Darstellung einer gebietsweise harmonischen Funktion durch eine harmonische Funktion

Von **F. Hopfner,** Wien

Es werden die Voraussetzungen klargestellt, unter denen die Entwicklung für das äußere Potential ins Masseninnere fortgesetzt werden kann.

Wir denken uns die Erdmasse gegeben; wir verbinden den Erdschwerpunkt mit dem nächstgelegenen Randpunkt. Mit dieser Strecke als Radius beschreiben wir um den Schwerpunkt die Einheitskugel. Mit der Entfernung des weitesten Randpunktes vom Schwerpunkt als Radius R denken wir uns eine zweite Kugel beschrieben, die die Erdmasse einschließt. Schließlich sei zwischen den beiden Kugeln noch eine dritte Kugel vom Radius r gegeben; es soll also $1 \leqq r \leqq R$ sein.

Wir verlegen den Aufpunkt in diese Kugel. Das Potential V' der Erdmasse M in den Punkten der Kugel r ist eine Funktion von r, t ($= \cos \Theta$), φ; die Bedeutung der Winkel ist bekannt. V' ist eine gebietsweise harmonische Funktion; denn die Potentialfunktion ist nur in jenen Punkten der Kugel harmonisch, die im Außenraum der Masse liegen. Sie ist in jedem Punkt eindeutig, endlich und stetig, so daß nach einem bekannten Existenztheorem ihre Werte auf der Kugel r durch die Entwicklung

$$V' = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y'_n$$

nach allgemeinen Kugelfunktionen Y'_n dargestellt werden können. Die Funktionen Y'_n sind explizite Funktionen von t und φ und hängen durch ihre Konstanten implizite auch von r, also vom Radiusvektor des Aufpunktes, ab.

1. Beiderseits der Kugel r denken wir uns je eine Massenschicht von der kleinen, aber konstanten Dicke ε entfernt. Hierdurch entsteht eine massenleere Kugelschale der Dicke $2\,\varepsilon$, die von den Kugeln der Radien $r - \varepsilon$ und $r + \varepsilon$ eingeschlossen wird. Läßt man den Aufpunkt auf der Kugel r wandern, so bleibt er beständig im Außenraum der drei Massen M_1, M_2, M'_2, in die die Masse M durch die massenleere Kugelschale zerlegt wird; M_1 soll im Innenraum der Kugel $r - \varepsilon$ liegen; M_2 und M'_2 liegen alsdann im Außenraum der Kugel $r + \varepsilon$. Das Potential V der drei Massen in den Punkten der Kugel r wird durch die Gleichung

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n^{(1)}}{r^{n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n\, Y_n^{(2)}$$

gegeben. Die Konstanten in den allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n^{(1)}$ sind Funktionen der Massenanordnung in M_1; ebenso sind die Konstanten $Y_n^{(2)}$ Funktionen der Massenanordnung in M_2 und M'_2. Die Funktion V ist daher in dem Gebiet $r - \varepsilon < r < r + \varepsilon$ harmonisch.

Die gliedweise Addition der beiden Reihen führt zu der Gleichung

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{Y_n^{(1)}}{r^{n+1}} + r^n Y_n^{(2)} \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

Man kann sich nämlich den Radius r mit den Konstanten der Kugelfunktionen vereinigt denken; andererseits ist das Potential V auf jeder Kugel im Bereich $r - \varepsilon < r < r + \varepsilon$ in eine Reihe nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar. Hierin findet die zunächst nur formal durchgeführte Rechnung, die zur Gleichung (1) führte, ihre Rechtfertigung.

Die Funktionen Y_n sind explizite Funktionen von t und φ und hängen durch ihre Konstanten implizite auch von r ab. Ändert nämlich der Aufpunkt unter Mitnahme der massenleeren Kugelschale im Bereich $1 \lesseqgtr r \lesseqgtr R$ seine Entfernung r vom Schwerpunkt, so ändern im allgemeinen auch die Konstanten in den Funktionen Y_n ihren Wert einerseits wegen der radialen Verschiebung des Aufpunktes, andererseits wegen der Abänderung der Massen M_1, M_2, M_2'. In der massenleeren Schicht ist V harmonisch; es erfüllt daher im Bereich zwischen den Kugeln $r - \varepsilon$ und $r + \varepsilon$ die Laplacesche Gleichung.

Wir schreiben die Reihe (1) in der Form

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

worin

$$Y_n = Y_n^{(1)} + r^{2n+1} Y_n^{(2)}$$

ist, und beginnen mit der Untersuchung der Funktionen Y_n unter der Voraussetzung, daß die Masse M nur wenig von einer schwach abgeplatteten Kugel abweicht; ihre Abplattung α soll also gegenüber der Einheit eine kleine Größe erster Ordnung sein.

Wir entwickeln die Funktion Y_n im Bereich $1 \lesseqgtr r \lesseqgtr R$ in der Umgebung der Punkte auf der Kugel R nach Potenzen von $r - R$; man bekommt

$$Y_n = F_n^{(0)} + (r - R) F_n^{(1)}.$$

Für $r = R$ ist $Y_n = F_n^{(0)}$; in den Punkten der Kugel R ist somit $F_n^{(0)}$ nur eine Funktion der Massenanordnung in M_1; denn Y_n hängt in jenen Punkten nicht vom Radiusvektor r des Aufpunktes ab. Die Funktion $F_n^{(1)}$ wird durch die Reihe

$$F_n^{(1)} = \left(\frac{\partial Y_n}{\partial r}\right)_R + \left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial r^2}\right)_R (r - R) + \cdots$$

erklärt.

Für $\alpha = 0$ ist $r = R = 1$; Y_n hängt alsdann für einen jeden Wert von $r \geqq 1$ nur von der Massenanordnung ab; also sind auch seine Ableitungen jeder Ordnung nach r identisch Null. Wir schließen daher, daß jede der Ableitungen in der vorangehenden Reihe α zum Faktor hat; denn dann und nur dann verschwindet für $\alpha = 0$ jede dieser Ableitungen identisch.

Man kann somit $F_n^{(1)} = \alpha F_n^{(2)}$ setzen. Andererseits entwickeln wir $F_n^{(0)}$ nach Potenzen der Abplattung. Man erhält hierdurch

$$Y_n = f_n^{(0)} + \alpha f_n^{(1)} + \alpha^2 f_n^{(2)} + \cdots + (r - R)\alpha F_n^{(2)}.$$

Nach den getroffenen Annahmen über die Figur der Masse M ist $r - R$ höchstens von der Ordnung der Abplattung; vernachlässigt man daher, wie in der Geodäsie derzeit üblich, Größen von der Ordnung des Quadrats der Abplattung, so ergibt sich

$$Y_n = f_n^{(0)} + \alpha f_n^{(1)};$$

hierin sind die Funktionen $f_n^{(0)}$ und $f_n^{(1)}$ von r unabhängig.

Zur Untersuchung dieser Funktionen ziehen wir die Laplacesche Gleichung heran, die nach den getroffenen Voraussetzungen von der Reihe

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f_n^{(0)} + \alpha f_n^{(1)}}{r^{n+1}}$$

zumindest bis auf Größen von der Ordnung α^2 für einen jeden Wert der Abplattung erfüllt sein soll. Hierdurch ergeben sich die Forderungen

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \varDelta\left(\frac{f_n^{(0)}}{r^{n+1}}\right) = 0, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varDelta\left(\frac{f_n^{(1)}}{r^{n+1}}\right) = 0;$$

sie führen für $f_n^{(0)}$ und $f_n^{(1)}$ auf die Differentialgleichung der allgemeinen Kugelfunktion.

Die Funktionen $f_n^{(0)}$, $f_n^{(1)}$ sind somit allgemeine Kugelfunktionen; also ist auch $Y_n = f_n^{(0)} + \alpha f_n^{(1)}$ eine allgemeine Kugelfunktion, deren Konstanten nur Funktionen der Massenanordnung sind; sie hängen daher von ε ab. Die Werte der Konstanten ergeben sich durch die Entwicklung des Potentials V der Masse $M_1 + M_2 + M_2'$ im Außenraum der Kugel R.

2. Wir lassen die einschränkende Voraussetzung über die Figur der Masse M vorläufig wieder fallen und vergleichen die Werte der beiden Funktion V' und V auf der Kugel r miteinander. Wir stellen zunächst fest, daß für einen jeden Wert von r im Bereich $1 \leqq r \leqq R$ beständig $V' > V$ ist und V mit stetig abnehmenden Werten von ε beständig zunimmt, ohne jedoch jemals den Wert von V' zu erreichen; denn die Gleichung (1) besteht nur für $\varepsilon > 0$.

Wir erteilen ε einen konstanten Wert. V' und V sind stetige Funktionen von r. Also ist die Differenz $V' - V$ bei konstantem ε entweder eine Konstante oder eine stetige Funktion von r. Für $r = R + \varepsilon$ ist $V' - V = 0$; für $r < R + \varepsilon$ ist $V' - V > 0$. Also ist $V' - V$ eine stetige positive Funktion von r, die in der Umgebung von $r = R + \varepsilon$ mit abnehmendem r zunimmt.

Wir wollen daher fordern, es solle $V' - V$ für $\lim \varepsilon = 0$ gleichmäßig im Bereich $1 \gtreqless r \gtreqless R$ gegen Null konvergieren.

V wird durch die Reihe (1) erklärt; wir fragen daher nach der Konvergenz dieser Reihe für $\lim \varepsilon = 0$. Jeder Wert von V auf der Kugel r konvergiert für

$\lim \varepsilon = 0$ gleichmäßig gegen einen bestimmten endlichen Wert, deren Gesamtheit die Werte der eindeutigen, endlichen und stetigen Funktion V' auf der Kugel r sind. Für einen jeden Wert von $\varepsilon > 0$ ist daher V auf der Kugel r eine eindeutige, endliche und stetige Funktion, deren Werte in einer und nur einer Weise in eine Reihe nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar sind. Also ist die Reihe (1) auch für $\lim \varepsilon = 0$ konvergent.

Wir sind damit zu dem Ergebnis gekommen, daß unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz von V gegen V' für $\lim \varepsilon = 0$ die Werte der gebietsweise harmonischen Funktion V' durch die Werte der harmonischen Funktion V im Bereich $1 \gtreqless r \gtreqless R$ dargestellt werden können.

3. Die Voraussetzung über die gleichmäßige Konvergenz von $V' - V$ gegen Null für $\lim \varepsilon = 0$ kann als erfüllt angesehen werden, wenn in der Masse M die Dichte von außen nach innen hin zunimmt; diese Dichtezunahme kann stellenweise auch unstetig vor sich gehen; wir wollen überdies noch fordern, daß die Dichte erst in größeren Tiefen beträchtlich zunimmt. Die Voraussetzung über die gleichmäßige Konvergenz wird daher um so eher erfüllt sein, wenn wir auch noch unsere Voraussetzung über die Figur der Masse M wieder aufnehmen, also eine kleine Abplattung fordern.

Für $r = R + \varepsilon$ ist $V = V'$ für einen jeden Wert von ε. Weiter konvergiert im Bereich $1 \gtreqless r \gtreqless R$ nach den getroffenen Voraussetzungen über die Masse M gleichmäßig für $\lim \varepsilon = 0$ einerseits V gegen V', andererseits $M_1 + M_2 + M'_2$ gegen M. Zur Darstellung der Funktion V' im Bereich $1 \gtreqless r \gtreqless R$ durch die Funktion V reicht es somit hin, die Kugelfunktionen in der Reihe (2) für V durch Entwicklung von V' nach allgemeinen Kugelfunktionen im Außenraum der Kugel R zu bestimmen, wenn Größen vom Quadrat der Abplattung vernachlässigt werden können.

Wir sind damit zum Endergebnis gekommen: Setzt man die Entwicklung von V' im Außenraum der Kugel R nach allgemeinen Kugelfunktionen bis zur Einheitskugel fort, so gibt diese Reihe auch sehr nahe die Werte des Potentials im Bereich $1 \gtreqless r \gtreqless R$.

4. Die Voraussetzungen über die Figur und Dichteverteilung in der Masse M erfüllt die Erdmasse. Die Fortsetzbarkeit der Reihe für das äußere Potential bis zu den Punkten des Geoids steht daher bei der heuzutage in der Geodäsie geforderten Genauigkeit außer Frage. Übrigens hat man ihre Fortsetzbarkeit bis zur Erdoberfläche hin bisher immer stillschweigend vorausgesetzt; denn alle seit jeher mit Hilfe des Clairautschen Theorems berechneten Abplattungswerte, sei es daß diesen nach Bouguer, Faye oder nach isostatischen Gesichtspunkten reduzierte Schwerkraftwerte zugrunde lagen, beruhen auf dieser Voraussetzung. Es würden sich unmögliche Abplattungswerte eingestellt haben, wenn die Voraussetzung nicht sehr nahe erfüllt gewesen wäre.

Die Fortsetzbarkeit der Reihe bis in die Erdmasse hinein läßt sich im Hinblick auf die erhebliche Massenverdichtung in ihren zentralen Teilen deuten. Die

Fortsetzbarkeit sagt nämlich aus, daß die Massen im Außenraum der Einheitskugel, insoweit das Potential in Frage kommt, gewissermaßen noch dem Außenraum der Erde zugerechnet werden dürfen. Eine Stütze findet diese Deutung in dem Verhalten der Schwerkraftbeschleunigung in den Randpartien der Erdmasse; sie nimmt nämlich daselbst ebenso wie im Außenraum der Erde mit der Annäherung an den Erdschwerpunkt beständig zu; erst in größeren Tiefen stellt sich eine Abnahme ein. Eine weitere Stütze findet die Deutung darin, daß bei Vernachlässigung von Größen von der Ordnung α^2 in den Punkten der Erdkruste die Poissonsche Gleichung in die Laplacesche übergeht. Daselbst erreicht nämlich, von kleinsten Gebieten abgesehen, die Dichte ϱ nirgends den Wert 5; alsdann ist $4\pi f \varrho < \alpha^2$ und daher $\Delta V' \sim 0$. Hierin liegt der Grund für die Darstellbarkeit des Potentials V' in den Randgebieten der Erde durch eine harmonische Funktion V unter den getroffenen Voraussetzungen.

An anderer Stelle werde ich übrigens die Existenz der Entwicklung (2) im Außenraum der Einheitskugel dadurch nachweisen, daß ich zeige, daß die Reihe von $n = 3$ angefangen ein partikuläres Integral einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Entwicklung des statischen Schweremessers

Von **H. Haalck,** Potsdam

Die ersten Versuche mit einem statischen, auf dem barometrischen Prinzip beruhenden Schweremesser, über welche ich auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Potsdam 1930 berichtete, wurden ausgeführt mit einem noch sehr einfachen Modell, welches bei den Messungen auf dem Funkturm in Witzleben aber bereits eine Meßgenauigkeit von etwa $\pm$ 10 mgal lieferte. Freilich muß man bei diesen ersten praktischen Messungen berücksichtigen, daß die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen verfloß, nur wenige Minuten betrug und dementsprechend die Erschütterungen, denen das Instrument ausgesetzt war, bei weitem nicht so erheblich waren, wie bei richtigen Geländemessungen. Für Messungen im Gelände war das Instrument noch nicht geeignet, da es keinen ausreichenden Temperaturschutz besaß.

Die Versuchsmessungen mit einem verbesserten Instrument, das im Frühjahr 1931 fertiggestellt wurde*), ergaben im Laboratorium — also ohne die Erschütterungen des Transportes — eine den Pendelmessungen fast entsprechende Genauigkeit. Die praktischen Messungen im Gelände wurden stets an sechs, in ungefähr gleichen Abständen liegenden Meßpunkten längs der Versuchsstrecke

*) Vgl. Heft 1 und 5 dieser Zeitschrift (1932).