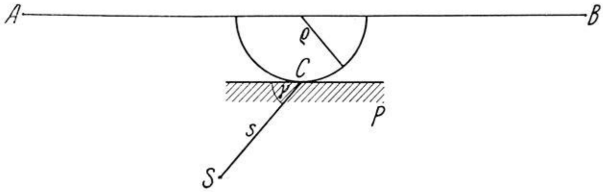

Fig. 2. Magnetische Vertikalwaage in schematischer Darstellung und mit vergrößert gezeichneter Schneide: a) in der horizontalen Ruhelage

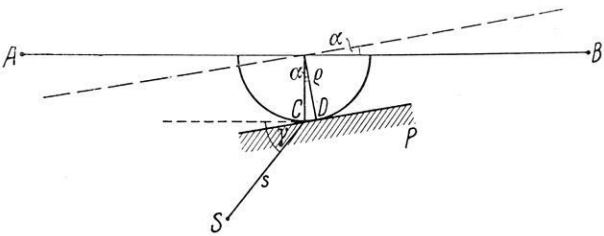

Fig. 3. b) In der Meßlage

metern auch immer angebracht, die Ausschläge vorher in kleinen Intervallen genau so zu eichen, wie es in Fig. 6, S. 238, für einen Hebelwaagebalken geschehen ist. Zur richtigen Deutung einer eventuell sich ergebenden nicht linearen Eichkurve soll im folgenden der Einfluß des Schneidenradius an dem Beispiel einer Vertikalwaage abgeleitet werden.

Ob und wieweit bei den vielen Arretierungen und Desarretierungen einer Feldmessung die Schneide als unverletzbar angesehen werden kann, hängt im wesentlichen von der Sorgfalt des Beobachters und der Güte der Arretierungsvorrichtung ab.

Wäre der Schneidenradius bei jeder Stellung des Balkens konstant, so würde sich sein Vorhandensein nicht bemerkbar machen. Innerhalb des Verwendungsbereiches von 5 bis 10^0 Ausschlag ist der Schneidenradius jedoch selten unter 10%

gleich. Es können Abweichungen bis 50% und darüber auftreten. Um diesen Einfluß zu erfassen, hat man für die Zählung des Schwerpunktsabstandes den an der Schneide fixierten Berührungspunkt in der horizontalen Stellung C (Fig. 2) zu wählen. Der bei einer Schwingung sich verändernde Berührungspunkt D (Fig. 3) wird als Momentanzentrum der Drehung bezeichnet. Die Figuren sind nur schematisch aufzufassen. ϱ stellt nicht die wirkliche Form der Schneide, sondern den Krümmungsradius an der Berührungsstelle dar.

Unter der Voraussetzung einer mathematisch punktförmigen Drehachse findet man in geophysikalischen Lehrbüchern ausführliche Ableitungen der Empfindlichkeit für kleine Ausschläge. Hier sei in den Figuren 2 und 3 bei einem Vertikalvariometer der zunächst konstante Krümmungsradius der Schneide ϱ eingeführt. Dieser ist meist von der gleichen Größenordnung wie der Schwerpunktsabstand s. $A - B$ sei die Achsenrichtung des magnetischen Momentes M, mg = Gewicht des Balkens, S der Schwerpunkt, dessen Abstand s von dem Berührungspunkt in der horizontalen Ruhelage C gezählt wird. γ = Neigungswinkel gegen $A - B$. Die Vertikalintensität sei Z. Dann ist mit Z und α als Veränderlichen bei jeder Intensität Z und Aufstellung senkrecht zum Meridian immer Gleichgewicht vorhanden, wenn:

$$M \,.\, Z \,.\, \cos\alpha = m \,.\, g \,.\, (s \,.\, \cos(\gamma - \alpha) + \varrho \,.\, \alpha)$$

ist. Die Empfindlichkeit findet man hieraus durch Differenzieren:

$$E = \frac{\Delta Z}{\Delta \alpha} = \frac{m \,.\, g}{M}\,(s \,.\, \sin\gamma + \varrho).$$

Ist ϱ nicht konstant, dann ändert sich E in dem Verhältnis:

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\varrho}{s \,.\, \sin\gamma + \varrho}.$$

Der Faktor $(s \,.\, \sin\gamma + \varrho)$ ist bei diesen Instrumenten nur wenige Hundertstel Millimeter groß, also etwa 20 bis 50 μ. Da fast immer lokale Inkonstanzen von ϱ im Betrage zwischen 1 bis 5 μ auftreten, sind somit Unregelmäßigkeiten in der Empfindlichkeit auf Schneiden gelagerter Instrumente, je nach der Güte derselben, zwischen 2 bis 25% durchaus zu erwarten.

Jena, Reichsanstalt für Erdbebenforschung, April und September 1932.