Eine Vorrichtung zur Bestimmung der Geländekorrektion bei Messungen mit Eötvösschen Drehwaagen

Von **W. Haubold,** Göttingen — (Mit 3 Abbildungen)

Es wird eine Vorrichtung beschrieben, die die Auswertungsarbeit des Nahnivellements bei Drehwaagemessungen auf etwa den fünften Teil vermindert. Die Werte der Näherungsfunktionen für die Integrale über Höhe und Entfernung sind dabei direkt abzulesen. Es bleibt dann an Rechenarbeit nur noch die Ausführung der Integration über den Richtungswinkel übrig. Die Vorrichtung besteht aus einem lattenförmigen Gehäuse, an dessen Unterseite sich Tasthebel befinden, deren vertikale Verschiebungen beim Herablassen auf den Erdboden eine einfache Integriervorrichtung betätigen.

Die Eötvösschen Drehwaagen zweiter Art, die in verschiedenen Ausführungsformen bei Untersuchungen des Schwerefeldes zum Aufsuchen nutzbarer Lagerstätten eine ausgedehnte Verwendung gefunden haben, gestatten die Bestimmung von vier Größen, die sich, wie folgt, aus den zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials W aller die Drehwaage umgebenden Massen zusammensetzen:

$$W_{\Delta} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z},$$

$$2\, W_{xy} = 2\, \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y}, \qquad W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial z}.$$

Die ersten beiden Ausdrücke bestimmen die „Krümmungsgrößen", nämlich die g-fache Differenz der beiden Hauptkrümmungen der Potentialfläche und die Richtung ihrer kleinen Hauptkrümmung. Die beiden anderen Größen geben die Schwereänderung in den horizontalen Koordinatenrichtungen x (Nord) und y (Ost) an und bestimmen zusammen den „Gradienten der Schwere", d. h. die maximale Änderung der Schwereintensität in der Niveaufläche nach Richtung und Größe.

In der Praxis interessiert aber nicht die Gesamtwirkung aller Massen, sondern nur die Wirkung der unterirdischen Massenverteilung bis zu einigen Kilometern Tiefe. Um diese zu erhalten, müssen die Wirkungen aller übrigen „störenden" Massen als Korrektionen am Meßresultat angebracht werden.

Die Wirkungen der entfernteren Massen (Gezeitenwirkungen, Wirkung der normalen Gestalt des Erdellipsoids usw.) sind leicht in Rechnung zu setzen, da sie, sofern sie überhaupt berücksichtigt werden müssen, für ein Meßgebiet als konstant angesehen werden können. Sie brauchen also für das ganze Gebiet nur einmal berechnet oder aus Tabellen entnommen zu werden.

Die Wirkung der näher liegenden Massen (Wirkung der topographischen Gestalt der Erdoberfläche in der Umgebung der Drehwaage) dagegen muß für jede Messung besonders ausgeführt werden und erfordert einen erheblichen Aufwand an Zeit und Rechenarbeit neben vielen Höhenmessungen im Gelände; denn die

Ermittlung dieser „Geländewirkung“ oder „Geländekorrektion“, die häufig erheblich größer ist als die gesuchte Wirkung der subterranen Massenverteilung, muß sorgfältig durchgeführt werden, wenn die hohe Meßgenauigkeit der Drehwaagen ausgenutzt werden soll.

Da mit der zunehmenden wirtschaftlichen Bedeutung der geophysikalischen Untersuchungsmethoden ein immer schnelleres Arbeiten verlangt wurde, mußten sowohl Instrumente wie Auswertungsmethoden entsprechend abgeändert werden, um das Arbeitstempo mit den wirtschaftlichen Forderungen in Einklang bringen zu können. Nun nimmt aber die Berechnung der Geländekorrektion den weitaus größten Teil der für die Auswertung der Drehwaagenbeobachtungen erforderlichen Arbeitszeit ein. Es mußte daher versucht werden, auch die Bestimmung der Geländekorrektion durch Verbesserung der Methoden oder durch Hilfsgeräte einfacher zu gestalten.

Mathematisch war eine Vereinfachung der gebräuchlichen Auswertungsformeln kaum noch möglich, ohne die Genauigkeit unter die Grenze der Brauchbarkeit herabzusetzen. Man suchte daher durch Tabellen und graphische Methoden eine Verringerung der Auswertungsarbeit zu erreichen. Doch brachten auch diese Hilfsmittel keine wesentliche Erleichterung, da die Entnahme der vielen Werte aus den Tabellen oder das graphische Auftragen der Profile die an der Berechnung eingesparte Zeit zum größten Teil wieder ausfüllten. Vielfach entschloß man sich daher zu dem gefährlichen Ausweg, die Vermessung des Geländes möglichst einzuschränken und die Rechenarbeit durch die Verminderung der Zahl der auszuwertenden Höhenmessungen zu erleichtern. Ein derartiges Vorgehen geschieht aber stets auf Kosten der Genauigkeit, die oft so weit herabgesetzt wird, daß die Meßresultate eben noch brauchbar sind.

Es gibt aber noch eine Möglichkeit, die Auswertungsarbeit ganz erheblich zu verringern, ohne die Genauigkeit dabei herabzusetzen. Wie weiter unten noch näher gezeigt werden soll, läßt sich nämlich durch Meßgeräte, die gleich bei der Vermessung des Geländes schon die Werte der Integrale über Höhe und Entfernung direkt abzulesen gestatten, die Zahl der Ablesungen im Gelände beträchtlich vermindern und gleichzeitig die Rechenarbeit auf den fünften bis sechsten Teil herabsetzen. Die Genauigkeit wird dabei nicht beeinträchtigt; es läßt sich im Gegenteil eine Erhöhung der Genauigkeit leicht erreichen, da bei der automatisch erfolgenden Berechnung bessere Annäherungsmethoden benutzt werden können, die sonst wegen der zeitraubenden Rechnung nicht angewandt wurden.

Im folgenden soll jetzt das Gebiet in der näheren Umgebung der Drehwaage bis etwa 3 m Entfernung betrachtet werden, das gewöhnlich den größten Anteil an der Geländekorrektion liefert. Zur Vermessung dieses Gebietes wird gewöhnlich nach Einebnung der größten Unregelmäßigkeiten die Erdoberfläche durch Radien von gleichem Winkelabstand und konzentrische Kreise um den Aufstellungspunkt aufgeteilt und in den Schnittpunkten die Höhe h des Geländes über der durch den Aufstellungspunkt gehenden horizontalen Ebene ermittelt. Die Abstände der Kreise müssen dabei in der Nähe der Drehwaage eng gewählt werden und nach außen weiter werden, da die Einwirkung der Geländeunterschiede in etwa 1 m Entfernung vom Aufstellungspunkt am stärksten ist.

Die Messung der Höhen h erfolgt in der Regel durch Auflegen einer etwa 3 m langen Latte auf die Grundplatte der Drehwaage und Ablesen der Abstände h zwischen der horizontierten Latte und dem Erdboden mit Hilfe eines Maßstabes. Aus den abgelesenen Höhen h werden dann die an den Meßergebnissen W_Δ, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} anzubringenden Korrektionen w_Δ, w_{xy}, w_{xz}, w_{yz} berechnet, die bei Einführung zylindrischer Polarkoordinaten h, s, α durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned}
w_\Delta &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -3f \int_0^{2\pi}\int_0^{s}\int_0^{h} \sigma \frac{s^3 \cos 2\alpha}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, d\alpha\, ds\, dh, \\
2 w_{xy} &= 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 3f \int_0^{2\pi}\int_0^{s}\int_0^{h} \sigma \frac{s^3 \sin 2\alpha}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, d\alpha\, ds\, dh, \\
w_{xz} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 3f \int_0^{2\pi}\int_0^{s}\int_0^{h} \sigma \frac{s^2 (H-h) \cos \alpha}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, d\alpha\, ds\, dh, \\
w_{yz} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 3f \int_0^{2\pi}\int_0^{s}\int_0^{h} \sigma \frac{s^2 (H-h) \sin \alpha}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, d\alpha\, ds\, dh
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

w ist hier das Schwerepotential aller störenden Massen, f die Gravitationskonstante, σ die Dichte.

Die Bedeutung der übrigen Größen ist aus Fig. 1 und 2 ersichtlich, in denen O den Aufstellungspunkt der Drehwaage und S den Schwerpunkt des Gehänges bezeichnet. h ist als Funktion von s und α anzusehen.

In den Gleichungen (1) treten die folgenden zwei Integrale über s und h auf, die mit $M(\alpha)$ und $N(\alpha)$ bezeichnet werden mögen, da sie noch Funktionen von α sind. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned}
M(\alpha) &= 3f \int_0^{s}\int_0^{h} \frac{s^3}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, ds\, dh, \\
N(\alpha) &= 3f \int_0^{s}\int_0^{h} \frac{s^2 (H-h)}{\sqrt{s^2+(H-h)^2}^{\,5}}\, ds\, dh
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Zur Ausführung der Integration über h wird in allen gebräuchlichen Auswertungsformeln der Nenner der Gleichungen (2) nach Potenzen des als klein vorausgesetzten Ausdruckes

$$\frac{h^2 - 2hH}{s^2 + H^2}$$

entwickelt und die Entwicklung nach dem ersten Gliede abgebrochen, d. h. man macht die Annahme, daß r durch r_0 ersetzt werden kann (Fig. 2). Unter dieser Voraussetzung nehmen die Integrale (2) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} M(\alpha) &= 3f\int_0^s \frac{s^3 h}{\sqrt{s^2+H^2}^5}\,ds, \\ N(\alpha) &= 3f\int_0^s \frac{s^2 h\left(H-\frac{h}{2}\right)}{\sqrt{s^2+H^2}^5}\,ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Ausführung der Integration über s erfolgt in den einzelnen Auswertungsverfahren auf verschiedene Weise. Da h nur an einzelnen Stellen gemessen ist, sind die Funktionen unter dem Integralzeichen nur durch eine Reihe diskreter Werte gegeben. Um die Integration ausführen zu können, nimmt z. B. Schweydar

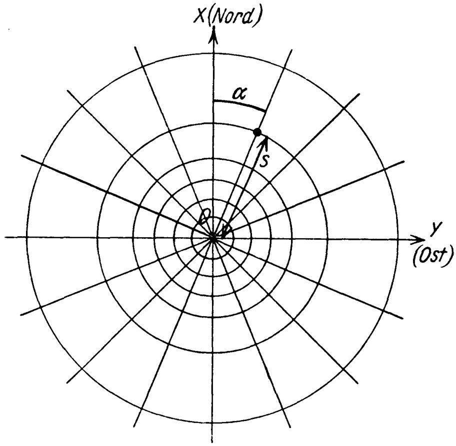

Fig. 1. Geländeeinteilung

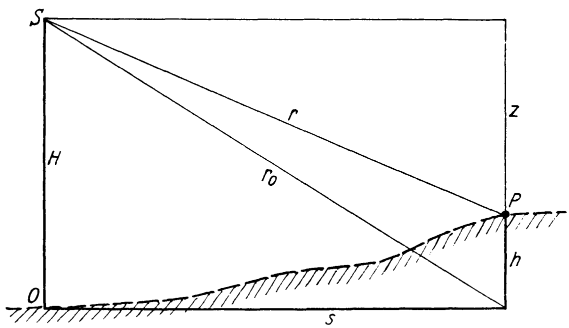

Fig. 2. Vertikalschnitt durch den Aufstellungspunkt O

in seinem ersten Verfahren zwischen je zwei gemessenen Höhen h lineare Änderung der Höhe an, während Ansel die Integrale (3) nach einem Mittelwertverfahren (Tschebyscheff oder Gauß) approximiert. Die Näherungsfunktionen sind aber bei allen Verfahren Summen von linearen oder quadratischen Funktionen der einzelnen h. Die Größen M und N werden also immer in der Form dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} M &= \sum_1^n{}_i\, K_i f(h_i), \\ N &= \sum_1^n{}_i\, G_i\, \varphi(h_i) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wo K_i und G_i nur von der Entfernung s_i abhängige Konstanten sind. In der Praxis haben sich nur die am schnellsten auszuführenden Verfahren durchgesetzt, nämlich die, die nur lineare Funktionen der h verwenden. Die Integration über α wird in allen Verfahren mit Annäherung durch Fouriersche Reihen durchgeführt.

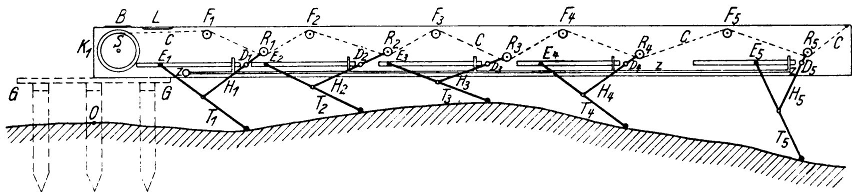

Fig. 3

Vorrichtung zur direkten Ablesung der Werte der Näherungsfunktionen für die Integrale über Höhe und Entfernung bei der Vermessung des Geländes in der Nähe der Drehwaage

Da zur Berechnung der $M(\alpha)$ und $N(\alpha)$ nur die auf einer Richtung liegenden Höhenmessungen benötigt werden, so liegt es nahe, für die Geländevermessung eine Vorrichtung herzustellen, die an Stelle der h gleich die Werte M und N der Integrale (2) bzw. (3) für jede Richtung α im Gelände schon abzulesen gestattet, so daß an Rechenarbeit nur noch die Integration über α auszuführen bleibt, also die Berechnung der Geländekorrektionen aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} w_\Delta &= -\int_0^{2\pi} \sigma M(\alpha)\cos 2\alpha\, d\alpha, & w_{xz} &= \int_0^{2\pi} \sigma N(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha, \\ 2 w_{xy} &= \int_0^{2\pi} \sigma M(\alpha)\sin 2\alpha\, d\alpha, & w_{yz} &= \int_0^{2\pi} \sigma N(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha \end{aligned}\right\} \quad .\ . \quad (5)$$

Eine Ausführungsform der Vorrichtung ist in Fig. 3 schematisch dargestellt. An Stelle der Latte wird bei der Vermessung ein schmales lattenförmiges Gehäuse K_1K_2 benutzt, das auf die Grundplatte GG der Drehwaage aufgesetzt wird und auf verschiedene Weise in horizontaler Lage gehalten werden kann. An der

Unterseite des Gehäuses befinden sich Tasthebel $T_1, T_2, \ldots$, deren freie Enden vertikal und geradlinig geführt werden. Die Tasthebel sind alle gleich lang und ihre oberen Enden $E_1, E_2, \ldots$ laufen in horizontalen Führungsschienen. In der Mitte dieser Tasthebel greifen die Hebel $H_1, H_2, \ldots$ an, die sich mit Armen von der halben Länge der Tasthebel um die in bestimmten Abständen fest am Gehäuse angebrachten Achsen $D_1, D_2, \ldots$ drehen. Die freien Enden dieser Hebel tragen in verschiedenen Abständen von den Drehpunkten $D_1, D_2, \ldots$ an der vorderen und an der hinteren Seite je eine Rolle $R_1, R_2, \ldots$ (In der Abbildung sind der besseren Übersicht halber nur die Rollen an der Vorderseite der Hebel gezeichnet.) Über die vorderen und über die hinteren Rollen läuft je ein Faden (Kette oder Darmseite) C, der von den festen Rollen $F_1, F_2, \ldots$ getragen wird. Das eine Ende jedes Fadens ist am Gehäuse befestigt, das andere Ende ist um je eine Trommel S gewickelt, auf deren Rand eine in Eötvös-Einheiten geeichte Ableseskala aufgetragen ist, die die Werte der Näherungsfunktionen für die Integrale $M(\alpha)$ (Krümmungsgrößen) bzw. $N(\alpha)$ (Gradienten) direkt abzulesen gestattet. Die beiden Trommeln laufen auf einer gemeinsamen Achse, und beide Skalen sind unter dem Fenster B abzulesen. Die Tasthebel werden gemeinsam nach beendeter Ablesung durch eine Zugstange Z angehoben und nach Drehung des Gehäuses in die nächste Richtung wieder herabgelassen. Die Zahl der Tasthebel kann je nach der gewünschten Genauigkeit verschieden angenommen werden. Im allgemeinen sind aber fünf Tasthebel ausreichend.

Bewegt sich der Endpunkt eines Tasthebels vertikal aufwärts, so wird der Hebelarm mit der Rolle R um die feste Achse D abwärts gedreht. Der Faden wird dadurch angezogen und die Trommel S gedreht. Da nun alle Rollen auf ein und denselben Faden wirken, zeigt die Drehung der Trommel die Summe aller Einwirkungen der einzelnen Hebel an. Die Ablesungen an der Trommel S geben also die Werte einer Summe von Funktionen der einzelnen Tasthebelhöhen wieder. Es werden daher Funktionen von der gleichen Form [Gl. (4)] dargestellt, wie sie in allen Auswertungsverfahren für die Annäherung der Integrale $M(\alpha)$ und $N(\alpha)$ benutzt werden. Zur Darstellung der die Summanden bildenden Funktionen der einzelnen h_i stehen bei jedem Tasthebel drei Einstellungsmöglichkeiten zur Verfügung, nämlich: 1. Änderung der Länge des die Rolle tragenden Hebelarmes. 2. Änderung des Winkels dieses Hebelarmes gegen den anderen Arm desselben Hebels. (In der Fig. 3 ist dieser Winkel zu 180^0 angenommen.) 3. Änderung der Fadenführung durch andere Anordnung der festen Rollen.

Die Länge und Richtung der die Rollen R tragenden Hebelarme und die Art der Fadenführung bestimmen sich aus den Konstanten der zugrunde gelegten Näherungsfunktion, die aber nicht mehr eine lineare Funktion der h zu sein braucht, sondern auch eine quadratische oder höhere Funktion sein kann, ohne daß die mechanische Ausführung auf prinzipielle Schwierigkeiten stoßen würde. Es können daher Näherungsfunktionen benutzt werden, durch die eine sehr große Genauigkeit erzielt wird, wie sie durch Rechnung nur unter großem Aufwand an Zeit und Arbeit erreicht werden kann.

Benutzt man z. B. für die Approximation der Integrale über s [Gl. (3)] das Verfahren von Gauß in der von Ansel*) angegebenen Weise, so haben die Näherungsfunktionen für $M(\alpha)$ und $N(\alpha)$ die Form:

$$M = \sum_1^n {}_i B_i h_i, \qquad N = \sum_1^n {}_i C_i \left(h_i H - \frac{h_i^2}{2}\right).$$

Die Konstanten B_i und C_i sind dabei durch die Ausdrücke gegeben:

$$B_i = \frac{3}{2} \pi f R_i s_i^3 \frac{\Delta s}{(s_i^2 + H^2)^{5/2}}, \qquad C_i = \frac{3}{2} \pi f R_i s_i^2 \frac{\Delta s}{(s_i^2 + H^2)^{5/2}},$$

wo Δs die Breite der vermessenen Ringzone um den Aufstellungspunkt ist (hier gleich 3 m, da der innere Radius gleich Null, der äußere gleich 3 m ist) und die R_i die Gewichte der Funktionen unter den Integralzeichen [Gleichung (3)] an den gemessenen Stellen bedeuten. (Bei Benutzung dieser Formeln wird das quadratische Glied in dem Anselschen Ausdruck für N besser vernachlässigt, da für die hier in Frage kommenden kurzen Entfernungen das lineare Glied allein eine bessere Annäherung gibt, oder man muß das zweite noch in der Reihenentwicklung steckende quadratische Glied, das noch von s abhängt, mitberücksichtigen.)

Legt man beim Bau der Vorrichtung dieses Näherungsverfahren zugrunde. so sind Fadenführung und Länge und Richtung der die Rollen R tragenden Hebelarme so zu wählen, daß für M lineare und für N quadratische Funktionen entstehen, deren Konstanten den Werten der B_i und C_i entsprechen müssen. Werden fünf Tasthebel gewählt, so ist in den obigen Gleichungen $n = 5$ zu setzen. Die Abstände der fünf Drehpunkte $D_1 - D_5$ voneinander sind aber jetzt nicht mehr willkürlich; denn bei Benutzung des Gaußschen Verfahrens ist die Verteilung der Achsen $D_1 - D_5$ über die ganze Länge des Gehäuses durch die fünf Wurzeln der Legendreschen Kugelfunktion fünfter Ordnung gegeben. Das Gaußsche Verfahren gibt eine sehr gute Annäherung, da bei fünf an bestimmten Stellen gemessenen Funktionswerten eine ganze rationale Funktion neunten Grades nach dieser Methode noch genau integriert wird.

Eine noch bessere Annäherung erhält man, wenn man nicht, wie in diesem Beispiel geschehen ist, die Integrale (3) zugrunde legt, also die Voraussetzung macht, daß $r = r_0$ gesetzt werden kann (was bei den nahen Entfernungen nur für kleine Werte von h zulässig ist), sondern in den Gleichungen (2) die Integration über h ohne Vernachlässigung durchführt. Die Ausdrücke für M und N werden dadurch etwas komplizierter; aber da die Auswertung automatisch erfolgt, entsteht dadurch keine Belastung der Rechnung. Nur die Rollenanordnung und die Hebellängen der Vorrichtung sind anders.

Bei der üblichen Wahl von 8 bzw. 16 verschiedenen Richtungen α und fünf verschiedenen Entfernungen s würden 40 bzw. 80 Ablesungen der Höhe h mit einem Maßstab nötig sein. Die Berechnung der Integrale (1) aus diesen 40

*) Handb. d. Geophys. **6**, 220.

(bzw. 80) Höhen h wird durch Benutzung der Vorrichtung zurückgeführt auf die Berechnung der Integrale (5) aus 8 (bzw. 16) direkt abgelesenen Wertepaaren M, N. Diese Rechnung ist aber bei Annäherung der Integrale (5) durch Fouriersche Reihen leicht und schnell nach dem bekannten Schema der harmonischen Analyse empirischer Funktionen auszuführen und erfordert nur den fünften bis sechsten Teil der Arbeit, die bisher für die Berechnung der Geländekorrektionen nötig war. Dabei kann die Genauigkeit der Annäherung mit Hilfe der Vorrichtung ohne Vermehrung der Rechenarbeit noch gesteigert werden.

Die mechanische Ausführung der Vorrichtung bietet keine Schwierigkeiten, da die Konstanz der Nullage nur für einige Minuten während der Vermessung eines Aufstellungspunktes verlangt wird. Bei der Vermessung der nächsten Station kann die Nullage ruhig eine andere sein, da in der nachfolgenden Rechnung alle additiven Konstanten herausfallen. Temperatureinwirkungen schaden also nichts, wenn nur während der wenigen Minuten der Messung keine großen Änderungen eintreten.

Göttingen, 5. Oktober 1932.

Laufzeitkurve und Ausbreitung der elastischen Raumwellen im Erdinnern*)

I. Die Geschwindigkeit der *P*- und *S*-Wellen im Mantel

Von **H. Witte**, Kassel — (Mit 5 Abbildungen)

Es werden die Ergebnisse der Berechnungen der Geschwindigkeitsverteilung der Raumwellen mit der Tiefe mitgeteilt, die auf den von H. Jeffreys Januar 1932 veröffentlichten Laufzeiten für die normalen P- und S-Wellen beruhen und nach dem Herglotz-Wiechertschen Verfahren ausgeführt worden sind. Die Kurven verlaufen ziemlich glatt und lassen nur in 900 bis 1000 km und in 2600 bis 2700 km Tiefe Diskontinuitätsflächen vermuten. Gleichzeitig werden die aus dem Geschwindigkeitsverhältnis der Wellen errechneten Werte für die Poissonsche Konstante σ bis zu einer Tiefe von 2700 km angegeben.

§ 1. Januar 1932[1]) hat H. Jeffreys neue Laufzeiten für die P_n- und S_n-Wellen für Herdentfernungen bis zu 107.5^0 bekannt gegeben. Diese unterscheiden sich von den bislang bekannten in charakteristischer Weise. Die Fig. 1 und 2**) zeigen nämlich, daß die neuen Laufzeiten fast durchweg kürzer als die

*) Dieser Vortrag, dessen erster Teil sich mit Untersuchungen von H. Witte befaßte (Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse 1932, S. 199—241), wurde von H. Jung-Göttingen gehalten, das Referat des ersten Teils hat H. Witte selbst übernommen.

**) Diese Abbildungen sowie die folgenden sind der erwähnten, in den Göttinger Nachrichten erschienenen Arbeit: „Beiträge zur Berechnung der Geschwindigkeit der Raumwellen im Erdinnern“ entnommen.