

## Werk

**Jahr:** 1933

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:9

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0009

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0009](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0009)

**LOG Id:** LOG\_0050

**LOG Titel:** Der Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung bei tektonischen Vorgängen

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

die Erschütterung des Apparates durch Erdbeben führt nie zu einer Erscheinung in der Registrierkurve, die als Aufheben eines Nachhinkens erkennbar wäre.

c) Die Methode unserer Eichung — Zuordnung der Momentanwerte des Ausschlages einer in der Größe der zu registrierenden gleichen Kraft zu ihrem vollen Wert — würde sogar im Falle eines Nachhinkens unsere Werte zu groß erscheinen lassen oder zumindest die Wirkung des Nachhinkens (bis auf die Phase) kompensieren. Das Nachhinken würde also nicht zu kleineren, sondern eher noch zu zu großen Werten von  $\delta$  führen.

Alle diese Punkte zeigen, daß von einer merklichen Beeinflussung unserer Werte durch apparative Einflüsse nicht die Rede sein kann.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

1. daß wir — wenigstens in quantitativer Hinsicht — über die Vertikalbewegungen der festen Erde heute weniger wissen als man bisher zu wissen glaubte. Ein Fortschritt hierin ist nur durch Erweiterung des experimentellen Materials zu erwarten, einerseits durch Vervollständigung mittels gleichzeitiger Horizontalpendelmessungen, was von uns bereits in Angriff genommen worden ist, andererseits durch Vergrößerung der Zahl der Beobachtungsstationen, wozu internationale Zusammenarbeit unerlässlich ist.

2. daß kein Grund vorliegt, die apparativen Ergebnisse als durch elastische Trägheitswirkungen merklich verfälscht anzusehen oder die bisher immer übliche Entwicklung in Partialtiden zu verlassen und durch eine Vergleichung mit der Gesamtwirkung des Gestirns zu ersetzen, was im Gegenteil zu bedenklichen Verfälschungen führen würde.

Marburg/Lahn, Physikalisches Institut der Universität.

## Der Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung bei tektonischen Vorgängen\*)

Von Sigismund Kienow, Göttingen — (Mit 13 Abbildungen)

Die bei den Versuchen an Gesteinsmaterial von v. Kármán, Böker u. a. gewonnenen Ergebnisse werden mit Hilfe kontinuumsmechanischer Methoden verallgemeinert, so daß sie zur Behandlung tektonischer Probleme geeignet erscheinen. Bei der Extrapolation auf sehr kleine Geschwindigkeiten werden an plastischem Ton gewonnene Erfahrungen herangezogen. Mit Hilfe der so erhaltenen Resultate werden einige aus geologischen Feldbeobachtungen bekannte Erscheinungen auf physikalische Probleme zurückgeführt und damit der Rechnung zugänglich gemacht. Schließlich wird die Grabenbildung als ein Beispiel plastischer Deformation in der Erdkruste behandelt.

**I. Einleitung.** In einer kritischen Betrachtung zweier Diskussionen über tektonische Hypothesen stellt S. von Bubnoff (1932) zwei Methoden der kau-

\*) Die vorliegende Arbeit wurde ausgeführt mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, der ich auch an dieser Stelle herzlich danke. Außerdem bin ich Herrn Prof. Dr. Prager und Dr. Schlechtweg (Institut für angewandte Mechanik, Göttingen) für ihre wertvolle Hilfe zu Dank verpflichtet.

salen Schilderung des Werdeganges der Erdkruste gegenüber: Einmal die deduktive Methode, die von Grundtatsachen der Physik und der Mechanik ausgehend eine Reihe unkontrollierbarer Annahmen über die erste Erstarrung der Erde, die Anlage der Kontinente usw. macht und diesen Vorstellungen die geologischen Beobachtungstatsachen einzuordnen sucht, zweitens die induktive Methode, die den historischen Ablauf der Veränderungen in der Erdkruste so genau wie möglich zu rekonstruieren und dem so gewonnenen Bewegungsbild ein Kraftbild unterzulegen bestrebt ist. von Bubnoff weist auf die grundsätzliche Unzulänglichkeit des ersten Weges hin und betont, daß angesichts der Verfeinerung geologischer Untersuchungsmethoden in neuerer Zeit die zweite Methode den Vorzug verdiene, da durch die Arbeiten von H. Cloos und B. Sander die Erforschung des räumlichen Bewegungsbildes mit guter Genauigkeit ermöglicht wird und die Untersuchungen der Stilleschen Schule eine Berücksichtigung der zeitlichen Einflüsse gestatten. Die Schwäche der induktiven Methode liegt vor allem darin, daß die Zuordnung eines Kraftbildes zu dem Bewegungsbild bislang auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieß. In keinem einzigen mir bekannten Falle konnte ein tektonischer Tatbestand in befriedigender Weise dynamisch ausgedeutet werden. Man kann sich leicht überzeugen, daß ein solcher Schluß von einem Verformungszustand auf die Größe und Richtung der erzeugenden Kräfte niemals eindeutig sein kann, wenn nicht der für das betrachtete Material charakteristische Zusammenhang zwischen den Spannungen  $S$ , den Verformungen  $E$  und der Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{E} = dE/dt$ , also  $S = f(E, \dot{E})$ , bekannt ist. Solche Beziehungen können nur aus Experimenten an Gesteinsmaterial gewonnen werden. Wenn wir das Material als isotrop ansehen dürfen, so sind zur vollständigen Charakterisierung seines mechanischen Verhaltens sechs skalare Gleichungen für die sechs Spannungskomponenten erforderlich, die zu einer Tensorgleichung zusammengefaßt werden können. Mit ihrer Hilfe ist dann in der Eulerschen Grundgleichung der Kontinuumsmechanik:

$$\rho \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \text{div } S + \text{grad } U \quad \dots \dots \dots (1)$$

in der  $\mathbf{w}$  den Vektor der Geschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte des Materials und  $U$  das Potential der Massenkräfte darstellt, der Spannungstensor  $S$  zu eliminieren. Wir erhalten so eine Differentialgleichung zwischen den äußeren Kräften, den Formänderungen und der Deformationsgeschwindigkeit, die integriert werden muß und nach Einführung der durch die geologische Aufnahme gewonnenen Verschiebungsrandbedingungen die gesuchte Lösung liefert. Dieser Weg wird in einzelnen Spezialfällen gangbar sein, im allgemeinen werden jedoch die mathematischen Schwierigkeiten sehr groß werden. Es bleibt dann nur die Möglichkeit, die Rechenarbeit durch tektonische Modellversuche zu ersetzen, indem man eine Substanz, die durch den gleichen Zusammenhang zwischen Spannungszustand, Deformation und Deformationsgeschwindigkeit charakterisiert ist, wie das Material der Erdkruste, und das die Materialkonstanten in einem den Versuchs-

bedingungen entsprechenden Verhältnis verkleinert, in verschiedener Weise beansprucht, bis ein Bewegungsbild entsteht, das dem natürlichen Vorbild in seinen wesentlichen Eigentümlichkeiten entspricht.

In der vorliegenden Abhandlung soll ausgehend von experimentellen Ergebnissen versucht werden, die für das Material der Erdkruste gültige Form der Beziehung  $S = f(E, \dot{E})$  zu bestimmen und hieraus allgemein tektonische Folgerungen zu ziehen. Zum Schluß soll als Beispiel in einem besonders einfachen Fall die Integration durchgeführt werden.

**II. Grundlagen.** Vorausgesetzt ist bei allen Betrachtungen, daß die Gesetze der klassischen Mechanik auch für tektonische Prozesse gelten. Obgleich die zeitliche Ausdehnung der Vorgänge aus den Grenzen herausfällt, die die Relativitätstheorie der klassischen Mechanik gezogen hat, dürften die zu berücksichtigenden Korrekturen so klein sein, daß sie die Fehlergrenze nicht überschreiten. Weiterhin fassen wir im folgenden der Einfachheit halber das Material der Erdkruste als quasi-isotrop auf, d. h. wir vernachlässigen den Einfluß der Korngröße, was bei dem räumlichen Ausmaß tektonischer Gebilde stets möglich ist, und denjenigen der Schichtung. Hierdurch wird die Allgemeingültigkeit unserer Betrachtung nur wenig eingeschränkt, wenn wir Stabilitätsprobleme, wie z. B. Faltung, unberücksichtigt lassen. Schließlich nehmen wir an, daß die Bewegungen an allen Stellen in der Substanz stetig vor sich gehen. Für diejenigen Teile des Bereiches, in denen diese Stetigkeit durch Verwerfungen oder Überschiebungen offenbar gestört ist, betrachten wir den Abstand zwischen zwei Scherflächen als klein gegen die Ausdehnung des Gesamtbereiches, so daß wir Mittelwerte der Verschiebung bilden können, die sich stetig ändern. Es wird sich zeigen, daß wir trotz dieser Einschränkung in vielen Fällen die Lage der Gleitflächen bestimmen können, wenn wir die Versuchsergebnisse in geeigneter Weise berücksichtigen.

Sind obige Voraussetzungen erfüllt, so können wir die Verzerrung eines kleinen Parallelpipeds in folgender Weise darstellen: Sind  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Verschiebungsvektoren der drei Seiten des Rechtecks, so erhalten wir aus den drei Ableitungen jedes Vektors nach den drei Koordinatenrichtungen neun skalare Größen, die die Gesamtdeformation des Elementarkörpers (ohne Translation) charakterisieren. Wir können sie zu einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \\ \frac{\delta w}{\delta x} & \frac{\delta w}{\delta y} & \frac{\delta w}{\delta z} \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. In der Tensorrechnung wird nun gezeigt, daß die Differenzen

$$\frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x}, \quad \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x} \quad \text{und} \quad \frac{\delta v}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta y}$$

keinen Beitrag zur Deformation liefern, sondern nur eine Rotation des Körpers als starres Ganzes verursachen. Wir spalten daher diese Größen von der Matrix ab und erhalten als Rest den Deformationstensor:

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right) & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) & \frac{\delta w}{\delta z} \end{pmatrix}.$$

Zur Abkürzung führen wir die in der technischen Mechanik üblichen Bezeichnungen ein:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \varepsilon_x, \quad \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \text{ usw.}$$

Weiterhin wird es sich als zweckmäßig erweisen, die Volumenänderung und die Gestaltänderung gesondert zu behandeln. Wir zerlegen daher  $E$  weiter in einen

Kugeltensor  $e \cdot T = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ , worin  $T$  einen Einheitstensor mit der Matrix

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , und  $e = \frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$  die mittlere Volumenänderung dar-

stellt, und den sogenannten Formänderungsdeviator:

$$E_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - e & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - e & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - e \end{pmatrix}$$

der, wie in der Tensorrechnung bewiesen wird, die volumentreue Gestaltänderung charakterisiert. In ähnlicher Weise können wir uns den Spannungstensor:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

aus den Ableitungen der an den drei Flächen des Elementarparalleloipeds angreifenden Kräften  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  nach den Koordinatenrichtungen:

$$\frac{\delta p_1}{\delta x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\delta p_1}{\delta y} = \tau_{xy}, \quad \dots$$

aufgebaut denken. Er kann ebenfalls in einen hydrostatischen Anteil

$p \cdot T = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ , worin  $p = 1/3 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  ist, und den Spannungsdeviator:

$$S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{pmatrix}$$

zerlegt werden.

**III. Versuchsergebnisse.** Was sagen nun die vorliegenden Versuchsergebnisse über die Form der gesuchten Beziehung  $S = f(E, \dot{E})$  aus? Zwischen dem hydrostatischen Druck und der Volumenänderung besteht nach den Versuchen von W. P. Bridgman (1923) bei allen in Frage kommenden Stoffen eine einfache Proportionalität:

$$p = K \cdot e \dots \dots \dots (2)$$

$K$  bezeichnen wir als Kompressionsmodul.

Beziehungen zwischen den Deviatoren liefern die Versuche von Th. v. Kármán (1912) und R. Böker (1915) an Marmor und Sandsteinkörpern unter verschiedenen hydrostatischen Drucken: Setzt man einen Marmorzylinder in einer Festigkeitsmaschine einem Druck in axialer Richtung aus, so verkürzt er sich in der Druckrichtung, wobei die Verkürzung in erster Näherung zunächst dem aufgebrachtten Druck proportional ist. Die von H. Schlechtweg (1933) festgestellte Abweichung von der Proportionalität soll hier vernachlässigt werden. Überschreitet der Druck einen gewissen Betrag, so entsteht eine Scherfläche etwa unter  $15^\circ$  zur Druckrichtung, längs der der Zusammenhalt des Materials sofort zerstört wird. Daß die Form und Richtung des entstehenden Druckkegels zum Teil durch die unvermeidliche inhomogene Spannungsverteilung beeinflußt wird, ändert prinzipiell nichts und kann daher für unsere allgemeinen Betrachtungen unberücksichtigt bleiben. Bei einer Untersuchung des Gefüges zeigt sich, daß sich die bleibende Deformation nur auf die Korngrenzen beschränkt. Die Kristalle selbst sind zwar nahe der Gleitfläche zertrümmert worden, ihr Feinbau ist jedoch intakt geblieben. Man sollte erwarten, daß der Riß der Richtung der maximalen Schubspannung parallel, also unter  $45^\circ$  zur Druckrichtung verläuft. Da jedoch die Reibung längs den rauhen Intergranularflächen in hohem Maße von dem Druck abhängig ist, der senkrecht zu ihnen wirkt, kann die Gleitung nur längs einer Fläche erfolgen, für die die Normalspannung einen gewissen Grenzbetrag unterschreitet.

Setzen wir das Material einem hohen allseitigen Druck aus, so werden die Kristallite so stark zusammengepreßt, daß die Festigkeit längs den Korngrenzen größer wird als die der Kristallite selbst. Erzeugt man jetzt durch zusätzlichen axialen Druck bleibende Deformationen, so werden auch die Kristalle selbst in Mitleidenschaft gezogen. Ein solcher Gleitvorgang innerhalb eines Kristalls spielt sich in der Weise ab, daß längs relativ stark mit Gitterpunkten besetzten

Netzebenen des Kristallgitters Sprünge aus einer Gleichgewichtslage in die nächste stattfinden. Äußerlich gibt sich der Vorgang durch die entstehende Druckzwillingsbildung oder durch undulöse Auslöschung zu erkennen. Sonderbarerweise wird die Festigkeit längs der Gleitfläche mit zunehmender Deformation nicht verringert, sondern sogar noch erhöht. Infolgedessen werden die Gleitflächen rasch zu weiterer Verformung unbrauchbar, an ihrer Stelle entstehen neue Flächen. Die Deformation verteilt sich daher fast gleichmäßig über den ganzen Kristall. Da die Reibung längs den intrakristallinen Gleitflächen von der Normalspannung unabhängig ist, fällt deren Richtung mit derjenigen der größten Schubspannung zusammen, d. h. sie schließt einen Winkel von etwa  $45^\circ$  mit der Hauptdruckrichtung ein. Zwischen den beiden geschilderten Extremen gibt es alle Übergänge, bei denen sich die Verformung teils zwischen den Kristallen, teils innerhalb derselben abspielt. Die Winkel zwischen den Gleitflächen und der Druckrichtung wachsen mit zunehmendem Manteldruck an, und ihre Anzahl pro Raumeinheit nimmt in gleicher Weise zu.

Über die geschilderten Vorgänge im Gefüge liefert das am Gesamtkörper während des Versuchs aufgenommene Spannungsdehnungsdiagramm eine Art Statistik (siehe Fig. 1). Wir bezeichnen im folgenden denjenigen Punkt im Diagramm, an dem starke Abweichungen von der Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen beginnen, als „Fließgrenze“, die zugehörige Spannung als „Fließspannung“, das Verhalten unterhalb der Fließgrenze nennen wir „elastisch“, der Zustand schließlich, der nach dem Überschreiten der Fließgrenze beginnt, sei als „Plastizität“ definiert. Experimentell ist nun festgestellt worden, daß die Gleitflächen in dem Augenblick auftreten, in dem die Fließgrenze überschritten wird. Andererseits wurden Gleitflächen in einer Substanz bisher nur beobachtet, wenn eine solche Fließgrenze vorhanden ist. Man kann daher aus dem Auftreten von Scherflächen im Gestein darauf schließen, daß plastische Formänderungen stattgefunden haben. Fig. 1 zeigt, daß diese plastischen Verformungen in sehr verschiedener Weise vor sich gehen können: Bei niederen Manteldrücken rufen sie eine Entfestigung des Materials hervor, bei hohen dagegen eine starke Verfestigung, wodurch die Fließgrenze verwischt wird. Dasjenige Stadium, in dem sich beide Erscheinungen die Waage halten, so daß bei gleichbleibender Fließspannung beliebig große Deformationen entstehen können, wenn man nur lange genug wartet, ist bis jetzt der Rechnung allein zugänglich und daher für uns

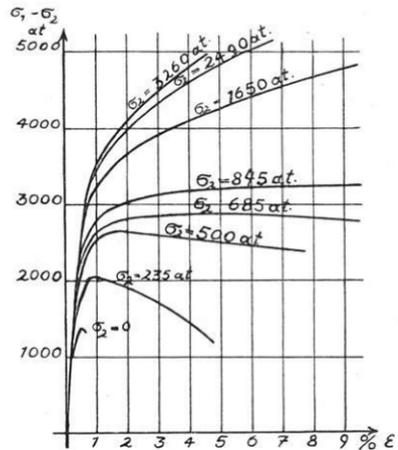


Fig. 1.  
Formänderungskurven des Marmors bei Druckversuchen unter allseitigem Druck nach Th. v. Kármán (1912)

besonders wichtig. Wir bezeichnen es als „ideal plastisch“. Zwischen Marmor und Sandstein bestehen keine prinzipiellen Unterschiede, nur die Materialkonstanten schwanken etwas. Wesentlich anders verhalten sich dagegen Tongesteine, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden soll. Wir können daher die am Marmor gewonnenen Resultate allgemein auf Sedimentgesteinspakete anwenden, wenn in diesen tonhaltige Gesteine keine bedeutende Rolle spielen.

Die geschilderten v. Kármánschen Versuche liefern für die gesuchte Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verformungsdeviator die erste Gleichung: Es entspricht einer reinen axialen Druckspannung eine Verkürzung in axialer Richtung, wobei die Verkürzung in erster Näherung der Spannung proportional ist.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 - p \end{Bmatrix} = 2G \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 - e \end{Bmatrix}$$

$G$  sei als Schubelastizitätsmodul bezeichnet. Diese Beziehung gilt jedoch nur bis zu einem gewissen Betrag der Spannungen, dessen Größe vom hydrostatischen Druck  $p$  abhängt. Oberhalb dieser „Fließgrenze“ beginnt eine plastische Verformung, auf deren Gesetzmäßigkeiten wir weiter unten eingehen wollen.

Die v. Kármánschen Versuche wurden von R. Böker ergänzt, der Marmorzylinder einem hydrostatischen Druck aussetzte und dann in axialer Richtung entlastete, so daß der Spannungsdeviator die Form erhält:

$$S_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 - p \end{Bmatrix}$$

wenn wir wie oben mit  $\sigma_1$  die größte Druckspannung bezeichnen. Die Probekörper verlängern sich unter dem beschriebenen Spannungszustand proportional der Entlastung in axialer Richtung, wobei gleichzeitig der Zylinderradius verkleinert wird, so lange, bis die Fließgrenze erreicht ist. Dieses Ergebnis liefert uns die zweite der gesuchten fünf Gleichungen, es ist:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 - p \end{Bmatrix} = 2G \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 - p & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 - p \end{Bmatrix}.$$

Bei weiterer Entlastung beginnt eine plastische Verformung, die sich jedoch selbst bei hohen hydrostatischen Drucken fast allein auf die Korngrenzen beschränkt und dementsprechend nur wenige Gleitflächen liefert, die einen kleinen Winkel mit der Richtung der größten Druckspannung einschließen. Aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm Fig. 2 ist zu erkennen, daß wohl die Fließgrenze mit dem hydrostatischen Druck ansteigt, daß jedoch die Verfestigung eine erheblich kleinere Rolle spielt als bei den v. Kármánschen Versuchen. Es zeigt sich also, daß der spezielle Charakter des Spannungsdeviators einen starken Einfluß auf den Ablauf der Deformation ausübt.

Schließlich seien noch die Ergebnisse der ebenfalls von Böker ausgeführten Torsionsversuche an Marmorzylindern unter verschiedenen hydrostatischen Drucken erwähnt. Es zeigte sich, daß einer reinen Schubspannung im wesentlichen eine reine Schiebung entspricht, die der jeweiligen Schubspannung etwa proportional ist. Oberhalb der Fließgrenze entstehen schraubenförmige Gleitflächen, die symmetrisch zur Richtung der größten Druckspannung liegen und, ähnlich wie bei den Druckversuchen, mit dieser einen spitzen Winkel bilden. Wir erhalten hieraus als dritte Gleichung:

$$\begin{Bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Da also in drei verschiedenen Fällen die Spannungs- und Formänderungsdeviatoren den gleichen Bau besitzen, ist der Schluß erlaubt, daß auch im allgemeinsten Fall die Beziehung:

$$S_0 = 2G \cdot E_0 \dots \dots \dots (3)$$

mit genügender Genauigkeit erfüllt ist.

**IV. Die Fließgrenze.** Wenn wir versuchen, die in den Diagrammen Fig. 1 und 2 erkennbaren Fließgrenzen für entsprechende hydrostatische Drücke zu vergleichen, so ergeben sich Differenzen, die weit aus den Fehlergrenzen herausfallen, weil bei der Auftragung der Einfluß der mittleren Hauptspannung vernachlässigt wurde. Streng genommen genügt die Charakterisierung der Fließgrenze durch die Differenz zweier Hauptspannungen ebensowenig, wie man die Größe des herrschenden hydrostatischen Druckes aus der Summe von nur zwei Hauptspannungen berechnen kann. Noch schwieriger wird die Aufgabe, die Fließgrenze zu definieren, wenn außer den Normalspannungen auch noch Schubspannungen in dem betrachteten Material auftreten. Wir müssen hierzu einen Ausdruck finden, der sämtliche Komponenten des Spannungsdeviators in richtiger Weise berücksichtigt und außerdem eine skalare Funktion desselben darstellt, denn die Lage der Fließgrenze ist naturgemäß von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Die Erfahrung lehrt nun, daß bei der Beanspruchung von Metallen die plastische Verformung dann beginnt, wenn die Gestaltänderungsarbeit einen gewissen Betrag erreicht hat. Diesem Erfahrungssatz kann man einen realen physikalischen Sinn beilegen: Durch die bei der

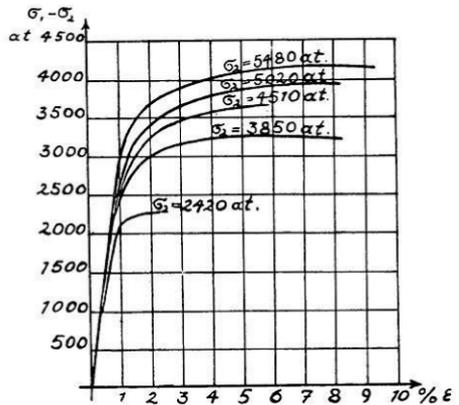


Fig. 2. Formänderungskurven des Marmors bei Zugversuchen unter allseitigem Druck nach R. Böker (1915)

Deformation aufgewandte Arbeit wird die potentielle Energie des Materials erhöht, in dem die gegenseitigen Abstände der Gitterpunkte verändert werden und das elektrostatische Gleichgewicht in den Kristallen oder an den Kristallgrenzen Störungen erleidet. Jedes Material kann nur einen bestimmten Betrag

von potentieller Energie ertragen. Wird dieser überschritten, so beginnt die plastische Verformung in Form von Verschiebungen der Kristallite an den Korngrenzen oder von Netzebenen innerhalb der Kristalle gegeneinander. Dieses Gesetz gilt nun auch, wie zuerst F. Schleicher (1926) gezeigt hat, für Gesteinsmaterial, mit dem Unterschied, daß der Wert der Gestaltänderungsarbeit an der Fließgrenze vom hydrostatischen Druck abhängig ist. Die spezielle Form dieses Zusammenhanges soll hier nicht diskutiert werden. Die Gestaltänderungsarbeit im elastischen Gebiet hat den Wert:

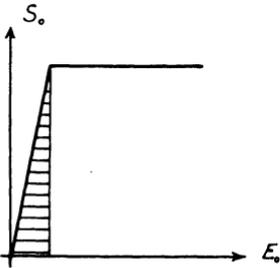


Fig. 3. Idealisertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Das schraffierte Gebiet stellt die elastische Gestaltänderungsarbeit dar

$$A = \int_0^{E_0} S_0 \dots dE_0 = \frac{1}{2} S_0 \dots E_0^* \dots \dots \dots (4)$$

Anschaulich stellt sie in der \$S\_0 - E\_0\$-Ebene den unter dem elastischen Teil der Festigkeitskurve gelegenen Flächeninhalt dar (s. Fig. 3). Führt man in (4) die Beziehung (3) ein, so folgt:

$$A = \frac{1}{4G} \cdot S_0^3 = C(p) \dots \dots \dots (4a)$$

Wenn wir den Schubmodul zur Konstanten hinzuziehen, so lautet die Fließbedingung, die den Gültigkeitsbereich der Gleichung (3) einschränkt:

$$S_0^2 = C(p) \dots \dots \dots (4b)$$

worin \$C(p)\$ eine nur vom hydrostatischen Druck abhängige Funktion darstellt. H. Hencky (1924) verglich die einem Körper zugeführte Gestaltänderungsarbeit mit einer Flüssigkeit, die in ein Gefäß gegossen wird, dessen Inhalt dem Fassungsvermögen des betreffenden Materials an potentieller Energie entspricht. Wie die Flüssigkeit überläuft, wenn das Gefäß gefüllt ist, so verformt sich die Substanz plastisch, wenn die zugeführte Arbeit einen gewissen Betrag überschreitet.

**V. Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit** geben uns die beschriebenen Versuche keine Auskunft, weil, wie wir weiter unten sehen werden, die Zeitkonstanten des Gesteinsmaterials sehr groß sind gegenüber den Zeiten, in denen die Experimente durchgeführt wurden. Aus dem gleichen Grunde stößt auch eine Erweiterung unserer Beziehungen mit experimentellen Methoden auf große Schwierigkeiten. Es wurde daher die allgemeine Form der gesuchten

\*) Die Bezeichnung \$S\_0 \dots E\_0\$ bedeutet das skalare Produkt zweier Tensoren. (Vgl. Lagally: „Einführung in die Vektorrechnung“.)

Beziehung zwischen Spannung und Versuchsgeschwindigkeit zunächst an einem Material bestimmt, daß ein ähnliches zeitunabhängiges Verhalten aufweist wie die Gesteine, dessen Zeitkonstanten jedoch so klein sind, daß ihr Einfluß unter normalen Laboratoriumsbedingungen unschwer festgestellt werden kann. Hierzu wurde der von H. Cloos (1928) zu tektonischen Experimenten verwandte plastische Ton benutzt, der die genannten Voraussetzungen erfüllt. Eine ausführliche Beschreibung der Versuchseinrichtungen und -ergebnisse soll in Kürze in anderem Zusammenhang gegeben werden, hier seien nur die zur Lösung unserer Aufgabe wichtigen Resultate herangezogen.

Es zeigte sich, daß für plastischen Ton in erster Näherung das Maxwellsche Gesetz gilt:

$$S_0 = 2G \cdot E_0 - \frac{1}{\beta} \int_0^t S_0 dt \dots \dots \dots (5)$$

worin  $\beta$  eine Materialkonstante, die sogenannte Relaxationszeit darstellt. Eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung des Maxwellschen Ansatzes erhalten wir durch folgende Überlegung: Wie oben erwähnt, wird durch eine elastische Deformation in einer Substanz der Abstand der Massenteilchen verändert und das elektrostatische Gleichgewicht gestört. Die Massenteilchen führen nun dauernd Wärmeschwingungen aus (Brownsche Bewegungen beim Ton), deren Amplitude um einen von der absoluten Temperatur des Materials abhängigen Mittelwert schwankt. (Der Temperatur entspricht beim Ton der Wassergehalt.) Lassen wir nun einen Spannungszustand lange Zeit hindurch einwirken, so wird die Schwingungsamplitude jedes Massenpunktes einmal so groß werden können, daß er in eine neue Gleichgewichtslage hinüberspringt, in der der durch die Spannung ausgeübte mechanische Zwang geringer ist. Die Wahrscheinlichkeit dieses Vorganges läßt sich berechnen. Er wird bei einer bestimmten Spannung um so häufiger eintreten, je größer diese ist und je länger sie einwirkt\*).

Durch Differentiation erhalten wir aus Gleichung (5):

$$S_0 = 2G \cdot \beta \cdot \dot{E}_0 - \beta \cdot \dot{S}_0 \dots \dots \dots (5a)$$

Nehmen wir an, daß die Geschwindigkeit  $\dot{E}_0$  konstant ist, so können wir die Lösung der Differentialgleichung ohne weiteres anschreiben:

$$S_0 = 2G \cdot \beta \cdot \dot{E}_0 \cdot (1 - e^{-t/\beta}) \dots \dots \dots (5b)$$

---

\*) Die gittertheoretische Vorstellung, die dem Maxwellschen Ansatz zugrunde gelegt wurde, geht auf Gedanken zurück, die L. Prandtl (1928) in seinem „Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper“ äußerte. Sie ist nicht als „Erklärung“, sondern mehr als ein Bild aufzufassen, mit dessen Hilfe die Möglichkeit eines solchen Vorganges veranschaulicht werden soll. Mit gleichem Recht kann man dem Ansatz auch andere Bilder unterlegen, wie es kürzlich Jeffreys (1932) getan hat, der dasselbe Gesetz aus der Kombination eines elastischen Körpers und einer zähen Flüssigkeit ableitete. Die Berechtigung des oben angeschriebenen Gesetzes ergibt sich allein aus den Versuchsergebnissen.

Die Bedeutung des Produktes  $G \cdot \beta$  ergibt sich, wenn wir die Versuchszeit sehr groß werden lassen, dann strebt das Glied  $e^{-t/\beta} \rightarrow 0$  und wir erhalten:

$$S_0 = 2 G \cdot \beta \cdot \dot{E}_0 \dots \dots \dots (6)$$

einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Geschwindigkeit. In Anlehnung an die physikalische Bezeichnungsweise definieren wir den Proportionalitätsfaktor zwischen beiden Größen als Zähigkeit:

$$\mu = G \cdot \beta = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{S_0}{2 \dot{E}_0} \dots \dots \dots (6a)$$

Die Relaxationszeit  $\beta$  ist, wie aus Gleichung (5b) zu erkennen ist, ein Maß für die Zeit, die vergeht, bis sich in dem Material der durch Gleichung (6) charakterisierte Zusammenhang eingestellt hat oder anders ausgedrückt, bis sich die dem aufgetragten Spannungszustand entsprechende Geschwindigkeit eingestellt hat.

Die groben Unterschiede der mechanischen Eigenschaften verschiedener Substanzen, die von den menschlichen Sinnesorganen wahrgenommen werden, lassen sich kontinuumsmechanisch als Unterschiede der Relaxationszeit deuten: Ist in dem betrachteten Material  $\beta$  sehr groß für menschliche Maßstäbe, so wird in Gleichung (5b)  $e^{-t/\beta} = 1$  der gesamte Klammerausdruck also gleich 0, d. h. die Spannung hängt nicht mehr mit der Geschwindigkeit zusammen, wir können deren Einfluß vernachlässigen und erhalten nach Gleichung (5a) das Hookesche Elastizitätsgesetz.

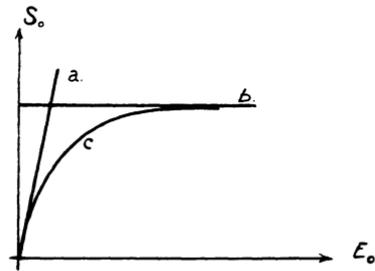


Fig. 4. Formänderungskurven dreier Stoffe mit verschiedener Relaxationszeit, aber gleicher Zähigkeit bei gleicher Deformationsgeschwindigkeit.

- a) Ideal elastischer Körper,  $\beta \gg t$ ;
- b) Ideale zähe Flüssigkeit,  $\beta \ll t$ ;
- c) Maxwell'scher Körper,  $\beta \approx t$

Die rechnerische Behandlung hierher gehöriger Stoffe ist eine Aufgabe der Elastizitätstheorie bzw. der Plastizitätstheorie, wenn die Fließgrenze überschritten ist (s. Fig. 4a).

Wird umgekehrt  $\beta$  sehr klein, so strebt  $e^{-t/\beta} \rightarrow 0$ , wir erhalten daher, wie oben dargestellt, eine zähe Flüssigkeit (z. B. Teer oder Siegellack). Die Bewegungsgleichungen dieser Stoffe werden in der Hydrodynamik abgeleitet und diskutiert. Daß eine Fließgrenze auftritt, ist aus weiter unten angegebenen Gründen nicht wahrscheinlich. Die Spannungs-Dehnungsdiagramme haben die Form von Fig. 4b.

Der dritte Fall, daß  $\beta$  von der gleichen Größenordnung ist wie die Deformationsgeschwindigkeit, wurde theoretisch bislang noch nicht eingehend studiert, da das praktische Interesse an Stoffen mit dieser Eigenschaft verhältnismäßig gering ist. Einen Eindruck vom Verlauf der Festigkeitskurve gibt Fig. 4c. Die Tangente im Nullpunkt stellt den Schubmodul dar, sie fällt daher mit der Kurve 4a zusammen. Bei sehr großen Geschwindigkeiten nähert sich die Kurve asymptotisch

derjenigen der zähen Flüssigkeit. Ein solches Verhalten wurde bei plastischem Ton, Plastilin, Barytschlamm, Chatterton-Compound u. a. durch Laboratoriumsversuche nachgewiesen. In diese Gruppe gehören auch die Gesteine hinein, wenn sie mit der Geschwindigkeit tektonischer Vorgänge verformt werden.

**VI. Erweiterung der Fließbedingung für sehr kleine Deformationsgeschwindigkeiten.** Diese allgemeinen Erfahrungen an verschiedenen Scheinkontinua geben uns Anhaltspunkte dafür, in welcher Weise die aus dem Kármán-Böckerschen Versuchen gewonnenen Gleichungen zu modifizieren sind, wenn wir sie auf tektonische Vorgänge übertragen wollen. Wir fragen weiter: Welchen Einfluß hat diese Erweiterung auf die Lage der Fließgrenze? Halten wir daran fest, daß beim Beginn plastischer Verformung die aufgespeicherte potentielle Energie eine bestimmte Größe besitzt, so müssen wir in die Gleichung (4) für die Gestaltänderungsarbeit an Stelle Gleichung (3) die Beziehung (5a) einführen. Wir erhalten hierbei den Ausdruck:

$$A = 2 \mu \cdot \dot{E}_0^2 (t + \beta \cdot e^{-t/\beta} - \beta) \dots \dots \dots (7)$$

Die anschauliche Bedeutung dieser Formel ergibt sich aus folgender Überlegung: Es wurde oben gezeigt, daß die Gestaltänderungsarbeit durch den Inhalt der

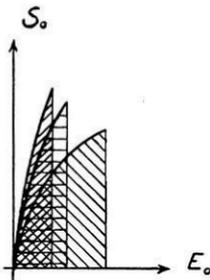


Fig. 5. Gleiche Gestaltänderungsarbeit (schraffiertes Gebiet) bei der Deformation eines Maxwell'schen Körpers unter verschiedenen Geschwindigkeiten

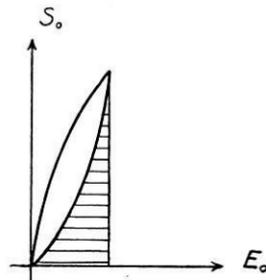


Fig. 6. Belastungs- und Entlastungskurve eines Maxwell'schen Körpers. Schraffiert: Die bei der Entlastung wiedergewinnbare Arbeit

Fläche zwischen dem Spannungs-Dehnungsdiagramm und der Abszisse dargestellt werden kann. Unsere Fließbedingung verlangt nun, daß die plastische Deformation dann beginnen soll, wenn dieser Flächeninhalt eine bestimmte Größe erreicht hat. Zeichnen wir uns die  $S_0 - E_0$ -Diagramme für verschiedene Geschwindigkeiten auf, so erhalten wir das Bild Fig. 5, aus dem hervorgeht, daß die Fließgrenze um so höher liegt, je größer die Geschwindigkeit ist, während die zum Fließen notwendige Verformung im gleichen Maße abnimmt. Der Grenzwert ist offenbar erreicht, wenn die Kurve gradlinig in Richtung der Anfangstangente verläuft. In diesem Falle gilt das Elastizitätsgesetz und die Gleichungen (4) ergeben sich als Spezialfall für sehr große Geschwindigkeiten aus unserer verallgemeinerten Fließbedingung.

Berücksichtigt man, daß nicht die gesamte Arbeit in Form von potentieller Energie aufgespeichert wird, sondern ein Teil derselben durch Zähigkeitseinflüsse verlorengeht, so darf nur der bei der Entlastung wiedergewinnbare Arbeitsbetrag in Rechnung gestellt werden (s. Fig. 6). Die Gleichung (7) erhält dann die Form:

$$A = 2 \mu \cdot \dot{E}_0^2 (\beta - (t + \beta) \cdot e^{-t/\beta}) \dots \dots \dots (7a)$$

Der geschilderte Effekt der Änderung der Fließspannung und Fließdehnung mit der Geschwindigkeit wird durch diese Korrektur vermindert, aber nicht aufgehoben. Aus diesem Gesetz, daß durch die mechanische Untersuchung des plastischen Tones bestätigt wurde, läßt sich die Folgerung ziehen, daß unterhalb einer gewissen Geschwindigkeit die aufgespeicherte potentielle Energie nicht genügt, um die Fließgrenze zu erreichen. In diesem Falle kann die Substanz stark verformt werden, ohne daß Gleitflächen auftreten (als zähe Flüssigkeit). Mit anderen Worten, es muß eine bestimmte Arbeit pro Zeiteinheit geleistet werden, um die mit bedeutenden Strukturänderungen verbundene plastische Verformung zu ermöglichen. Man kann also die Fließgrenze durch Verringerung der Geschwindigkeit nicht beliebig weit herabdrücken, wie sie andererseits auch nicht durch Erhöhung der Geschwindigkeit über einen gewissen Wert hinaus gesteigert werden kann. Eine anschauliche Vorstellung von dem geschilderten Verhalten gibt das oben erwähnte Gleichnis von H. Hencky. Wir brauchen nur anzunehmen, daß das Gefäß, dessen Inhalt die Energieaufnahmefähigkeit des betrachteten Materials repräsentiert, an seinem Boden ein Loch besitzt, durch das eine gewisse Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit abströmen kann. Man wird in diesem Falle die Flüssigkeit mit einer gewissen Mindestgeschwindigkeit eingießen müssen, um das Gefäß überhaupt füllen zu können.

Wir haben erkannt, daß die Fließgrenze bei Gesteinen vom hydrostatischen Druck und von der Geschwindigkeit abhängig sein kann. Über den Charakter dieser Beziehungen können wir uns bislang nur sehr allgemeine Vorstellungen machen, die sich kurvenmäßig veranschaulichen lassen, wenn wir den Einfluß der mittleren Hauptspannung vernachlässigen. Wir benutzen hierzu die von O. Mohr (1906) vorgeschlagene Darstellung, indem wir die Normalspannungen eines bestimmten Spannungszustandes als Abszisse, die zugehörigen Schubspannungen als Ordinaten in einem Koordinatensystem abtragen. Besitzt nun das betrachtete Material eine Fließgrenze, so besagt das, daß nicht jeder Spannungszustand in ihm möglich ist. Es muß daher eine Grenzkurve geben, die die möglichen Spannungszustände von den unerträglichen trennt. Wir erhalten diese Kurve für das Gesteinsmaterial dadurch, daß wir für jeden Kármánschen Versuch die an der Fließgrenze herrschenden Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf der Abszisse abtragen und einen Kreis schlagen, dessen Mittelpunkt auf der Abszisse liegt und der durch die beiden Punkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  geht. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat dann die Koordinaten  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ , sein Abstand vom Nullpunkt ist daher ein Maß für den hydrostatischen Druck. Der Kreisradius hat die Länge  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{\max.}$  und ist der Fließspannung  $\sigma_n = \sigma_1 - \sigma_2$  proportional

(Fig. 7). Die Hüllkurve an sämtliche „Spannungskreise“ ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen hydrostatischem Druck und Fließgrenze. Fig. 7 zeigt, daß die Fließgrenze bei niederen hydrostatischen Drücken sehr stark veränderlich ist; bei höheren nähert sie sich asymptotisch einem Grenzwert, so daß für  $\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) > 4000$  at als konstant angesehen werden kann. Da die Ordinate des Punktes, in dem die Hüllkurve einen bestimmten Spannungskreis berührt, die zum Fließen notwendige Schubspannung  $\tau_{fl.}$  angibt, folgt aus Fig. 7 weiter, daß im allgemeinen nur ein Bruchteil der vorhandenen maximalen Schubspannung ausreicht, um die Fließgrenze zu überschreiten, nämlich  $\tau_{fl.} = \tau_{max.} \cdot \sin 2\alpha$ , wobei  $2\alpha$  den Winkel darstellt, den die Normale auf die Grenzkurve an der betrachteten Stelle mit der Abszisse bildet. Da nun nach der Elastizitätstheorie eine Schubspannung von der Größe  $\tau_{fl.} = \tau_{max.} \cdot \sin 2\alpha$  in einer Ebene auftritt, die um den Winkel  $\alpha$  gegen die Richtung der größten Druckspannung geneigt ist, so muß  $\alpha$  auch der Winkel sein, den die Gleitflächen mit der Richtung der größten Druckspannung bilden. Wir können daher aus der Mohrschen Hüllkurve (Fig. 7) den Winkel der Gleitflächen mit der Hauptdruckrichtung ablesen. Es muß  $\alpha$  danach mit wachsendem hydrostatischem Druck größer werden und maximal  $45^\circ$  erreichen, was mit den Ergebnissen der Kármánschen Versuche übereinstimmt.

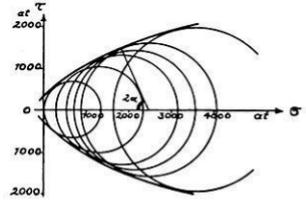


Fig. 7. Fließgrenze des Marmors in der Mohrschen Darstellung nach Th. v. Kármán (1912)

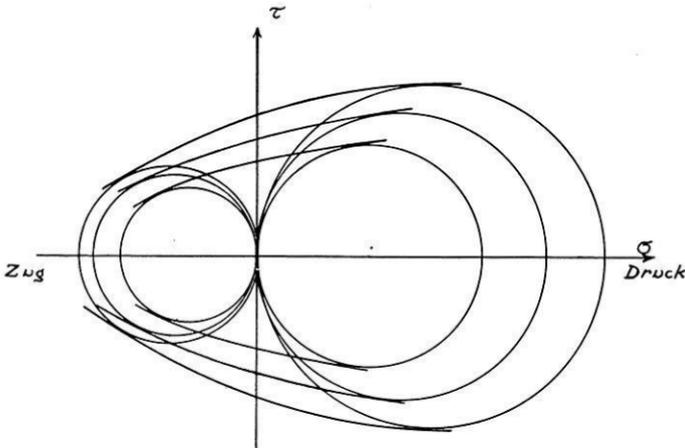


Fig. 8. Fließgrenzen des plastischen Tons bei verschiedenen Versuchsgeschwindigkeiten

Tragen wir in ähnlicher Weise die Ergebnisse der Tonversuche in einer Mohrschen Ebene auf, so ergibt sich das Bild Fig. 8, das die Hüllkurven für verschiedene Versuchsgeschwindigkeiten zeigt. Die Kurven sind um so weniger gekrümmt, je langsamer das Material verformt wird, d. h. der Winkel der Gleitflächen mit

der Richtung der größten Druckspannung wächst bei kleinen Geschwindigkeiten in geringerem Maße an, wenn der hydrostatische Druck erhöht wird, als bei großen Geschwindigkeiten. Bei gleichem Spannungszustand wird daher dieser Winkel um so größer sein, je höher die Versuchsgeschwindigkeit ist. Dieses Ergebnis stimmt mit den Beobachtungen an plastischem Ton gut überein. Es kann also durch eine Steigerung der Geschwindigkeit der gleiche Effekt erzielt werden wie durch eine Erhöhung des hydrostatischen Druckes. Diese Erscheinung kann man sich bei tektonischen Modellversuchen zunutze machen.

**VII. Der plastische Zustand** unterscheidet sich von dem bisher betrachteten Verhalten im wesentlichen dadurch, daß die Deformation auf wenige flächenhafte Zonen geringer Breite konzentriert ist. Die Bewegungen längs den Gleitflächen erfolgen ähnlich wie bei Einkristallen und Kristallhauwerken auch bei tektonischen Vorgängen ruckweise, wie aus dem Auftreten von Erdbebenwellen hervorgeht. Die Analyse des Bewegungsvorganges ist im einzelnen noch nicht möglich, man kann jedoch annehmen, daß einer Verschiebung zweier durch eine Gleitfläche getrennter Blöcke gegeneinander ein Widerstand von der Art der Flüssigkeitsreibung entgegensteht [H. Hencky (1925)], so daß die Bewegung um so schneller erfolgt, je mehr die Schubspannung  $\tau$  längs der Gleitfläche die Fließschubspannung  $\tau_0$  übersteigt. Wir erhalten hieraus für den Gesamtkörper die Beziehung:

$$\tau - \tau_0 = \mu_1 \cdot \dot{\gamma}, \dots \dots \dots (8)$$

worin sich die Zähigkeit mit der Anzahl der pro Raumeinheit vorhandenen Scherflächen ändert und deshalb als eine Funktion des hydrostatischen Druckes und der Geschwindigkeit angesehen werden muß. Der Wert von  $\mu_1$  wird bei Gesteinen praktisch so klein werden, daß er die Größe der Spannungen nur wenig beeinflußt und ohne großen Fehler vernachlässigt werden kann. Wollen wir die Gleichung (8) tensoriell verallgemeinern, so müssen wir sie zuvor auf die Form bringen:

$$\tau \left( 1 - \frac{|\tau_0|}{|\tau|} \right) = \mu_1 \cdot \dot{\gamma},$$

da sich  $\tau_0$  nicht ohne weiteres durch eine tensorielle Größe ersetzen läßt. In der letzten Formel können wir  $\tau$  durch die oben abgeleitete Fließbedingung  $S_0^2 = C(p, \dot{E}_0)$  ersetzen und erhalten, da  $S_0^2$  für reine Schubspannung  $= \tau^2$  wird:

$$S_0 \left( 1 - \frac{\tau_0}{\sqrt{S_0^2}} \right) = 2 \mu_1 \cdot \dot{E}_0 \dots \dots \dots (8a)$$

Lassen wir jetzt  $\mu_1 \rightarrow 0$  streben, so muß auch der Klammerausdruck verschwinden, und es folgt:

$$S_0 = 2 \lambda \cdot \dot{E}_0 \dots \dots \dots (8b)$$

Die Gleichung des St. Venant-Misesschen plastischen Körpers [R. v. Mises (1913)], in der  $\lambda$  für den unbestimmten Faktor 0/0 eingesetzt wurde. Die Tensor-

gleichung (8b) ersetzt fünf skalare Gleichungen mit insgesamt sechs Unbekannten einschließlich  $\lambda$ . Als sechste Gleichung kommt noch die Fließbedingung:

$$S_0^2 = \tau_0^2 \dots \dots \dots (8c)$$

hinzu, so daß die Gleichungen (8b) und (8c) die vollständige Lösung des Plastizitätsproblems darstellen, wenn man noch beachtet, daß  $\tau_0$  in der oben diskutierten Weise vom hydrostatischen Druck und der Geschwindigkeit abhängt. Wie K. Hohenemser und W. Prager (1932) zeigten, ist das Misessche Gesetz bei Flußstahl nach sehr großen plastischen Verformungen gut erfüllt, während bei geringeren Deformationen ein Einfluß der Elastizität bemerkbar wird. Wie weit dies auch für Gesteine zutrifft, muß durch weitere Versuche entschieden werden\*). Für viele Spezialprobleme der Tektonik wird das Misessche Gesetz brauchbare Resultate liefern.

**VIII. Die Größenordnung der Materialkonstanten.** Die Zähigkeit der Erdkruste wurde näherungsweise von Frey und Jeffreys bestimmt: Frey legte den Wert zugrunde, den die Zähigkeit zur Zeit der Mondablösung von der Erde nach der Darwinschen Theorie besessen haben muß und errechnete hieraus unter Berücksichtigung der Abkühlung der Erde für die Zeit seit dem Kambrium den Wert  $\mu > 10^{13}$  kg . sec/cm<sup>2</sup>. Jeffreys geht von der Tatsache aus, daß die Polbewegung der Erde in den letzten 30 Jahren keine Dämpfung erfahren hat und folgert, daß die Zähigkeit  $\mu > 10^{16}$  kg . sec/cm<sup>2</sup> sein muß. Weinberg (1927), der die Zähigkeit eines Kalkspatrhomboeders experimentell bestimmte, erhielt den gleichen Wert wie Frey. Wir wollen im folgenden für unsere Rechnungen den von Jeffreys angegebenen Minimalwert von  $\mu = 10^{16}$  kg . sec/cm<sup>2</sup> benutzen.

Der Schubmodul der Gesteine ist aus zahlreichen technischen Festigkeitsversuchen bekannt. Er beträgt im Durchschnitt  $G = 2 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>. Aus der Zähigkeit und dem Schubmodul errechnet sich die Relaxationszeit nach Formel (6a) zu  $\beta = 5 \cdot 10^{10}$  sec. Die Fließgrenze  $\tau_0$  schließlich erhalten wir, wenn wir in die Gleichung (8c) die von Kármán und Böker gefundenen Werte einsetzen. Für die dort verwandten Spannungszustände wird  $S_0^2 = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)^2$ , also  $\tau_0 = \pm (\sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Es ergibt sich hierbei für einen hydrostatischen Druck von  $p = 3 \cdot 10^3$  kg/cm<sup>2</sup>:  $\tau_0 = 3 \cdot 10^3$  kg/cm<sup>2</sup>, für  $p = 1.7 \cdot 10^3$  kg/cm<sup>2</sup>:  $\tau_0 = 2 \cdot 10^3$  kg/cm<sup>2</sup>. Die zum Beginn des Fließens notwendige Gestaltänderungsarbeit beträgt pro Kubikzentimeter:  $A = 16$  bzw.  $8$  cm . kg.

**IX. Allgemeintektonische Folgerungen.** Die in den letzten Kapiteln abgeleiteten Gesetze über das mechanische Verhalten der Gesteine enthalten

---

\*) Der Rückschluß von experimentellen Erfahrungen an plastischem Ton auf das Verhalten der Gesteine ist in diesem Falle nicht ohne weiteres möglich, weil beim Ton auch oberhalb der Fließgrenze Relaxations- und Zähigkeitserscheinungen einen wesentlichen Einfluß besitzen, so daß sie nicht ohne weiteres vernachlässigt werden können.

nur Beziehungen zwischen den Spannungen und den resultierenden Deformationsgeschwindigkeiten, das bedeutet, jeder Spannungszustand in der Erdkruste erzeugt einen Deformationsvorgang, der so lange anhält, wie die Spannung auf das Material einwirkt. Die Geschwindigkeit und die Form des Prozesses hängen von dem speziellen Charakter des Spannungszustandes, von der Tiefe, in der der Vorgang sich abspielt, und von der Energiemenge ab, die dem Material zugeführt wird. Erreicht diese letzte einen bestimmten, von den ersten beiden Faktoren abhängigen Betrag, so treten Verwerfungen oder starke innerkristalline Strukturänderungen, eventuell auch beide Erscheinungen kombiniert auf, wobei die Geschwindigkeit der Deformation plötzlich stark erhöht wird. Diese Vorgänge entsprechen den Orogenesen H. Stilles. Sie werden mit einer weiter unten erwähnten Einschränkung durch die Gleichungen (8b) und (8c) beschrieben.

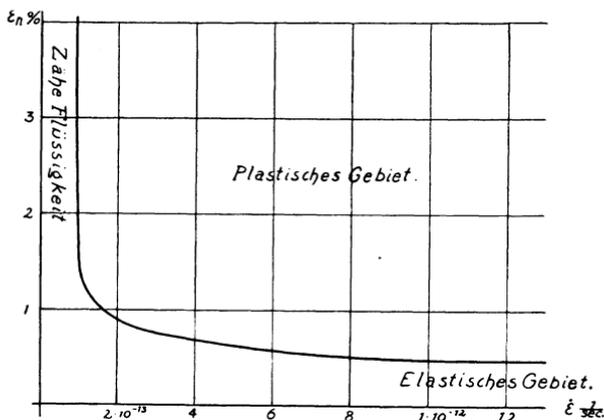


Fig. 9. Fließdehnung der Gesteine bei Druck- oder Zugbeanspruchung als Funktion der Deformationsgeschwindigkeit unter 1700 at hydrostatischen Druck

Erreicht die aufgespeicherte Energiemenge den Grenzwert nicht, so verursachen die Bewegungen keine merklichen Strukturänderungen und die Geschwindigkeiten sind den herrschenden Spannungen proportional, sobald sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Diese Prozesse, die durch die Gleichung (5b) beschrieben werden, sind den Epirogenesen Stilles gleichzusetzen. Mit Hilfe der oben [Gleichung (7a)] diskutierten Fließbedingungen und den im VIII. Abschnitt zusammengestellten Werten können wir berechnen, in welchen Geschwindigkeitsbereich die Grenzen zwischen orogenen und epirogenen Vorgängen fallen. In Fig. 9 ist der Zusammenhang zwischen Fließdehnung und Deformationsgeschwindigkeit bei Zug- oder Druckbeanspruchung unter 1700 Atm. hydrostatischen Druck dargestellt, wie er sich aus den vorhandenen Daten ergibt. Das Diagramm zeigt, daß bei einer Geschwindigkeit unterhalb  $0.9 \cdot 10^{-13}$  1/sec die Fließgrenze nie erreicht wird, d. h. daß tektonische Bewegungen, durch die ein Teil der Erdkruste in weniger als 30000 Jahren um 10% seiner Länge gedehnt wird, epirogenen

Charakter haben, also keine Neubildung von Verwerfungen zur Folge haben können. Gehen die Deformationen rascher vor sich, so wird nach höchstens 1.5% Dehnung die Fließgrenze überschritten und der Vorgang nimmt die für Orogenesen bezeichnenden Formen an. Die an der Fließgrenze herrschende Spannung verändert sich, wie die Rechnung zeigt, mit abnehmender Geschwindigkeit nur um wenige Prozent, so daß auch bei tektonischen Prozessen unter etwa 1700 at hydrostatischen Druck eine Spannung von etwa 2000 at notwendig ist, um orogene Deformationen einzuleiten. Diese letzten erfordern demnach eine Leistung von mindestens  $7.5 \cdot 10^{-10}$  Watt pro Kubikzentimeter oder 550 Pferdekkräfte pro Kubikkilometer, die von den tektonischen Kräften aufgebracht werden muß. Die berechneten Größen stellen Durchschnittswerte aus verschiedenen, von der Gesteinsbeschaffenheit, der Vorgeschichte des Materials und dem hydrostatischen Druck abhängigen Daten dar. Merklich verschieden von der Hauptmasse der Gesteine verhalten sich außer den sehr mobilen Salzen vor allem tonreiche Gesteine.

Der Übersichtlichkeit halber wurde bei der Darstellung stets konstante Formänderungsgeschwindigkeit oder konstante Spannung angenommen. In der Natur werden sich beide Faktoren zeitlich verändern. Wächst beispielsweise die Größe der tektonischen Kräfte langsam an, so werden anfangs epirogene Bewegungen stattfinden, die in dem Augenblick orogenen Charakter annehmen, in dem die Fließgrenze erreicht ist. So sind die von H. Cloos, S. v. Bubnoff u. a. oft betonten Übergänge zwischen beiden Grundformen tektonischer Bewegungen, besonders an der Schwelle orogener Phasen, zu erklären.

Der hydrostatische Druck ändert sich mit der Tiefe, in der sich der Vorgang abspielt, und mit der speziellen Form des Spannungszustandes. Nur bei reiner Schubspannung ist er dem Gewicht der auflastenden Gesteinsmasse gleichzusetzen. Durch Druckspannungen in der Erdkruste wird er erhöht, durch Zugspannungen erniedrigt. Es ist daher möglich, daß das Deformationsbild in der gleichen Tiefenzone einen sehr verschiedenen Charakter zeigt, je nachdem ob der betreffende Krustenstreifen gedehnt oder zusammengepreßt wurde. Besonders eindrucksvoll werden die Unterschiede dadurch, daß die Verfestigung mit wachsendem hydrostatischem Druck an Einfluß gewinnt (vgl. Fig. 1 und 2), denn einerseits verteilen sich die Deformationen um so gleichmäßiger auf das ganze Material, je mehr die Substanz oberhalb der Fließgrenze verfestigt wird, andererseits besteht die Möglichkeit, daß bei Druckbeanspruchung infolge der Verfestigung die Knickgrenze erreicht wird und Biegefalten entstehen. So kann ein Krustenstreifen durch horizontale Druckspannungen fast „bruchlos“ gefaltet werden, während die infolge der Hochwölbung senkrecht zum Streichen entstandenen Zugspannungen die zahllosen Querverwerfungen erzeugen, die auf jeder geologischen Karte eines Faltengebirges erkennbar sind. Sieht man von der Modifikation des Deformationsbildes durch die spezielle Form des Spannungszustandes ab, so kann man die in den ersten Abschnitten diskutierten Ergebnisse zu einer groben Tiefengliederung tektonischer Vorgänge verwenden:

In der obersten Zone der Erdkruste (bis etwa 1000 m Tiefe) liegt die Fließgrenze verhältnismäßig niedrig. Wird sie überschritten, so entstehen sehr wenig Gleitflächen, längs denen der Zusammenhang des Materials unter Mylonitbildung weitgehend zerstört wird. Auf diese Flächen konzentriert sich die ganze Deformation. Durch reine horizontale Druckbeanspruchungen erzeugte Überschiebungen liegen sehr flach, reine Zugbeanspruchungen verursachen steile Verwerfungen. In der darunter folgenden Zone (1000 bis etwa 4000 m) herrschen ideal plastische Deformationen vor, bei denen sich die Bewegungen ebenfalls noch auf wenige Scherflächen konzentrieren, ohne daß sich der Zusammenhalt längs diesen merklich vermindert, weil auch innerkristalline Vorgänge an ihrer Entstehung beteiligt sind. Charakteristisch für diese Zone sind Horste, Gräben usw., kurz der gesamte Formenschatz der saxonischen Tektonik. Auf diese Erscheinungen sind die Gesetze der Plastizitätstheorie am leichtesten anwendbar. In noch größeren Tiefen unter der Erdoberfläche macht sich der Einfluß der Verfestigung geltend, die eine gleichmäßigere Verteilung der Verformungen auf das ganze Material bewirkt. In dieser Zone entstehen die normalen Faltengebirge. Eine strengere Behandlung solcher Gebilde müßte von Stabilitätsbetrachtungen unter Berücksichtigung der Ergebnisse der modernen Plattentheorie ausgehen. In die nächst tiefere Zone ist schließlich die Entstehung der kristallinen Schiefer zu verlegen, bei denen die Deformation vollständig in die Einzelkristalle hineinverlegt ist und infolgedessen die Verfestigung mit ihren Folgeerscheinungen eine ausschlaggebende Rolle spielt. Eine befriedigende Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen Spannung und Deformation bei der Analyse dieser Erscheinungen ist zur Zeit noch nicht möglich, so daß wir uns auf die von B. Sander und seiner Schule ausgearbeiteten rein kinematischen Methoden beschränken müssen. In dieser Zone ist auch erstmalig der Einfluß der Temperaturerhöhung auf das mechanische Verhalten des Materials sowie derjenige chemischer Umsetzungen zu berücksichtigen. Durch diese Faktoren mag die Fließgrenze herabgesetzt werden, so daß die Fließvorgänge nicht wesentlich größere Spannungen erfordern als in den oberen Zonen der Erdkruste. Gelangt das in großer Tiefe verformte Material in höhere Krustenteile, so kann es infolge der Verfestigung tektonischen Kräften größeren Widerstand entgegensetzen als jungfräuliches Material, es spielt daher die aus vielen geologischen Beispielen bekannte Rolle als „starre Masse“ oder „konsolidierter“ Block.

**X. Die Bewegungsgleichungen tektonischer Vorgänge.** Da die allgemeine Anwendung der in den ersten Abschnitten entwickelten Theorie zu geologisch vernünftigen Resultaten führt, können wir versuchen, Spezialprobleme in Angriff zu nehmen. Hierzu müssen die Gleichungen (5a) oder (8b) mit der Eulerschen Grundgleichung (1) kombiniert werden, weil uns in der Natur nicht die Geschwindigkeitstensoren, sondern nur Verschiebungsvektorfelder gegeben sind, aus denen wir die Geschwindigkeitsvektoren  $w$  bis auf einen Faktor bestimmen können. Da tektonische Vorgänge sehr langsam verlaufen, werden

Beschleunigungskräfte kaum einen merklichen Einfluß ausüben, wir können daher in (1) das Trägheitsglied  $\rho \cdot d\mathbf{w}/dt$  vernachlässigen und erhalten:

$$\operatorname{div} S + \operatorname{grad} U = 0 \dots \dots \dots (9)$$

die sogenannten Gleichgewichtsbedingungen, die in Komponentenschreibweise lauten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + X &= 0, \\ \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} + Y &= 0, \\ \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9a)$$

wenn wir mit  $X, Y, Z$  die Komponenten von  $\operatorname{grad} U$  bezeichnen. Zerlegen wir in Gleichung (9)  $S$  in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil, so folgt:

$$\operatorname{div} T \cdot p + \operatorname{div} S_0 + \operatorname{grad} U = 0$$

und, da die Divergenz eines Einheitstensors dem Gradienten entspricht:

$$\operatorname{div} S_0 + \operatorname{grad} (U + p) = 0 \dots \dots \dots (9b)$$

Wollen wir nun epirogene Vorgänge beschreiben, so müssen wir  $S_0$  durch die Gleichung (5a) eliminieren, deren vollständige Lösung lautet:

$$S_0 = \frac{2\mu}{\beta} \cdot e^{-t/\beta} \cdot \int_0^t e^{t'/\beta} \cdot \dot{E}_0 dt + S_{01} \cdot e^{-t/\beta} \dots \dots \dots (10)$$

Die Konstante  $S_{01}$  ist ein nur vom Ort abhängiger Deviator. Erfolgt die Deformation aus dem spannungslosen Zustand heraus, so wird  $S_{01} = 0$ . Wir bilden jetzt die Divergenz der Gleichung (10):

$$\operatorname{div} S_0 = \frac{2\mu}{\beta} \cdot e^{-t/\beta} \cdot \int_0^t e^{t'/\beta} \cdot \operatorname{div} \dot{E}_0 dt \dots \dots \dots (10a)$$

Für  $\operatorname{div} \dot{E}_0$  führen wir den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{w}$  ein, wobei sich ergibt:

$$\operatorname{div} \dot{E}_0 = \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{w},$$

wenn wir annehmen, daß die Kontinuitätsbedingung  $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0$  erfüllt ist, die implizit in Gleichung (2) enthalten ist. Das Zeichen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

stellt den Laplaceschen Operator dar. Den Wert (10a) setzen wir in Gleichung (9b) ein:

$$\operatorname{div} S_0 = \frac{\mu}{\beta} \cdot e^{-t/\beta} \cdot \int_0^t e^{t'/\beta} \cdot \Delta \mathbf{w} dt \dots \dots \dots (10b)$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (9b) die gesuchte Bewegungsgleichung\*) für epirogene Vorgänge:

$$\frac{\mu}{\beta} e^{-t/\beta} \cdot \int_0^t e^{t'/\beta} \cdot \Delta w \cdot dt = \text{grad} (p + U) \dots \dots \dots (11)$$

die außer den Materialkonstanten  $\mu$  und  $\beta$  nur den äußeren Druck  $p$ , das Potential der Volumenkraft  $U$  und die resultierende Geschwindigkeit  $w$  enthält. Diese Beziehung ist beispielsweise zu verwenden, wenn wir die rhythmischen Bewegungen der Meeresböden, die sich in der Schichtung und der Sedimentabfolge zu erkennen geben, mechanisch analysieren wollen.

Zur Berechnung orogener Vorgänge stehen uns außer Gleichung (9) die Beziehungen (8b), (8c) und (2) zur Verfügung, also insgesamt zehn Gleichungen mit den zehn Unbekannten:  $p_1, p_2, p_3, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  und  $\lambda$ , die im Prinzip stets lösbar sind, wenn die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit  $w$  bekannt sind. Damit ist das tektonische Problem auf ein mathematisches zurückgeführt, das hier im einzelnen nicht diskutiert werden soll.

**XI. Durchführung für ein ebenes Verzerrungsproblem.** Als Beispiel sei ein Problem behandelt, für das die oben abgeleiteten Beziehungen so einfach werden, daß die vollständige Bestimmung des Spannungszustandes durch direkte Integration möglich ist\*\*). Wir betrachten einen Teil der Erdkruste, der auf einer reibenden Unterlage (Abscherungshorizont) ruht und horizontal in einer Richtung sehr weit ausgedehnt ist (Streichrichtung), so daß wir die Verzerrungen in dieser Richtung vernachlässigen können. Es soll der Spannungszustand berechnet werden, der in dem betrachteten Bereiche herrschen muß, damit sich das Material vollständig im plastischen Zustand befindet. Legen wir die  $Z$ -Achse in die Streichrichtung, die  $X$ -Achse senkrecht dazu und die  $Y$ -Achse in die Vertikale, so können wir die Verzerrung  $\varepsilon_z = 0$  setzen. Wenn wir ferner die aus Gleichung (5) folgenden kleinen Abweichungen vom Hookeschen Gesetz (3) außer acht lassen, so gilt:  $\varepsilon_z = 1/E \cdot \left( \sigma_z - \frac{1}{m} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right) = 0$  oder  $\sigma_z = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y)$ , worin  $m$  die Poissonzahl bedeutet. Die Zahl der unbekanntenen Spannungskomponenten reduziert sich dadurch auf drei, nämlich  $\sigma_x, \sigma_y$  und  $\tau_{xy} = \tau$ . Als Massenkraft kommt nur die Schwerkraft in Frage, die in der  $Y$ -Richtung wirkt. Sie sei mit  $Y = s$  ( $s$  = spezifisches Gewicht) bezeichnet. Zur Lösung unserer Aufgabe stehen uns die Gleichgewichtsbedingungen (9a) und die Fließbedingung (8c) zur Verfügung, die für das vorliegende Problem die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y &= 0, \\ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2 &= \tau_0^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

\*) Die Diskussion der vollständigen Bewegungsgleichungen führte H. Schlechtweg (1929) durch.

\*\*\*) Die hier verwandten Lösungsmethoden gab L. Prandtl (1923) an.

Wir erhalten also drei Gleichungen mit drei Unbekannten, das Problem ist daher lösbar, ohne daß wir auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation [Gleichung (8b)] einzugehen brauchen. Die Rechnung gleicht im Prinzip der von A. Nádai (1927, S. 141) durchgeführten, weshalb hier auf eine ausführliche Darlegung verzichtet werden kann. Es ergibt sich für die Spannungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\tau_0}{a} x \pm 2\tau_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} - Y \cdot y + c, \\ \sigma_y &= \frac{\tau_0}{a} x - Y \cdot y + c, \\ \tau &= \frac{\tau_0}{a} y. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

worin  $a$  den Abstand derjenigen Ebene vom Abscherungshorizont darstellt, in der die Schubspannung  $\tau$  verschwindet (vgl. Fig. 10 und 11). Das zu diesem Spannungszustand zugehörige Gleitflächenbild kann man berechnen, wenn der

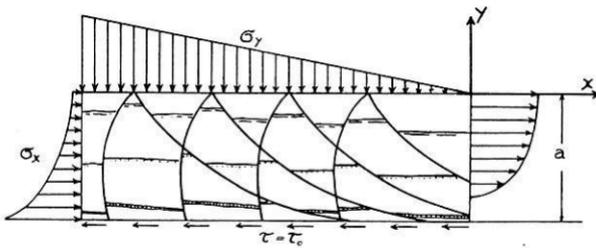


Fig. 10. Lage der Gleitflächen bei ebener plastischer Deformation von Gesteinsmaterial auf reibender Unterlage. „Aktiver Fließzustand“

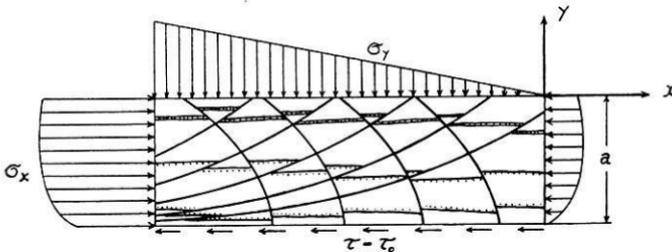


Fig. 11. Lage der Gleitflächen bei ebener plastischer Deformation von Gesteinsmaterial auf reibender Unterlage. „Passiver Fließzustand“

Winkel bekannt ist, den die Gleitlinien mit der Richtung der größten Druckspannung bilden. Dieser beträgt nach den Kármánschen Versuchen unter den in Frage kommenden hydrostatischen Drucken etwa  $35^\circ$ . Berücksichtigt man dies, so erhält man als Gleitflächen die in Fig. 10 oder 11 dargestellten Scharen von

Cykloiden, je nachdem ob man das positive oder das negative Vorzeichen vor der Wurzel in dem Ausdruck für  $\sigma_x$  berücksichtigt. Beide Bilder ähneln in hohem Maße natürlichen Profilen. So entspricht Fig. 10 dem Profil eines Grabenrandes, z. B. dem des Leinetalgrabens, dessen Randverwerfungen in der Gegend von Göttingen mit etwa  $40^\circ$  zum Graben zu einfallen (vgl. Geol. Spezialkarte 1 : 25000, Bl. Göttingen, 3. Auflage), während weiter südlich, wo die Grabenzone infolge der Aufwölbung des Werra-Grauwackengebirges so weit herausgehoben ist, daß der Gleithorizont der Zechsteinsalze entblößt ist, das entsprechende Gleitflächensystem fast horizontal verläuft. Das steile Gegensystem ist im allgemeinen schwächer ausgebildet, da es ungünstiger für die Deformation liegt, und deswegen wohl in den meisten Fällen bei der Kartierung übersehen worden. Daß es vorhanden ist, zeigt das Profil Fig. 12 durch die Zechsteinzone von Hundelshausen, die unmittelbar südlich des Kreuzungspunktes des Leinetalgrabens mit dem

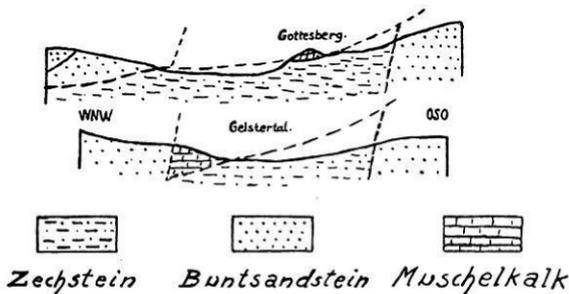


Fig. 12. Zwei Querprofile durch die Zechsteinzone von Hundelshausen (Werra-Gebirge) nach E. Schröder (1924), durch eigene Aufnahmen ergänzt

Grauwackengebirge liegt. Die Profile sind der Arbeit von E. Schröder (1924) entnommen und durch eigene Aufnahmen korrigiert. So wurde die Verwerfung, die das Zechsteingebiet nach Osten gegen den Buntsandstein begrenzt, steil gezeichnet, da die Struktur der unmittelbar angrenzenden Zechsteingipfe und die Geländegestaltung eine solche Lage vermuten lassen. Auch sonst sind senkrechte Brüche mit gleichem Verschiebungssinn, aber von geringerer Bedeutung mehrfach aufgeschlossen. Aus anderen Grabengebieten sind cykloidal gekrümmte Randverwerfungen (sogenannte „Schaufelflächen“) ebenfalls bekannt geworden.

Dem Bild Fig. 11 ähnliche Strukturen fanden G. Richter und R. Teichmüller (1933) in den keltiberischen Ketten des spanischen saxonischen Gebirges. Auch das von H. Scholtz (1929) gezeichnete Profil durch die Münchberger Gneismasse läßt sich mit den tieferen Teilen der Fig. 11 vergleichen.

Es scheinen also die gerechneten Gleitflächenbilder in einer Reihe von Fällen in der Natur verwirklicht zu sein. Wenn dies zutrifft, dann muß bei ihrer Entstehung der durch das Gleichungssystem (13) charakterisierte Spannungszustand

geherrscht haben\*). Wir müssen daher die Frage diskutieren, durch welche Kräfteverteilung in der Erdkruste die erforderlichen Spannungsrandbedingungen geschaffen werden können. In dem in Fig. 11 dargestellten Verformungszustand muß an der reibenden Unterlage des Bereiches überall eine Schubspannung von der Größe der Fließgrenze  $\tau_0 = 2000$  at vorhanden sein, da anderenfalls der plastische Zustand in dieser Zone nicht erreicht wird. Nach oben zu nimmt die Größe der Schubspannung ab, da der Einfluß der reibenden Unterlage geringer wird. In gleichem Maße wächst die horizontale Normalspannung  $\sigma_x$  an, so daß das plastische Gleichgewicht gewahrt bleibt. Andererseits ändert  $\sigma_x$  auch in horizontaler Richtung ständig seinen Wert, es wird die auf der einen Seite wirkende Druckspannung allmählich unter dem Einfluß der Schubspannung unter der Basis abgebaut. Ein solcher Spannungszustand kann nur durch aktive in der Erdkruste wirkende Druckkräfte erzeugt werden, wobei die reibende Unterlage eine passive, hemmende Rolle spielt. Schließlich sind zum Zustandekommen des Gleitflächenbildes noch vertikale Druckspannungen erforderlich, die durch das Gewicht der überlagernden Gesteinsschichten erzeugt werden. Die Vorgänge sind in der angegebenen Form daher nur in einer gewissen Tiefe möglich.

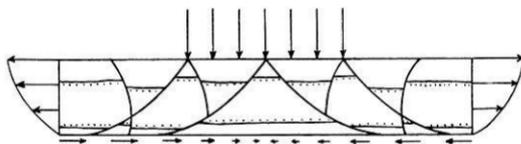


Fig. 13. Durch vertikale Druckkräfte erzeugte Gleitflächen in einer plastischen Masse, die in einer Ebene nach zwei Seiten ausweichen kann und auf reibender Unterlage ruht

In dem Bilde Fig. 10 ändert die Normalspannung  $\sigma_x$  in horizontaler Richtung ihren Sinn, so daß an einer Seite Druckspannungen wirken, die innerhalb des Bereiches immer kleiner werden und schließlich durch Zugspannungen ersetzt werden. Diese Verteilung kann nicht durch aktive Kräfte in der Kruste erreicht werden, es bleiben nur die Möglichkeiten, daß entweder vertikale Druckkräfte wirkten, unter deren Einfluß das Gestein seitlich ausweichen mußte, oder daß an der Basis aktive Schubkräfte angriffen, die den betrachteten Bereich plastisch deformierten und dadurch den errechneten Spannungszustand in dem Material passiv erzeugten. Die Entscheidung zwischen beiden Lösungen ist bei denjenigen Grabenzonen möglich, bei denen das Bild Fig. 10 an beiden Rändern spiegelbildlich auftritt (wie z. B. beim Leinetalgraben). Würden aktive vertikale Kräfte wirken, so müßte eine solche Zone etwa die Gestalt Fig. 13 besitzen, d. h. es müßte in der Mitte der Zone ein nicht plastizierter Kern vorhanden sein, da die

\*) Die gleiche Anordnung der Gleitflächen könnte noch dadurch erzeugt werden, daß die Vorzeichen sämtlicher Spannungskomponenten in (13) umgekehrt werden. Dieser Fall scheidet aber für tektonische Vorgänge aus, weil in der Erdkruste in vertikaler Richtung keine Zugspannungen wirken können.

Schubspannung an der Basis ihr Vorzeichen wechselt und daher irgendwo gleich 0 sein muß. In der Umgebung dieses Punktes kann aber die Fließspannung  $\tau_0$  nicht erreicht sein. Weiterhin müßten wie in Fig. 13 dargestellt, die flachen Gleitflächen stets nach außen einfallen. Ein solches Gebilde ist meines Wissens noch nirgends in der Natur beobachtet worden. Es bleibt daher nur die zweite Möglichkeit übrig und wir kommen zu dem Schluß, daß Grabenzonen, deren Ränder die Form von Fig. 10 besitzen, nur als Folgeerscheinungen einer aktiven Bewegung des Untergrundes entstehen können, wobei die Kräfte durch die Reibung in einem Abscherungshorizont übertragen werden. Anschaulich erkennen wir die Berechtigung dieses Satzes, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß das flache Gleitflächensystem an der Basis Fiederspalten am Abscherungshorizont bilden muß. Da nun dieses flache System in der Natur stets zum Graben zu einfällt, muß sich der Untergrund stärker vom Grabenzentrum fortbewegt haben als die Randschollen des Grabens selbst.

Die angegebene Lösung ist in einem vollständig plastizierten Gebiet eindeutig bis auf eine additive Konstante [ $c$  in Gleichung (13)]. Die Größe derselben hängt offenbar von der Wahl des Koordinatensystems ab und ist daher ohne Einfluß auf die Form des Spannungszustandes. Die Größe  $a$  gibt die Höhe derjenigen Zone an, an der sich der Einfluß des Untergrundes bemerkbar macht. Sie ändert sich daher mit der jeweiligen Form des Spannungszustandes. In Fig. 10 und 11 wurde  $a = 5$  km angenommen.

**XII. Zusammenfassung.** Um den durch feldgeologische Untersuchungen gewonnenen Bewegungsbildern die entsprechenden Kraftbilder zuordnen zu können, wurden ausgehend von den Kármán und Bökerschen Versuchen an Marmor und Sandstein gesetzmäßige Beziehungen zwischen Spannung und Deformation beim Gestein aufgestellt. Über den Einfluß des Faktors Zeit geben die genannten Experimente keine Auskunft. Dieser wurde daher an einem Material (plastischem Ton) bestimmt, das das gleiche zeitunabhängige Verhalten wie die Gesteine zeigt, dessen Zeitkonstanten aber so klein sind, daß ihre Bedeutung im Laboratorium festgestellt werden kann. Unter der noch unbewiesenen Voraussetzung, daß die Ergebnisse der mechanischen Tonexperimente im Prinzip auf das Material der Erdkruste übertragbar sind, und unter Heranziehung der von den Geophysikern berechneten Zähigkeitswerten wurden die Kármán-Bökerschen Versuche auf tektonische Vorgänge angewandt. Die hierbei gewonnenen allgemeinen Resultate stimmen mit den aus feldgeologischen Beobachtungen gezogenen Schlüssen gut überein, was als Beweis für die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges angesehen werden kann. Die entwickelte Theorie konnte daher zur quantitativen Bestimmung der Geschwindigkeiten tektonischer Vorgänge und des für orogene Prozesse notwendigen Energieaufwandes benutzt werden. Schließlich wurde die Rechnung für ein Spezialproblem durchgeführt mit dem Ergebnis, daß in den betrachteten Fällen den tektonischen Bewegungsbildern in eindeutiger Weise Kraftbilder zugeordnet werden konnten.

### Literatur

(Z. a. M. M. bedeutet Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.)

R. Böker: Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern. Forschungen auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, H. 175/176. V. D. I.-Verlag, 1915.

S. von Bubnoff: Das Bewegungsbild der Erde und seine Deutung. Naturwissenschaften, S. 699, 1932.

W. P. Bridgman: The compressibility of thirty metals as a function of pressure and temperature. Proceed. of the Am. Acad. of Arts and Sciences **58**, 5, 1923.

H. Cloos: Experimente zur Inneren Tektonik. Centralbl. f. Min. usw. B., S. 609, 1928.

H. Hencky: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Z. a. M. M. S. 323, 1924.

Derselbe: Über langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen. Z. a. M. M., S. 115, 1925.

K. Hohenemser u. W. Prager: Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl. Z. a. M. M., S. 1, 1932.

Dieselben: Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, Z. a. M. M., S. 216, 1932.

H. Jeffreys: Plasticity and creep in solids. Proceed. of the Royal Society of London **138**, 283, 1932.

Th. von Kármán: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, H. 118, V. D. I.-Verlag, 1912.

F. Lotze: Der Südteil des Göttinger Leinetalgrabens und der Eichenberger Grabenknoten. Abh. d. Preuß. Geol. L. A., N. F. **139**, 1932.

O. Mohr: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials? Abh. a. d. Gebiete d. techn. Mech., Berlin 1906.

R. von Mises: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachricht der Ges. d. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., S. 582, 1913.

A. Náday: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Springer 1927.

Derselbe: Plastizität und Erddruck. Handb. d. Phys. **6**, Berlin 1928.

L. Prandtl: Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. Z. a. M. M., S. 401, 1923.

Derselbe: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Z. a. M. M., S. 85, 1928.

G. Richter u. R. Teichmüller: Die Entwicklung der keltiberischen Ketten. Abh. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., 3. Folge, Heft 7, 1933.

B. Sander: Gefügekunde der Gesteine, Wien 1930.

H. Schlechtweg: Ein Beitrag zur Theorie der nicht vollkommen elastischen Körper. Ann. d. Phys. **3**, 997, 1929.

Derselbe: Das Verhalten spröder Körper unter hohen Drucken und der spröde Bruch. Ingenieurarchiv 1933.

F. Schleicher: Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung). Z. a. M. M., S. 199, 1926.

W. Schmidt: Tektonik und Verformungslehre. Berlin 1932.

H. Scholtz: Zum Bewegungsmechanismus der Münchberger Gneismasse. Centralblatt f. Min., Abt. B, S. 379, 1929.

E. Schröder: Tektonische Studien an niederhessischen Gräben. Göttinger Beiträge zur saxonischen Tektonik, Abh. d. Preuß. Geol. L. A., N. F., **95**, 1924.

B. Weinberg: Some results of experimental study of substances having considerable internal friction. Indian Journal of Physics **1**, 279, 1927.