Störungen von Pendeluhren durch Bodenerschütterungen

Von **Hans Gebelein,** Göttingen — (Mit 1 Abbildung)

Störungsbewegungen des Aufhängepunktes eines Pendels beeinflussen den Gang des Pendels in dreierlei Weise: erstens durch Änderung der Amplitude und damit sekundär der Schwingungszeit, zweitens durch Änderung der Phase der Schwingung und drittens durch direkte Änderung der Schwingungszeit während der Dauer der Störung. Diese Effekte, von denen jeder unter Umständen so groß werden kann, daß er berücksichtigt werden muß, werden in ihrer Abhängigkeit von der Störungsbewegung untersucht. Die Ergebnisse werden am Beispiel der Verhältnisse in der Universitätssternwarte zu Göttingen erläutert.

Es ist schon lange bekannt, daß der Gang von Pendeluhren durch Bodenerschütterungen gestört wird, die z. B. infolge des Straßenverkehrs oder infolge von Erdbeben auftreten. Seit es Herrn Professor Schuler (Göttingen) im vergangenen Jahre gelungen war, mit seiner Präzisionsuhr in der Sternwarte zu Göttingen durch fortlaufende photographische Amplitudenregistrierung die Wirkung zweier stärkerer Erdbeben festzuhalten*), wurde von ihm und seinen Mitarbeitern auf diese Fehlerquelle erhöhtes Augenmerk gelegt.

Ich teile im folgenden eine Untersuchung dieser Frage mit, die ich auf Anregung von Herrn Professor Schuler durchführte. Dabei bin ich in der Lage, die Ergebnisse durch Versuchsdaten zu erläutern, die in der Sternwarte zu Göttingen gewonnen wurden, und die mir Herr Prof. Schuler zur Verfügung stellte. Es wurden nämlich die Erschütterungen des gemauerten Pfeilers, der die Schuleruhr trägt, vom Geophysikalischen Institut Göttingen (Dr. Köhler, Dr. Ramspeck, Gerecke und Müller) mit einem Seismographen untersucht, und zwar bei allen erdenklichen Störungen, die infolge der Tätigkeit in der Sternwarte wie infolge der Industrie und des Verkehrs in der Nähe der Sternwarte auftreten, um Aufschluß über die Größe und Frequenz der Störungsbewegungen zu erhalten.

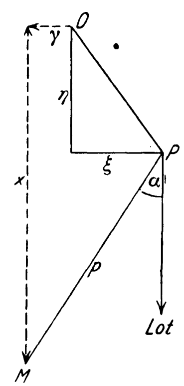

Fig. 1

Die theoretischen Untersuchungen, die wir bringen, gelten für jedes in einer Ebene schwingende System mit einem Freiheitsgrad. Im allgemeinen denken wir dabei als Beispiel an ein physikalisches Pendel. Der Aufhängepunkt P dieses Pendels beschreibt infolge der Störung im Laufe der Zeit eine Bahn, von der uns nur die Projektion in die Schwingungsebene interessiert. Wir geben diese Bahn wieder, indem wir dem Punkte P zur Zeit t die Koordinaten $\xi\,(t)$ und $\eta\,(t)$ zuordnen (s. Fig. 1). 0 ist der festliegende Koordinatenanfangspunkt. Es ist p der

*) Siehe Astron. Nachr. **243**, 301.

Abstand des Schwerpunktes M vom Aufhängepunkt P des Pendels und ϱ der zum Schwerpunkt des Pendels gehörige Trägheitsradius; m ist die Masse des Pendels. Die Pendelstange PM schließt in jedem Augenblick den Ausschlagwinkel α mit dem Lote ein.

Dann sind die Schwerpunktskoordinaten:

$$x = \xi + p \sin\alpha, \qquad y = \eta + p \cos\alpha.$$

Die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes sind

$$v_x = \dot{\xi} + p \cos\alpha \,.\, \dot{\alpha}, \qquad v_y = \dot{\eta} - p \sin\alpha \,.\, \dot{\alpha}.$$

Hieraus folgen die kinetische Energie

$$V = \frac{m}{2} [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + p^2 \dot{\alpha}^2 + \varrho^2 \dot{\alpha}^2 + 2p (\dot{\xi} \cos\alpha + \dot{\eta} \sin\alpha) \dot{\alpha}]$$

und die potentielle Energie

$$U = - mg (\eta + p \cos\alpha).$$

Um zur Differentialgleichung des Vorgangs zu gelangen, bedient man sich nun am einfachsten der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Die einfache Nebenrechnung ergibt

$$(p^2 + \varrho^2) \ddot{\alpha} + gp \sin\alpha = p (\ddot{\eta} \sin\alpha - \ddot{\xi} \cos\alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Erinnern wir uns, daß $(p^2 + \varrho^2)/p = L$ die reduzierte Pendellänge unseres Pendels ist, und setzen wir $g/L = N^2$, so daß N die Kreisfrequenz des Pendels bedeutet, so wird Gleichung (1)

$$\ddot{\alpha} + N^2 \sin\alpha = \frac{1}{L} (\ddot{\eta} \sin\alpha - \ddot{\xi} \cos\alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1\,a)$$

In Gleichung (1 a) stehen auf der linken Seite die Glieder der gewöhnlichen Pendelgleichung, während die Bestandteile der rechten Seite die Störungsglieder sind. In erster Näherung ist diese Gleichung eine Gleichung erzwungener Schwingungen, die man erhält, wenn man $\sin\alpha$ durch das Argument α und $\cos\alpha$ durch 1 ersetzt, auf der rechten Seite aber für α als erste Näherung den Ausdruck für eine kleine Pendelschwingung, $\alpha = \varphi \sin Nt$ einsetzt. Auf diese Weise entsteht die linearisierte Differentialgleichung

$$\ddot{\alpha} + N^2 \alpha = \frac{1}{L} (\ddot{\eta} \,.\, \varphi \sin Nt - \ddot{\xi}) = f(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Diese linearisierte Störungsgleichung wird die Grundlage der Untersuchungen bilden. Nachträglich aber werden wir feststellen, was uns durch die Linearisierung entgangen ist. Von der Störung $f(t)$ setzen wir voraus, daß sie vor der Zeit $t = 0$, die einem Durchgang des Pendels durch die Gleichgewichtslage entsprechen möge, und auch noch eine gewisse Zeit nach $t = 0$ identisch verschwinde. Im weiteren Verlauf werde $f(t)$ durch eine beliebige integrierbare Funktion in einem endlichen Zeitraum dargestellt. Außerhalb dieses Zeitintervalls möge sie wieder verschwinden. $t = T$ sei ein Zeitpunkt, der genügend spät liegt, so daß schon einige Zeit vor T und stets nach T die Funktion $f(t)$ verschwindet. Wir bestimmen nun jene Lösung der Gleichung (2), die bis zur Zeit $t = 0$ mit der durch die Gleichung

$$\alpha = \varphi \sin N t$$

beschriebenen Pendelschwingung identisch ist. Sie wird erhalten durch die bekannte Methode der Variation der Konstanten und lautet

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t) &= \varphi \sin N t + \frac{1}{N}\int_0^t f(z) \sin N(t-z)\, dz \\ &= \left(\varphi + \frac{1}{N}\int_0^t f(z) \cos N z\, dz\right) . \sin N t - \frac{1}{N}\int_0^t f(z) \sin N z\, dz . \cos N t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

Die Lösung besteht also aus einer sin- und einer cos-Schwingung, deren Amplituden während der Dauer der Störung mit der Zeit sich ändern. Uns interessiert besonders die Lösung nach Ablauf der Störung zur Zeit $t > T$, die wiederum eine harmonische Schwingung ist. Setzen wir

$$J_1 = \frac{1}{N}\int_0^T f(z) \sin N z\, dz, \qquad J_2 = \frac{1}{N}\int_0^T f(z) \cos N z\, dz \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

so wird

$$\alpha(t) = (\varphi + J_2) \sin N t - J_1 \cos N t = \Phi \sin N(t - \tau) \text{ für } t > T \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Nach der Störung schwingt also das Pendel mit der neuen Amplitude Φ, und die Schwingung weist eine Phasenverschiebung τ gegenüber der Schwingung vor Einsatz der Störung auf.

$$\Phi = \sqrt{(\varphi + J_2)^2 + J_1^2}, \qquad N\tau = \operatorname{arctg} \frac{J_1}{\varphi + J_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Die Funktion $f(t)$, die in den Formeln (4) bis (6) enthalten ist, besteht nach Gleichung (2) aus zwei Bestandteilen, die von der horizontalen und der vertikalen Komponente der Störungsbewegung herrühren. Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß eine kleine Störung in lotrechter Richtung in erster Näherung ohne Einfluß auf das Pendel ist. Tatsächlich beträgt der störende Einfluß der vertikalen Bewegung, wie die genaue Rechnung zeigt, bei Amplituden von der üblichen Größe $\varphi \simeq 10^{-2}$ höchstens einige Prozent des Einflusses einer gleich großen Störungsbewegung in der horizontalen Richtung. Wir fassen daher bei den weiteren Untersuchungen nur noch Störungen in horizontaler Richtung ins Auge.

Aus unseren bisherigen Ergebnissen folgt, daß die Integrale J_1 und J_2 und damit die Wirkung der Störung auf Amplitude und Phase bei ein und derselben Störungsfunktion verschieden ausfallen, je nach der Phase der Pendelschwingung.

mit der der Beginn der Störung zusammenfällt. Nun lehrt eine einfache Rechnung, daß man J_1 und J_2 in der Form

$$J_1 = J \sin\gamma, \quad J_2 = J \cos\gamma, \quad J_1^2 + J_2^2 = J^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

darstellen kann, wobei der Parameter γ im wesentlichen die Phase der Pendelschwingung bei Einsatz der Störung darstellt, während der Wert J von jener Phase unabhängig ist. Die Bestimmungsstücke der Schwingung nach Ablauf der Störung werden nun mit $\lambda = J/\varphi$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\varphi^2 + J^2 + 2\varphi J \cos\gamma} = \varphi \sqrt{1 + 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2} \simeq \varphi(1 + \lambda\cos\gamma), \\ \operatorname{tg} N\tau &= \frac{J\sin\gamma}{\varphi + J\cos\gamma} = \frac{\lambda\sin\gamma}{1 + \lambda\cos\gamma} \sim \lambda\sin\gamma \quad \text{oder} \quad N\tau \simeq \lambda\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dabei gelten die angegebenen Näherungsformeln für kleines $\lambda = J/\varphi$.

Die beiden Parameter J und γ, die in diesen Formeln noch vorkommen, bestimmen den Einfluß einer Störung auf den Uhrgang. Von ihnen kann bei genauer Kenntnis der Störungsbewegung, etwa mit Hilfe eines gleichzeitig aufgenommenen Seismogramms grundsätzlich nur J errechnet werden. Es ist nämlich

$$J^2 = \frac{1}{N^2}\left[\left(\int_0^T f(z)\sin N z\, dz\right)^2 + \left(\int_0^T f(z)\cos N z\, dz\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Größe J charakterisiert die Schwere der Störung. Da aus der ersten Gleichung (8) für $\varphi = 0$ $\Phi = J$ sich ergibt, so ist J jene Amplitude, die sich nach der Störung einstellt, wenn das vorher ruhende Pendel durch die Störung angestoßen wird. Der zweite Parameter entscheidet, wie der Einfluß sich auf Amplitude und Phase verteilt. Man erkennt sofort, daß extreme Änderung der Amplitude ohne Phasenstörung erfolgt und extreme Phasenverschiebung mit geringer Änderung der Amplitude verbunden ist. Die maximale prozentuale Änderung der Amplitude sowohl als die maximale absolute Änderung der Phase $N\tau$ ist gleich $\pm\lambda = \pm J/\varphi$, was ein neuer Grund dafür ist, ein Pendel nicht mit allzu kleiner Amplitude zu betreiben. Zu beachten ist, daß die Störung unabhängig von der Masse ist und nur von der reduzierten Pendellänge L bzw. der Schwingungszeit abhängt, wie übrigens alle Effekte, die in Gleichung (1a) enthalten sind.

Für die Praxis ist es bemerkenswert, daß eine Amplitudenregistrierung nicht alle Störungen anzeigt und daß sie nicht gestattet, die Schwere der Störung zu messen. Gerade solche Erschütterungen, die den größtmöglichen Einfluß auf die Phase haben, sind durch sie nicht zu erkennen. Allerdings sind für den Uhrgang Störungen der Amplitude ungleich wichtiger als Störungen der Phase, denn mit Störungen der Phase ist jedesmal ein einmaliger Eingriff in den Uhrstand verbunden, während jede Änderung der Amplitude eine Änderung der Schwingungszeit nach sich zieht für längere Zeit. Der dadurch entstehende Fehler läßt sich aber nicht anders bewältigen als durch Amplitudenregistrierung und nachträgliche

Verrechnung der Amplitudenschwankungen, ein Verfahren, das an der Schuleruhr seit Jahren ausgeübt wird.

Wie an der zweiten der Gleichungen (8) zu ersehen ist, läßt sich der Phasenfehler dadurch eliminieren, daß man zwei Pendel verwendet, die stets nahezu 180^0 Phasenverschiebung gegeneinander besitzen. Bei diesen Pendeln fällt der Wert τ bei jeder Störung entgegengesetzt gleich aus und verschwindet, wenn man die Angaben beider Uhren mittelt. Von diesem Verfahren machte Vening-Meinesz Gebrauch bei Schweremessungen auf dem Ozean.

Ein Urteil über die Größe des zu erwartenden Phasenfehlers kann man sich aber doch aus den Amplitudendiagrammen bilden. Wir setzen voraus, daß die Störungsquelle nicht mit der Uhr selbst zusammenhängt, was für alle Bodenerschütterungen durch den Verkehr und dergleichen zutrifft, aber natürlich nicht für die Erschütterungen, die von einer in der Nähe aufgestellten zweiten Uhr ausgehen, die gleichen Uhrgang hat oder gar von der ersten synchronisiert wird. Wir nehmen an, die Gesamtheit aller Störungen, die in genügend langer Zeit vorkommen, bilde ein zweidimensionales Kollektiv im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Verteilungsfunktion der J braucht uns nicht bekannt zu sein. Für die γ zu jedem speziellen Wert $J = J'$ liegt es jedoch nahe, Gleichwahrscheinlichkeit anzunehmen. Da nach (8) der Phasenfehler τ eine ungerade Funktion von γ ist für jedes J, muß die Verteilungsfunktion der τ jedenfalls den Mittelwert Null besitzen. Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung muß die Verteilungsfunktion der τ eine Gaußsche Fehlerkurve sein, durch die nach (8) die Schwankungen der Amplitude ebenfalls beschrieben werden, denn wegen der Gleichverteilung der γ kommen Amplitudenfehler und Phasenfehler mit der gleichen relativen Häufigkeit vor. Durch Vermessung genügend vieler Amplitudendiagramme kann also die verlangte Gaußsche Fehlerkurve ermittelt werden,

$$w(\tau) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \tau^2},$$

die uns aussagt, mit welcher Wahrscheinlichkeit im betreffenden Augenblick der Phasenfehler gerade gleich τ beträgt. Damit erhält man auch die „wahrscheinlichen Grenzen" von τ, nämlich $\tau^* = 0.447/h$ und dieser Wert gibt Aufschluß über die von den Erschütterungen herrührende Unsicherheit bei jeder Ermittlung des Uhrstandes. Da der Phasenfehler unter den gemachten Voraussetzungen den Mittelwert Null besitzt, so beeinflußt er nur den Uhrstand, nicht aber den Uhrgang. Er ist also wesentlich harmloser als der Amplitudenfehler, und man wird sich im allgemeinen damit begnügen können, seine wahrscheinlichen Grenzen ein für allemal abzuschätzen.

Um zu quantitativen Vorstellungen über die betrachteten Effekte zu kommen, soll die Berechnung von J an einem Beispiel durchgeführt werden. Zuerst formen wir die Gleichungen (4) für J_1 und J_2 noch etwas um, indem wir zweimal partiell integrieren und so von einem Integral über die Beschleunigung $f(t) = -\frac{1}{L}\ddot{\xi}$

zu einem über die Ortskoordinate ξ gelangen. Dabei beachten wir, daß zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ nicht allein $\ddot{\xi}$, sondern auch die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ verschwinden muß und endlich nehmen wir an, daß die Gleichgewichtslage $\xi = 0$ vor und nach der Störung die gleiche sei. Dann wird

$$J_1 = \frac{N}{L} \int_0^T \xi(z) \sin N z \, dz \qquad \text{und} \qquad J_2 = \frac{N}{L} \int_0^T \xi(z) \cos N z \, dz.$$

Wir legen nun für $\xi(t)$ eine Störung zugrunde, die zwischen den Zeitpunkten 0 und T sich abspiele und in diesem Zeitintervall durch

$$\xi = a \sin nt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wiedergegeben werde. Natürlich kann diese Gleichung nicht ganz bis zu den Intervallgrenzen gelten, denn aus $\ddot{\xi}(0) = \ddot{\xi}(T) = \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}(T)$ würde $a = 0$ folgen, so daß in der Nähe der Intervallgrenzen der Anschluß an den störungsfreien Zustand durch eine geeignete andere Funktion hergestellt werden muß. Da es uns jedoch daran liegt, ein einfaches Rechenbeispiel zu geben, sehen wir von dieser Schwierigkeit, die bei den wirklichen Seismogrammen auch nicht vorkommt, ab und rechnen mit der Funktion (10) bis zu den Intervallgrenzen $t = 0$ und $t = T$. Die Integrale

$$J_1 = \frac{a}{L} N \int_0^T \sin nz \,.\, \sin Nz \, dz \qquad \text{und} \qquad J_2 = \frac{a}{L} N \int_0^T \sin nz \,.\, \cos Nz \, dz$$

lassen sich elementar auswerten, und nach (9) ist zur Ermittlung von J ihre Quadratsumme zu bilden. Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man für J die beiden Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{a}{L} \frac{N}{n^2 - N^2} \sqrt{n^2 (\cos nT - \cos nT)^2 + (n \,.\, \sin NT - N \,.\, \sin nT)^2} \\ &= \frac{a}{L} N \sqrt{\frac{1}{n^2 - N^2} \cdot \left(\frac{n}{n-N} (1 - \cos(n-N)T) + \frac{n}{n+N} (1 - \cos(n+N)T) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2nT) \right)} \end{aligned}\right\} (11)$$

Die Größe J, die die Schwere der Störung angibt, ist also gleich dem Verhältnis der Amplitude der Störungsbewegung zur reduzierten Pendellänge mal einem Faktor, der von der Dauer der Störung und dem Verhältnis der Frequenzen abhängt. An der zweiten Formel für J ist zu erkennen, daß dieser Faktor eine fastperiodische Funktion der Zeit ist. Es ist nun wichtig, zu erfahren, in welchem Bereich die Werte dieser im Falle $n \pm N$ beschränkten Funktion liegen. Die Antwort folgt durch Bestimmung der Maxima des Radikanden als Funktion der Einwirkungsdauer T und nachträgliches Ersetzen der sin und cos durch 1, wodurch eine von der Zeit T unabhängige Abschätzung für J erhalten wird. Die Rechnung liefert

$$J \leqq \frac{a}{L} \cdot \frac{N}{N - n} \text{ für } n < N, \qquad J \leqq \frac{a}{L} \cdot \frac{2nN}{n^2 - N^2} \text{ für } n > N \quad . \; . \quad (12)$$

Diese Abschätzung versagt im Falle der Resonanz, da dann natürlich keine von der Zeit unabhängige obere Grenze für J existiert. In diesem Falle kann man die Wirkung der Störung auf die Uhr nur bei Kenntnis der Wirkungsdauer T beurteilen. Aus (11) erhält man durch Grenzübergang für diesen Fall:

$$J = \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{N^2 T^2 - 2 N T \sin N T \cos N T + \sin^2 N T} \simeq \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{2} N T \quad (\text{für große } T) \qquad (13)$$

d. h. die Störung ist beim Resonanzfall im wesentlichen proportional der Dauer des störenden Einflusses. Aus diesem Sachverhalt folgt auch, daß die Aufhängung zweier Uhren mit gleichem oder nahezu gleichem Uhrgang an einem Pfeiler entschieden zu widerraten ist.

Damit sind wir in der Lage, bei Kenntnis der Störungsbewegung den Fehler der Amplitude und der Phase abzuschätzen. Wie bereits oben erwähnt wurde, wurden die Erschütterungen des Pfeilers, der in der Sternwarte zu Göttingen die Schuleruhr trägt, bei den verschiedenen häufig vorkommenden Störungsquellen gemessen. Dabei wurden die größten Störungen beobachtet mit der Eigenschwingungszeit des Pfeilers 0.175 sec; die Amplituden betrugen hier bis 2 μ. Störungen mit höheren Frequenzen als dieser sind nach (12) harmloser. Die Störung mit der längsten Schwingungszeit, die beobachtet wurde, hatte die Amplitude 0.35 μ bei einer Schwingungszeit von 0.45 sec. Da die Schuleruhr zu einer Schwingung 2 sec benötigt, so liegt der größte aus den Messungen erschlossene Wert für J bei $0.4 \,.\, 10^{-5}$. Die Folgen einer Störung mit dem Werte $J = 10^{-5}$ bei einer Amplitude $\varphi = 1^0\,30'$ bestehen aber nach (8) aus einem Amplitudenfehler, der maximal $\varDelta\,\varphi/\varphi = \pm\,0.00038$ beträgt, und einem Phasenfehler, der maximal $\tau = \pm\,0.00012$ sec ausmacht.

Um eine Zehnerpotenz größer als der Einfluß dieser normalen Erschütterungen war jener von Schuler mitgeteilte anläßlich zweier Erdbeben. Damals wurde aus dem Amplitudendiagramm der Wert $\varDelta\,\varphi/\varphi = -\,0.005$ entnommen, während die Bodenbewegung nach den Aufzeichnungen des Geophysikalischen Instituts zu Göttingen $\pm\,36\,\mu$ betrug. Der Phasenfehler von einigen tausendstel Sekunden ist auch in diesem außergewöhnlichen Falle noch so klein, daß er sich der Beobachtung entzieht.

Wir wollen nun noch untersuchen, welche Effekte uns durch die Linearisierung der Gleichung (1) entgangen sind. Dies ist zunächst jenes Gesetz, das die Abhängigkeit der Schwingungszeit von der Amplitude bestimmt. Wir haben schon darauf hingewiesen, daß jede Änderung der Amplitude eine Änderung der Schwingungszeit nach sich zieht und daß die hieraus entspringende Korrektur durch Vermessung der Amplitudendiagramme erfolgen muß. Die Störungsbewegung wirkt aber außerdem noch direkt auf die Frequenz des Pendels infolge der bei der Linearisierung weggefallenen Glieder höherer Ordnung. Der daraus entspringende Effekt ist identisch mit dem von Hirsch untersuchten, wonach die Stabilitätseigenschaften eines Pendels wesentlich andere werden können, wenn der Aufhängepunkt durch äußere Kräfte in rasche periodische Bewegung versetzt wird, so daß unter Umständen ein schweres Pendel sogar stabile Schwingungen um die normal labile Gleichgewichtslage im Zenit ausführen kann*). Wird die Störung in waagerechter oder senkrechter Richtung durch die Funktion $a \sin nt$ beschrieben, so erhält Hirsch für kleine Pendelschwingungen die Schwingungszeit $T' = T(1 \pm K^2)$, wo T die ungestörte Schwingungszeit bedeutet, das Pluszeichen für waagerechte, das Minuszeichen für lotrechte Störung gilt und die Konstante K den Wert besitzt

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{an}{LN}, \quad T' = T(1 \pm K^2).$$

Der Hirschsche Effekt ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Störungsbewegung. Errechnet man ihn nach den Daten der in der Göttinger Sternwarte gemessenen Erschütterungen, so ergibt sich unter der ungünstigsten Annahme, daß alle beobachteten Störungen zugleich stattfinden, für $\Delta T/T$ ein Wert der Größenordnung 10^{-8}. Es braucht also dieser Effekt im Falle des Schulerpendels in Göttingen nicht berücksichtigt zu werden. Da er aber bei größeren Erschütterungen als quadratischer Effekt sehr rasch anwächst, so kann er bei einem Pendel, das nicht einen so günstigen Aufstellungsort besitzt, wie es die Sternwarte zu Göttingen ist, durchaus erheblich in Erscheinung treten.

Wir haben oben betont, daß die Gültigkeit unserer Rechnung sich nicht auf den Fall eines Pendels beschränkt. So kann man z. B. für einen Seismographen sofort folgendes feststellen. Die Abweichung des Seismogramms von der Bewegung des Erdbodens wird durch eine der Gleichung (1 a) entsprechende Störungsgleichung geliefert. Indem wir die Dämpfung berücksichtigen, legen wir die Gleichung

$$\ddot{\alpha} + 2k\dot{\alpha} + N^2\alpha = \frac{1}{L}(\ddot{\eta}\sin\alpha - \ddot{\xi}\cos\alpha) = f(t)$$

zugrunde. Da vor Beginn der Störung der Seismograph in Ruhe ist, lautet die Gleichung (3) entsprechende Lösung der inhomogenen Gleichung in diesem Fall:

$$\alpha(t) = \frac{1}{N'}\int_0^t f(z)\, e^{-k(t-z)} \sin N'(t-z)\, dz \quad \text{mit} \quad N' = \sqrt{N^2 - k^2}.$$

Ohne die Diskussion dieser Lösung ausführlich durchzuführen, entnehmen wir diesen Gleichungen, daß die Fehlweisung des Seismographen allein von der Eigenschwingungszeit des Apparats, von der Dämpfung und natürlich von der Störungsbewegung abhängt, dagegen nicht von der Masse und der Bauart des Apparats im einzelnen. Die Masse ist allein dafür entscheidend, wieviel Energie dem System bei bestimmter Forderung an die Genauigkeit entzogen werden kann zur Betätigung des Schreibapparats.

Zusammenfassung. Bodenerschütterungen wirken störend auf den Gang von Pendeluhren auf dreierlei Weise: 1. Bewegungen, vor allem in horizontaler

*) Hirsch: Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1930.

Richtung, beeinflussen Amplitude und Phase der Schwingung. 2. Veränderte Amplitude bewirkt veränderte Schwingungszeit. 3. Oszillationen des Aufhängepunktes beeinflussen die Schwingungszeit. Vermessung der häufig vorkommenden Erschütterungen lieferte für die Sternwarte zu Göttingen das Ergebnis, daß mit Ausnahme des Effektes unter 2. diese Wirkungen nicht so groß werden, daß sie berücksichtigt werden müssen. Dieses günstige Ergebnis befreit aber nicht von der Notwendigkeit, in jedem Fall, in dem entsprechend hohe Anforderungen an die Genauigkeit einer Uhr gestellt werden, nachzuprüfen, ob der Aufstellungsort überhaupt erschütterungsfrei genug ist, um die Durchführung solcher Messungen zu gestatten.

Eine praktische Möglichkeit der Triangulationsverbindung mit dem amerikanischen Kontinent

Von Prof. Dr. Ing. **A. Berroth,** Aachen — (Mit 4 Abbildungen)

Prinzip. Es sind in der Öffentlichkeit meines Wissens bisher die zwei Möglichkeiten betrachtet worden, eine Triangulationsverbindung Europa-Amerika oder Afrika-Amerika herzustellen: durch Vermittlung von Schiffen oder von Flugzeugen, die in Form einer Dreieckskette gestaffelt sind. Beide Gedankengänge sind aber vorläufig praktisch nicht realisierbar und in der erreichbaren Genauigkeit höchst ungenügend.

Der hier gemachte Vorschlag ist auf viel weniger Voraussetzungen gegründet, in allen wesentlichen Teilen bereits praktisch erprobt und liefert die notwendige Genauigkeit. Es liegen ihm die Ergebnisse der allerneuesten Forschungen zugrunde, nämlich die erfolgreichen Ballonaufstiege von A. Piccard und die Aufstiege von Registrierballonen von E. Regener und A. Wigand, ferner die Errungenschaften der Photogrammetrie und der Doppelbild-Entfernungsmessung.

Das Prinzip ist im wesentlichen folgendes: Über dem Festlande steigen auf jeder Seite des Ozeans je zwei Piccardballone auf, die je mit einem Spezial-Winkelmeßinstrument und einer Photokammer ausgestattet sind, in der Mitte des Ozeans steigen nacheinander zwei Pilotballone auf, die eine geeignete Leuchteinrichtung tragen.

Damit ist es möglich, mit Hilfe der Delambreschen Aufgabe (auch Hansensche Aufgabe genannt) die Dreiecksverbindung herzustellen.

Hilfsmittel. Die Standorte und damit die Basis ergeben sich durch die dem Photogrammeter bekannte Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschnittes, die Winkelmessungen werden mit einem Spezialinstrument ausgeführt, das derart eingerichtet ist, daß

1. die Rotationsbewegung des Ballons nichts ausmacht, dadurch, daß beide Ziele in derselben Bildebene gleichzeitig eingestellt werden können;