

Werk

Jahr: 1933

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:9

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0009

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0009

LOG Id: LOG_0057

LOG Titel: Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung

(Das Geoid, II.)

Von F. Ackerl, Wien

Aus der vom Verfasser gegebenen Kugelfunktionen-Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde werden nach dem Verfahren von Hopfner die Undulationen des Geoids, die scheinbaren und die wahren Schwerkraftstörungen berechnet und mitgeteilt.

Über die Darstellung des Schwerkraftfeldes der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung wurde in zwei Arbeiten*) berichtet, die die theoretischen Grundlagen einer solchen Entwicklung und den Gang der Rechenarbeiten ausführlich behandeln.

Von einer nochmaligen Wiedergabe der Kugelfunktionenentwicklung an dieser Stelle muß abgesehen werden. Man findet sie am Schluß der Arbeit „Die Schwerkraft am Geoid“**).

Das Vorhandensein von Kugelfunktionen erster Ordnung deutet an, daß der Ursprung des Koordinatensystems nicht mit dem Erdschwerpunkt zusammenfällt. In einer späteren Arbeit soll die Schwerpunktlage und die Richtung der Hauptträgheitsachsen untersucht werden.

Es kann indessen schon hier bemerkt werden, daß aus dem Nichtzusammenfallen von Schwerpunkt und Koordinatenursprung zunächst keinerlei Schlüsse auf die Konstitution des Erdkörpers gezogen werden dürfen. Am allerwenigsten sollte hier der Grund für eine Asymmetrie vermutet werden. Falls beim Geoid, um das es sich ja handelt, überhaupt von einem Figurenmittelpunkt gesprochen werden kann, so ist es von vornherein gar nicht leicht und recht unklar, wie dieser Figurenmittelpunkt festgelegt werden soll. Im übrigen ist es ein rein geometrisches Problem, den angenommenen Koordinatenursprung in den auf irgendeine Weise definierten Figurenmittelpunkt hineinzuschieben. Fraglos hängt diese geometrische Aufgabe aber mit der Massenordnung im Erdkörper nicht zusammen.

I. Die Genauigkeit der Kugelfunktionenentwicklung. Die Genauigkeit der Entwicklung kann aus den Widersprüchen abgeleitet werden, die sich aus den Grundwerten $f(\mu, \lambda)$ und den aus der Entwicklung berechneten Werten $f'(\mu, \lambda)$ ergeben. Prey***) konnte diese Prüfung durch geeignete Zusammen-

*) F. Ackerl: Das Schwerkraftfeld der Erde. Akad. Wien, Sitz.-Ber. d. mathem.-naturw. Kl. [IIa] **140**, 1931. Derselbe: Die Schwerkraft am Geoid, II. Teil; Akad. Wien [IIa] **141**, 1932.

**) a. a. O. 2, S. 440, Tabelle III.

***) A. Prey, Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung, Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen, N. F. XI, 1. Berlin 1922.

Tabelle 2. Die rechnerischen Ergebnisse des Verfahrens von Hopfner

ξ = Undulationen des Geoids in Metern, $(g - \gamma)$ (g — γ) = scheinbare, wahre Schwerkraftstörungen
(Einheit = 10^{-3} cmsec²)

Nordpol: $\xi = + 352$ m

Südpol: $\xi = - 290$ m

$\varphi \backslash \lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0° 0'	4° 05'	8° 20'	12° 30'	16° 35'	20° 35'	24° 30'	28° 15'	32° 00'	35° 50'	39° 35'	43° 15'	46° 55'	50° 30'	54° 05'	57° 30'	60° 50'	64° 05'	67° 15'	70° 20'	73° 20'	76° 15'	79° 05'	81° 50'	84° 30'	87° 05'	89° 35'	92° 00'	94° 20'	96° 35'	98° 45'	100° 50'
1	1° 12' 08"	42° 12'	42° 14'	42° 16'	42° 18'	42° 20'	42° 22'	42° 24'	42° 26'	42° 28'	42° 30'	42° 32'	42° 34'	42° 36'	42° 38'	42° 40'	42° 42'	42° 44'	42° 46'	42° 48'	42° 50'	42° 52'	42° 54'	42° 56'	42° 58'	43° 00'	43° 02'	43° 04'	43° 06'	43° 08'	43° 10'	43° 12'
2	2° 15' 56"	42° 30'	42° 31'	42° 32'	42° 33'	42° 34'	42° 35'	42° 36'	42° 37'	42° 38'	42° 39'	42° 40'	42° 41'	42° 42'	42° 43'	42° 44'	42° 45'	42° 46'	42° 47'	42° 48'	42° 49'	42° 50'	42° 51'	42° 52'	42° 53'	42° 54'	42° 55'	42° 56'	42° 57'	42° 58'	42° 59'	43° 00'
3	3° 31' 44"	43° 13'	43° 14'	43° 15'	43° 16'	43° 17'	43° 18'	43° 19'	43° 20'	43° 21'	43° 22'	43° 23'	43° 24'	43° 25'	43° 26'	43° 27'	43° 28'	43° 29'	43° 30'	43° 31'	43° 32'	43° 33'	43° 34'	43° 35'	43° 36'	43° 37'	43° 38'	43° 39'	43° 40'	43° 41'	43° 42'	
4	4° 51' 24"	43° 53'	43° 54'	43° 55'	43° 56'	43° 57'	43° 58'	43° 59'	44° 00'	44° 01'	44° 02'	44° 03'	44° 04'	44° 05'	44° 06'	44° 07'	44° 08'	44° 09'	44° 10'	44° 11'	44° 12'	44° 13'	44° 14'	44° 15'	44° 16'	44° 17'	44° 18'	44° 19'	44° 20'	44° 21'	44° 22'	
5	5° 47' 01"	44° 33'	44° 34'	44° 35'	44° 36'	44° 37'	44° 38'	44° 39'	44° 40'	44° 41'	44° 42'	44° 43'	44° 44'	44° 45'	44° 46'	44° 47'	44° 48'	44° 49'	44° 50'	44° 51'	44° 52'	44° 53'	44° 54'	44° 55'	44° 56'	44° 57'	44° 58'	44° 59'	45° 00'	45° 01'	45° 02'	
6	6° 30' 51"	45° 13'	45° 14'	45° 15'	45° 16'	45° 17'	45° 18'	45° 19'	45° 20'	45° 21'	45° 22'	45° 23'	45° 24'	45° 25'	45° 26'	45° 27'	45° 28'	45° 29'	45° 30'	45° 31'	45° 32'	45° 33'	45° 34'	45° 35'	45° 36'	45° 37'	45° 38'	45° 39'	45° 40'	45° 41'	45° 42'	
7	7° 20' 54"	45° 53'	45° 54'	45° 55'	45° 56'	45° 57'	45° 58'	45° 59'	46° 00'	46° 01'	46° 02'	46° 03'	46° 04'	46° 05'	46° 06'	46° 07'	46° 08'	46° 09'	46° 10'	46° 11'	46° 12'	46° 13'	46° 14'	46° 15'	46° 16'	46° 17'	46° 18'	46° 19'	46° 20'	46° 21'	46° 22'	
8	8° 14' 11"	46° 13'	46° 14'	46° 15'	46° 16'	46° 17'	46° 18'	46° 19'	46° 20'	46° 21'	46° 22'	46° 23'	46° 24'	46° 25'	46° 26'	46° 27'	46° 28'	46° 29'	46° 30'	46° 31'	46° 32'	46° 33'	46° 34'	46° 35'	46° 36'	46° 37'	46° 38'	46° 39'	46° 40'	46° 41'	46° 42'	
9	9° 0' 0"	46° 33'	46° 34'	46° 35'	46° 36'	46° 37'	46° 38'	46° 39'	46° 40'	46° 41'	46° 42'	46° 43'	46° 44'	46° 45'	46° 46'	46° 47'	46° 48'	46° 49'	46° 50'	46° 51'	46° 52'	46° 53'	46° 54'	46° 55'	46° 56'	46° 57'	46° 58'	46° 59'	47° 00'	47° 01'	47° 02'	
10	10° 10' 14"	46° 53'	46° 54'	46° 55'	46° 56'	46° 57'	46° 58'	46° 59'	47° 00'	47° 01'	47° 02'	47° 03'	47° 04'	47° 05'	47° 06'	47° 07'	47° 08'	47° 09'	47° 10'	47° 11'	47° 12'	47° 13'	47° 14'	47° 15'	47° 16'	47° 17'	47° 18'	47° 19'	47° 20'	47° 21'	47° 22'	
11	11° 20' 34"	47° 13'	47° 14'	47° 15'	47° 16'	47° 17'	47° 18'	47° 19'	47° 20'	47° 21'	47° 22'	47° 23'	47° 24'	47° 25'	47° 26'	47° 27'	47° 28'	47° 29'	47° 30'	47° 31'	47° 32'	47° 33'	47° 34'	47° 35'	47° 36'	47° 37'	47° 38'	47° 39'	47° 40'	47° 41'	47° 42'	
12	12° 30' 51"	47° 33'	47° 34'	47° 35'	47° 36'	47° 37'	47° 38'	47° 39'	47° 40'	47° 41'	47° 42'	47° 43'	47° 44'	47° 45'	47° 46'	47° 47'	47° 48'	47° 49'	47° 50'	47° 51'	47° 52'	47° 53'	47° 54'	47° 55'	47° 56'	47° 57'	47° 58'	47° 59'	48° 00'	48° 01'	48° 02'	
13	13° 47' 01"	47° 53'	47° 54'	47° 55'	47° 56'	47° 57'	47° 58'	47° 59'	48° 00'	48° 01'	48° 02'	48° 03'	48° 04'	48° 05'	48° 06'	48° 07'	48° 08'	48° 09'	48° 10'	48° 11'	48° 12'	48° 13'	48° 14'	48° 15'	48° 16'	48° 17'	48° 18'	48° 19'	48° 20'	48° 21'	48° 22'	
14	14° 51' 24"	48° 13'	48° 14'	48° 15'	48° 16'	48° 17'	48° 18'	48° 19'	48° 20'	48° 21'	48° 22'	48° 23'	48° 24'	48° 25'	48° 26'	48° 27'	48° 28'	48° 29'	48° 30'	48° 31'	48° 32'	48° 33'	48° 34'	48° 35'	48° 36'	48° 37'	48° 38'	48° 39'	48° 40'	48° 41'	48° 42'	
15	15° 6' 44"	48° 33'	48° 34'	48° 35'	48° 36'	48° 37'	48° 38'	48° 39'	48° 40'	48° 41'	48° 42'	48° 43'	48° 44'	48° 45'	48° 46'	48° 47'	48° 48'	48° 49'	48° 50'	48° 51'	48° 52'	48° 53'	48° 54'	48° 55'	48° 56'	48° 57'	48° 58'	48° 59'	49° 00'	49° 01'	49° 02'	
16	16° 56' 56"	48° 53'	48° 54'	48° 55'	48° 56'	48° 57'	48° 58'	48° 59'	49° 00'	49° 01'	49° 02'	49° 03'	49° 04'	49° 05'	49° 06'	49° 07'	49° 08'	49° 09'	49° 10'	49° 11'	49° 12'	49° 13'	49° 14'	49° 15'	49° 16'	49° 17'	49° 18'	49° 19'	49° 20'	49° 21'	49° 22'	
17	17° 52' 08"	49° 13'	49° 14'	49° 15'	49° 16'	49° 17'	49° 18'	49° 19'	49° 20'	49° 21'	49° 22'	49° 23'	49° 24'	49° 25'	49° 26'	49° 27'	49° 28'	49° 29'	49° 30'	49° 31'	49° 32'	49° 33'	49° 34'	49° 35'	49° 36'	49° 37'	49° 38'	49° 39'	49° 40'	49° 41'	49° 42'	

fassungen ohne Berechnung der einzelnen Laplaceschen Ypsilon durchführen und bemerkt hierzu folgendes*).

„Es bestand ursprünglich die Absicht, die Berechnung der Darstellung von den niederen zu höheren Ordnungen der Kugelfunktionen fortschreiten zu lassen, um zu erkennen, wie sich das Erdbild durch Hinzutreten der höheren Ordnungen nach und nach vervollständigt. Ich bin aber in dieser Richtung nur bis zur fünften Ordnung fortgeschritten. Im weiteren steigt die Arbeit dann derart ins Ungemessene, daß ich davor zurückschreckte. Ich habe daher die Berechnung der einzelnen Y aufgegeben, und gleich von vornherein angestrebt, alle Glieder verschiedener Ordnung zusammenzufassen, welche mit gleichen Cosinus- oder Sinusfaktoren multipliziert sind, mit anderen Worten, im System der Tafel nicht kolonnenweise, sondern zeilenweise fortzuschreiten. Die Arbeit geht dadurch mindestens auf den zehnten Teil herunter.“

Zur Erreichung des hier verfolgten Zweckes, nämlich zur zahlenmäßigen Anwendung des Verfahrens von Hopfner, war es unerlässlich, für jeden der 544 Bezugspunkte alle Y_n gesondert zu berechnen. Es mußten daher, von dem konstanten Y_0 abgesehen, insgesamt 8704 einzelne Y_n aus rund $2^{1/2}$ Millionen sektoriellen und tesseralen Anteilen ermittelt werden. Durch Verwendung eines Lochkartenrasters gelang es, die angedeutete Arbeit in einer Zeit von etwa 2 Jahren fertigzustellen.

Die gegebenen Werte $f(\mu, \lambda)$ der Schwerkraft sind in der ersten Zeile, die mit der Kugelfunktionenentwicklung berechneten Werte $f'(\mu, \lambda)$ in der zweiten Zeile jedes Parallelkreises der Tabelle 1 ausgewiesen. Die dritte Zeile dieser Tabelle gibt den Widerspruch w im Sinne von $w = f'(\mu, \lambda) - f(\mu, \lambda)$.

An Hand dieser Widersprüche läßt sich leicht angeben, mit welcher Genauigkeit die Ausgangswerte $f(\mu, \lambda)$ durch die Kugelfunktionenentwicklung dargestellt werden. In der Zusammenstellung (Tab. 3) wurde für jeden Parallelkreis i ausgewiesen, wie oft ein bestimmter Widerspruch vorkommt; ferner die Summe $[w]$, die Quadratsumme $[ww]$ und schließlich ein mittlerer Widerspruch $W = \sqrt{[ww]/32}$. Da wir aus der von Prey gegebenen Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse wissen, daß seine Kugelfunktionenentwicklung die mittleren Höhen „bis auf 100 bis 200 m richtig darstellt“**), so wurde hier eine Vergleichsgröße, nämlich die jedem W zugeordnete Höhenänderung ΔH in Metern mit der Annahme des Freiluftgradienten $3.086 \cdot 10^6 \text{ cm sec}^{-2}$ hinzuberechnet.

Die Schlußzeile enthält die entsprechenden Zahlen für die gesamte Entwicklung. Wir erkennen, daß die 544 Ausgangswerte mit einer Genauigkeit von $\pm 0.035 \text{ cm sec}^{-2}$ dargestellt werden.

Fragt man weiter noch, in welcher Weise die Entwicklung rasche Änderungen der Schwerkraftbeschleunigung von Punkt zu Punkt wiederzugeben vermag,

*) a. a. O., Fußnote 4, S. 20.

**) a. a. O., Fußnote 4, S. 25.

so ist zu dieser Betrachtung besonders Zentralamerika geeignet, wo sich die hohe und schmale Landbrücke von Mexiko aus den Tiefen des Großen Ozeans und des Golfes von Mexiko erhebt. An dieser Stelle tritt die größte Schwerkraftdifferenz auf, die zwischen benachbarten Bezugspunkten der Kugelfunktionenentwicklung überhaupt vorkommt.

Tabelle 3
'Anzahl und Verteilung der Widersprüche der Tabelle 1
Einheit = 10^{-2} cmsec $^{-2}$

$\lambda \backslash \mu$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10	± 11	± 12	[W]	[ww]	W	ΔH
1	4	2	4	1	3	1	2	1	.	.	.	.	.	+ 2	444	3.7	121
2	3	5	1	1	2	1	2	2	.	.	.	.	.	-15	647	4.5	146
3	3	4	1	2	1	2	3	1	.	.	.	.	.	0	472	3.8	124
4	3	3	3	3	2	.	1	.	1	1	.	.	.	+12	382	3.5	112
5	5	3	2	1	2	2	4	.	.	1	1	.	1	- 8	710	4.7	153
6	4	3	2	3	1	1	1	.	.	.	.	.	1	+ 6	514	4.0	130
7	7	4	3	3	3	.	1	2	.	.	.	1	.	+ 9	321	3.2	103
8	5	3	1	2	1	2	1	.	.	.	.	.	1	-11	427	3.7	118
9	3	8	4	2	1	1	1	.	.	1	.	.	.	+ 2	286	3.0	87
10	2	8	2	1	3	.	2	1	.	.	.	.	.	+11	277	2.9	95
11	5	3	1	3	1	.	2	1	.	.	.	.	.	-15	449	3.6	122
12	3	4	5	3	2	2	1	1	.	1	.	1	.	+ 8	602	4.3	161
13	3	6	5	3	.	1	1	.	.	1	.	.	.	+22	298	3.1	99
14	6	4	4	3	1	.	1	.	.	.	.	.	.	+ 1	173	2.9	76
15	7	4	6	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	- 4	140	2.1	65
16	3	7	3	3	1	2	1	.	.	.	.	.	.	+20	198	2.5	81
17	5	2	2	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-42	334	3.2	105
	71	70	53	43	28	13	16	7	7	3	1	1	1	- 2	6674	9.5	113
		57	64	36	19	23	19	9	9	3	2	.	2				

In Tabelle 1 finden wir am Parallelkreis 7 ($\varphi = 20^{\circ} 34'$) für die drei Meridiane 22 ($\lambda = 247^{\circ} 30'$), 23 ($\lambda = 258^{\circ} 45'$) und 24 ($\lambda = 270^{\circ} 00'$) die Angaben:

Meridian	22	Δ	23	Δ	24
$g = f(\mu, \lambda)$. .	978.81	— 0.54	978.27	+ 0.43	978.70
$g = f'(\mu, \lambda)$. .	978.79	— 0.42	978.37	+ 0.28	978.65

Die durch den Übergang vom Großen Ozean (22) zum Festland (23) gegebene Abnahme der Schwerkraft um rund 0.5 cm sec^{-2} wird durch die Kugelfunktionenentwicklung mit rund 0.4 cm sec^{-2} dargestellt, während die darauffolgende Zunahme der Schwerkraft um rund 0.4 cm sec^{-2} wieder abgeschwächt mit rund 0.3 cm sec^{-2} berechnet wird. Trotz dieser Abschwächung sieht man, daß die Entwicklung den Unterschied der kontinentalen und ozeanischen Schwerkraftwerte klar und gut zum Ausdruck bringt.

Dieses Ergebnis ist aus dem Grunde wichtig, weil Prey festgestellt hat*), daß seine Kugelfunktionenentwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde über Mexiko zu keinem Festland, sondern zu einem etwa 1000 m tiefen Meer führt. Der Grund hierfür dürfte nur in der Tatsache liegen, daß Prey die Höhenverhältnisse einer Erde entwickelte, bei der die hervortretendsten Unregelmäßigkeiten der Oberfläche eingeebnet sind und schon in den Grundlagen der Kugelfunktionenentwicklung nur mehr in den großen Zügen zum Ausdruck kommen. Durch die Bildung der „mittleren Höhen“ erhielt Prey z. B. für den oben betrachteten Festlandspunkt ($\varphi = 7, \lambda = 23$) einen Grundwert von -26 m, der durch die Entwicklung mit -610 m wiedergegeben wird. In Wahrheit hat aber dieser Ort eine Höhe von $+1900$ m.

Da die Einebnung der Oberflächenform einen Ausgleich der Massenunregelmäßigkeiten nach sich zieht, gibt die Kugelfunktionenentwicklung von Prey eigentlich die Oberfläche einer Erde, die dem Idealbild der Lehre von der Isostasie sich nähert.

Überall dort, wo es sich darum handelt, die Umrißformen der Erde in großen Zügen zu berücksichtigen, leistet die Kugelfunktionenentwicklung von Prey wertvolle Dienste. Die Entwicklung wird aber kaum dort befriedigen können, wo die von ihr nicht zum Ausdruck gebrachten Kleinformen der Erdoberfläche von ausschlaggebender Bedeutung sind.

Wenn man z. B. die Schwerkraft über Zentralamerika mit Hilfe der Entwicklung von Prey ableitet, so werden nicht die wahren Verhältnisse bestimmt, sondern der Verlauf der Schwerkraft auf einer Erde mit sehr ausgeglichener Oberfläche, die an Stelle des Hochlandes von Mexiko ein 1000 bis 2000 m tiefes Meer zeigt.

Aus diesen Gründen ist es wenig wahrscheinlich, daß sich die Frage, ob die wahre Erdkruste isostatisch oder nichtisostatisch gelagert ist, dadurch entscheiden läßt, daß man für beide Annahmen die Schwerkraft über der durch die Kugelfunktionenentwicklung von Prey gegebenen vereinfachten Erde berechnet und mit der bekannten Schwerkraftverteilung auf der wahren Erde vergleicht**).

II. Die theoretischen Grundlagen des Verfahrens. Vor Besprechung der in der Tabelle 2 mitgeteilten Ergebnisse soll hier nochmals eine kurze und zusammenfassende Darstellung des Verfahrens von Hopfner zur Bestimmung der Geoidundulationen gegeben werden.

Der Grundgedanke, daß bei Bestimmung der Erdfigur aus Schwerkraftwerten eine Randwertaufgabe der Geodäsie vorliegt, führt zu der Forderung, daß die beobachteten Schwerkraftbeschleunigungen in Randwerte am Geoid verwandelt werden müssen.

*) a. a. O., Fußnote 4, S. 27.

) A. Prey: Zur Frage nach dem isostatischen Massenausgleich in der Erdrinde. Gerl. Beitr. z. Geophys. **29, 1931; **36**, 1932; F. Ackerl: Die Schwerkraft über Nordamerika und Westeuropa, ebenda **36**, 1932.

Damit ist das Reduktionsverfahren bereits vorgeschrieben; denn nur die potentialtheoretisch begründete Reduktionsmethode von A. Prey*) führt zu den geforderten Randwerten der Schwerkraft am Geoid.

Zur Lösung des Randwertproblems hat sich nach den neuesten Arbeiten Hopfners**) der folgende Weg als der kürzeste und zugleich als der mathematisch schärfste ergeben.

Wir beziehen die Niveauläche $W \equiv U + T = C$ auf das Niveausphäroid $U_0 = C$. Die Funktion U entwickeln wir nach Potenzen der Undulation ξ ; bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung ξ^2 erhält man die Gleichung

$$W = U_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0 \xi + T \dots \dots \dots (1)$$

Wir leiten sie nach der äußeren Normalen n ab; hierdurch ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right).$$

In beide Gleichungen führen wir die Schwerkraftbeschleunigungen g (auf der Niveauläche) und γ (am Niveausphäroid) ein und erhalten

$$W = U_0 + \gamma \xi + T, \quad g = \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \xi - \frac{\partial T}{\partial n} \dots \dots \dots (2)$$

Wir beziehen diese Gleichungen auf das Geoid $W = C$, also auf jenes Geoid, das den nämlichen Potentialwert wie das Niveausphäroid $U_0 = C$ besitzt; man bekommt hierdurch

$$\xi = -\frac{T}{\gamma}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T + (g - \gamma) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Die erste der Gleichungen (3) ist unter dem Namen des Theorems von Bruns bekannt. Das zweite Glied in der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für die Restfunktion T wird als Term von Bruns bezeichnet.

Mit Vernachlässigung von Größen von der Ordnung der Abplattung α ist

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a}$$

und man vernachlässigt daher Größen von der Ordnung α^2 , wenn die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{a} T + (g - \gamma) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

*) A. Prey: Über die Reduktion der Schwerebeobachtungen auf das Meeresniveau. Akad. Wien, Sitz.-Ber. mathem.-naturw. Kl. [IIa] 113, 1904); s. a. Prey, Mainka, Tams: Einführung in die Geophysik. Berlin 1922.

**) F. Hopfner, Die Grundgleichungen der physikalischen Geodäsie. Akad. Wien, Sitz.-Ber. 141, 1932.

geschrieben wird. Zusammen mit dem Theorem von Bruns löst die Gleichung für jeden Raumpunkt — abgesehen vom Erdschwerpunkt — das Problem von Stokes, das damit von Hopfner*) auf seine einfachste mathematisch-physikalische Form gebracht worden ist.

Eine weitere wesentliche Vereinfachung stellt sich aus der Erwägung ein, daß bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung α^2 , nach den in der Erdkruste vorliegenden Dichteverhältnissen, die Poissonsche Gleichung durch die Laplacesche Gleichung ersetzt werden darf. Da nämlich die Dichte ϱ in keinem Punkte des Geoids und in keinem Massenpunkt seiner Umgebung — von kleinsten Bereichen abgesehen — den Wert 4 überschreitet, ist

$$4\pi f\varrho < \alpha^2.$$

Hierdurch wird die spezielle Randwertaufgabe der Geodäsie eine zweite Randwertaufgabe für den Außenraum, und es reicht sonach hin, die partielle Differentialgleichung durch eine Funktion zu befriedigen, die im Außenraum des Geoids harmonisch ist und im Unendlichen wie $1/r^4$ verschwindet.

Hopfner setzt infolgedessen

$$\frac{T}{a} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n}{n-1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \dots \dots \dots (5)$$

so daß

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{n+1}{n-1} Y_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \dots \dots \dots (6)$$

Für $r = a$ soll sein:

$$\frac{T}{a} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n}{n-1}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = - \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{n+1}{n-1} Y_n.$$

Trägt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{n=3}^{n=\infty} Y_n = (g - \gamma) \dots \dots \dots (7)$$

und die Undulationen ζ folgen aus der Gleichung

$$\zeta = - \frac{a}{\gamma} \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n}{n-1} \dots \dots \dots (8)$$

Die Lösung existiert und ist eindeutig, denn $(g - \gamma)$ ist in einer und nur einer Weise auf der Kugel vom Radius $r = a$ (Niveausphäroid) nach Kugelfunktionen entwickelbar. Infolgedessen konvergieren auch die Reihen für T/a und ζ ; denn die Reihe für $(g - \gamma)$ ist Majorante beider Reihen.

*) F. Hopfner, Über einige aktuelle Fragen der physikalischen Geodäsie. Gerl. Beitr. z. Geophys. 38, 1933.

III. Die rechnerischen Ergebnisse des Verfahrens. a) Die Undulationen des Geoids. Die erste Zeile der Tabelle 2 weist die berechneten Undulationen aus; positive Werte der Undulationen bedeuten Senkungen, negative Werte Hebungen des Geoids. Eine zeichnerische Darstellung des Verlaufes der Undulationen auf der ganzen Erde erscheint demnächst in Petermanns Geographischen Mitteilungen*).

Die größte Hebung von 677 m (Tabelle 2, $\varphi = 7$, $\lambda = 23$) finden wir über Zentralamerika, die größte Senkung von 837 m ($\varphi = 11$, $\lambda = 22$) westlich von Südamerika im Großen Ozean.

In der zeichnerischen Darstellung sind deutlich drei geschlossene Senkungsgebiete erkennbar.

Das ausgedehnte flache Senkungsgebiet der Nordhalbkugel (Nordpol 352 m; Maximum 428 m bei $\varphi = 2$, $\lambda = 0$) tritt zwischen Amerika und Afrika auf die Südhalbkugel über und erreicht dort bei $\varphi = 11$, $\lambda = 30$ nochmals 423 m. Die zwei Senkungsgebiete der Südhalbkugel liegen in sich geschlossen zwischen Australien—Südamerika (Maximum 837 m) im Großen Ozean und zwischen Afrika—Australien (Maximum 822 m bei $\varphi = 12$, $\lambda = 7$) im Indischen Ozean.

Die Senkung des Großen Ozeans reicht bis etwa 50° Südbreite, während die des Indischen Ozeans sich bis etwa 70° südl. Br. in das geschlossene Gebiet von Geoidhebungen einschiebt, das sich um den Südpol (290 m Hebung) lagert.

Ein breites Hebungsgebiet dringt über die Küste des Antarktischen Festlandes (Wilkesland, 523 m Hebung bei $\varphi = 15$, $\lambda = 14$) nach Norden über Australien vor (Maximum 114 m Hebung bei $\varphi = 12$, $\lambda = 13$), und leitet über die Ostindischen Inseln nach Asien hin, wo sich die größte Hebung mit 590 m bei $\varphi = 6$, $\lambda = 7$ zeigt. Das asiatische Hebungsgebiet verflacht in nordöstlicher Richtung bis an die Küste des Eismeer, in südwestlicher Richtung über Arabien und führt zu der ausgeprägten Hebungszone über Zentralafrika (608 m; $\varphi = 9$, $\lambda = 3$). Nach der Südspitze Afrikas abfallend, leitet eine verhältnismäßig schmale Brücke nach Südamerika, wo wir nur im Süden Hebungen von mehr als 200 m antreffen.

Über dem nordöstlichen Teil Brasiliens liegt ein kleines Senkungsgebiet (Maximum 97 m), von wo ab in nordwestlicher Richtung eine breite Zone von Hebungen bis Alaska vordringt. In diesem Gebiet, nämlich über Zentralamerika, ergab sich der bereits erwähnte Größtwert der Hebungen im Betrage von 677 m.

Aus dieser kurzen Beschreibung und den Zahlen der Tabelle 2 (die ungefähren Festlandsumrisse sind in der Tabelle durch dickere Linien angedeutet) erkennen wir, daß im allgemeinen das Geoid über den Kontinenten sich hebt und über den Weltmeeren sich senkt.

Eine Ausnahme hiervon bildet neben der bereits erwähnten Senkung in Südamerika die Tatsache, daß der westliche Teil von Nordafrika, ganz Europa,

*) Während des Druckes im Heft 7, 1933, erschienen.

die Nordostküste von Asien, ferner das arktische Tiefland der Küste von Nordamerika eine Geoidsenkung von 0 bis 200 m, Grönland eine Senkung von 300 bis 400 m aufweist.

Hebungen über Weltmeeren finden wir im Großen Ozean zwischen Nordamerika und den Sandwich-Inseln, in der Südsee und in den südlichsten Teilen des Großen und Atlantischen Ozeans.

Hinsichtlich der Genauigkeit der berechneten Undulationen ist zu bemerken, daß ihr mittlerer Fehler sich aus Gl. (8) mit

$$M_z^2 = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 \sum_{n=3}^{n=16} \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 m_{Y_n}^2$$

ergibt. Hieraus erhält man mit den Näherungswerten $a = 6.37 \cdot 10^8$ cm, $\gamma = 980$ cm sec⁻² und der Annahme, daß alle vorkommenden Y_n den gleichen Fehler aufweisen, den Betrag von

$$M_z = \pm 45 \text{ m.}$$

Die innere Genauigkeit der in Tabelle 2 ausgewiesenen Undulationen kann also mit rund ± 50 m veranschlagt werden. Beachtet man schließlich noch, daß in den theoretischen Entwicklungen Größen der Ordnung α^2 vernachlässigt wurden, so ist aus diesem Grunde von vornherein mit einer Unsicherheit von rund ± 60 m zu rechnen. Wir müssen daher schließen, daß die Darstellung der Schwerkraft durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung die von der Theorie geforderte Genauigkeit erreicht.

Schließlich kommen wir zu der Frage, wie weit die wahre Figur des Geoids durch die hier berechneten Undulationen dargestellt ist. Im Hinblick darauf, daß für den größeren Teil der Erdoberfläche, die Ozeane, überhaupt keine oder doch nur sehr wenige Schwerkraftwerte vorlagen, ist es gewiß möglich, daß die Undulationen für diese Gebiete größere Fehler aufweisen können.

Es steht außer Frage, daß eine neue Entwicklung auf Grund neuer Messungen, insbesondere über den Meeren, möglicherweise zu anderen Ergebnissen hinsichtlich des Verlaufs der Undulationen, namentlich über den Meeren, führen werden.

Dennoch ist der Zweck der Arbeit durch den Nachweis erreicht worden, daß einerseits das Verfahren von Hopfner durchführbar ist und daß andererseits die Undulationen bei der Deutung der Schwerkraftstörungen nicht vernachlässigt werden dürfen.

Endgültige Ergebnisse waren nicht zu erwarten. Dennoch sind die Ergebnisse auch nicht weniger sicher als jene, die bisher mit Hilfe eines noch kleineren Beobachtungsmaterials auf Grund anfechtbarer Hypothesen abgeleitet worden sind.

Es ist gewiß, daß für Gebiete, die bereits heute zahlreiche Schwerkraftstationen aufweisen, wesentliche Änderungen im gewonnenen Bilde durch eine neue Darstellung auf Grund neuer Beobachtungen nicht hervorgerufen werden können.

Zur Stütze dieser Ansicht kann auf die von Helmert veröffentlichte Karte der „Deformationen des Geoids durch die Kontinentalmassen“*) hingewiesen werden.

Die in ihr dargestellten Deformationen wurden von Helmert unter der Annahme berechnet, daß die Kontinente in einfach begrenzter Form einer homogenen Kugel aufgelagert sind. Für diesen nicht-isostatischen Fall ergaben sich Hebungen und Senkungen bis zu 400 m. Helmert weist darauf hin, daß seine Annahmen „über die Dichte der Kontinentalplatten nicht ausreichen, um einen Zustand der physischen Erdoberfläche herbeizuführen, der dem wirklichen ähnelt. Mit den bisherigen Annahmen nämlich würden die Kontinente einfach überschwemmt.“ Nach Helmert müssen die Zahlen seiner Karte noch um $\frac{4}{10}$ vergrößert werden.

Beachtet man dies, so ergeben sich Hebungen, die den nach dem Verfahren von Hopfner berechneten nicht nur hinsichtlich der Größe, sondern auch hinsichtlich der Verteilung nahekommen. Ganz besonders ausgeprägt ist die Ähnlichkeit auf der östlichen Halbkugel, wo die Begrenzung und die nordöstliche Erstreckung des Hebungsgebietes auf der Karte von Helmert fast völlig dem Verlauf der hier veröffentlichten Hebungen entspricht.

Da bei isostatischer Lagerung der Massen in der Erdkruste die Undulationen nur klein sein können, spricht die Größe der hier ohne eine Voraussetzung über die Massenordnung in der Erdkruste berechneten Undulationen zunächst gegen eine isostatische Lagerung der Massen, ohne daß deshalb schon behauptet wäre, daß keine Isostasie vorhanden ist.

Denn aus den Erscheinungen im Schwerkraftfeld der Erde an der Erdoberfläche lassen sich weder Beweismittel für die Lehre von der Isostasie noch solche gegen sie erbringen. Vom Standpunkt der Physik aus beurteilt, stellt nämlich die Lehre von der Isostasie einen Versuch zur Lösung des Umkehrproblems der Potentialtheorie in seiner Anwendung auf die Theorie von der Massenordnung im Erdinnern vor, insoweit die Dichteverteilung daselbst aus der Schwerkraftverteilung erschlossen werden soll.

Es läßt nämlich — wie bekannt — das Umkehrproblem, wenn als Hilfsmittel nur die Sätze der Potentialtheorie herangezogen werden, keine eindeutige Lösung zu.

b) Die Schwerkraftstörungen. In der zweiten Zeile der Tabelle 2 sind die nach Gl. (7) berechneten scheinbaren Schwerkraftstörungen $(g - \gamma)$ ausgewiesen. Obwohl der Kugelfunktionenentwicklung nur bis auf 0.01 cm sec^{-2} abgerundete Werte der Schwerkraft zugrunde lagen, wurden die Störungen aus rechnerischen Gründen schärfer ermittelt und sind daher in Einheiten von $10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$ angegeben. Als Fehler der $(g - \gamma)$ kann ähnlich wie bei den g -Werten ein Betrag von ± 0.03 bis $\pm 0.04 \text{ cm sec}^{-2}$ angenommen werden.

Über den in der Tabelle durch stärkere Umrahmung angedeuteten Festländern findet man in der Regel negative und über den Weltmeeren positive scheinbare Störungen.

*) F. R. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II. Leipzig 1884.

In den scheinbaren Schwerkraftstörungen kommt die vereinigte Wirkung der Massenunregelmäßigkeiten und der Undulationen des Geoids zum Ausdruck. Als Ursache der systematischen Verteilung der scheinbaren Störungen wird heutzutage fast ausschließlich eine verschiedene Massenanordnung unter den Kontinenten und Ozeanen angenommen, ohne zu beachten, daß die Vergleichswerte g bzw. γ im allgemeinen auf Niveauflächen verschiedenen Potentialwertes liegen.

Diesen Niveauunterschied, das ist die Undulation des Geoids, berücksichtigt der Term von Bruns durch die Berechnung der theoretischen Schwerkraftbeschleunigung γ' am Geoid aus der im zugeordneten Punkt des Niveausphäroids gegebenen Schwerkraftbeschleunigung γ im Sinne der Gleichung

$$\gamma' = \gamma - \xi \frac{\partial \gamma}{\partial n},$$

in der Größen von der Ordnung ζ^2 vernachlässigt sind.

Die Werte g und γ' gehören derselben Niveaufläche an und liefern die wahre Schwerkraftstörung $g - \gamma'$, die ihre Entstehung einzig und allein den Massenunregelmäßigkeiten verdankt.

Diese wahren Störungen $g - \gamma'$ sind in der dritten Zeile der Tabelle 2 enthalten. Im Hinblick auf den vorhin angegebenen Fehler der Werte $g - \gamma$, den mit rund 50 bis 100 m abgeschätzten Fehler der Undulationen ξ und die Tatsache, daß über der ganzen Erde mit einem konstanten Werte von $\partial \gamma / \partial n$ gerechnet wurde, dürfte der Fehler der wahren Störungen mit rund ± 0.04 bis ± 0.05 cm sec⁻² anzunehmen sein.

Eine zeichnerische Darstellung der Verteilung der wahren Schwerkraftstörungen auf der Erde wird demnächst in Petermanns Geographischen Mitteilungen*) erscheinen.

Es zeigt sich im allgemeinen ein ziemlich regelloser Wechsel von positiven und negativen wahren Störungen sowohl über den Ozeanen als auch über den Kontinenten. Bei einer Deutung dieser Störungen im heute üblichen Sinne wird es in Einzelfällen gelingen, bald Stützen für das Vorhandensein einer isostatischen Anordnung, bald solche für eine nicht-isostatische Lagerung der Massen in der Erdkruste zu finden.

Eine endgültige Entscheidung der Frage, ob Isostasie besteht oder nicht, wird erst dann gefällt werden können, wenn eine der beiden Möglichkeiten durch Beweismittel erhärtet wird, die nicht nur dem Schwerkraftfeld der Erde entnommen sind. In erster Linie dürfte wohl die Geologie dazu berufen sein, diese ausschlaggebenden Beweismittel zu erbringen.

Schlußbemerkungen. Trotz der demnach gebotenen Vorsicht wird man aber dennoch behaupten dürfen, daß die Größe der erstmalig potentialtheoretisch einwandfrei berechneten Undulationen eher gegen als für eine isostatische Anordnung der Massen in der Erdkruste spricht.

*) Während des Druckes in Heft 7, 1933, erschienen.

Denn einerseits sind bei einer solchen Lagerung größere Undulationen ganz unwahrscheinlich, andererseits ist die Übereinstimmung der auf ganz verschiedenen Wegen, nämlich von Helmert und nach dem Verfahren von Hopfner bestimmten Undulationen hinsichtlich ihrer Größe und Verteilung auffällig gut, wobei man sich vor Augen zu halten hat, daß Helmert seiner Untersuchung eine Erdkruste zugrunde legte, in der die Massen nicht isostatisch gelagert sind.

Schließlich soll noch darauf hingewiesen werden, daß die Größe und Verteilung der Undulationen zeigt, daß von einer Dreiachsigkeit der Erdfigur nicht gut gesprochen werden kann. Die Erdfigur ist viel zu kompliziert, als daß sie durch eine so schematische Figur, wie es ein dreiachsiges Ellipsoid ist, hinreichend gut dargestellt werden könnte.

Referate

F. Hopfner: Physikalische Geodäsie. Mathematik in Monographien und Lehrbüchern XIV. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1933. 434 Seiten, 49 Abbildungen. Preis broschiert RM 29.—, gebunden RM 31.—.

Es ist keine leichte Aufgabe, das umfangreiche Gebiet der physikalischen Geodäsie, d. h. im wesentlichen die physikalisch-mathematische Behandlung der Frage nach der Erdfigur, in gedrängter Form so darzustellen, daß der Leser, ohne anderweitige umfangreiche Literatur zur Hand nehmen zu müssen, den nicht immer einfachen Gedankenängen zu folgen vermag. Einen Versuch in dieser Hinsicht stellt das vorliegende Buch von F. Hopfner dar, und wenn hierdurch auch ein eingehenderes Studium der Spezialliteratur nicht ganz überflüssig geworden ist, so ist es doch dem Verfasser gelungen, dem Studierenden eine sehr brauchbare zusammengefaßte Einführung in den Problembereich der physikalischen Geodäsie zu geben, sowie demjenigen, der sich eingehender hiermit beschäftigen will, einen Leitfaden für dieses Gebiet zu liefern, der in übersichtlicher Gliederung die weit verzweigten Teilprobleme in einheitlicher Darstellung bringt.

Die ersten drei Kapitel sind der Einführung in die mathematischen Grundlagen vorbehalten. Das erste Kapitel gibt eine kurze, aber ausreichende Darstellung der wichtigsten Greenschen Sätze und der Transformationen des Laplaceschen Operators in sphärische und ellipsoidische Koordinaten. Im zweiten Kapitel folgt in gleicher Weise die Behandlung der Kugelfunktionen und im dritten Kapitel entsprechend der Laméschen Funktionen, deren Bedeutung in den später vielfach angewendeten Reihenentwicklungen zutage tritt.

Das vierte Kapitel ist der Potentialtheorie gewidmet. Hier hat es Hopfner mit Geschick verstanden, dem außerordentlich verzweigten Gebiet gerade diejenigen Teile zu entnehmen, die für die spätere Behandlung der Erdfigur von Wichtigkeit sind, ohne jedoch in Weitschweifigkeiten zu geraten, die dem mathematisch orientierten Potentialtheoretiker sehr nahe liegen.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit dem Potential und der Anziehung des homogenen Ellipsoids, der Grundlage der Lehre von den Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren eingehende Darstellung im sechsten bis achten Kapitel folgt.

Die Behandlung dieser Probleme ist vielleicht im Hinblick auf die modernen Fragen, die mit der Erdfigur im Zusammenhang stehen, etwas zu ausführlich geraten. Jedoch