Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie

Von **F. Hopfner,** Wien — (Mit 1 Abbildung)

Das von mir vorgeschlagene und von F. Ackerl zahlenmäßig durchgerechnete Verfahren zur Bestimmung des Geoids aus Schwerkraftwerten wird unter sehr allgemeinen Gesichtspunkten nochmals entwickelt.

Das von mir vorgeschlagene und von F. Ackerl erstmalig zahlenmäßig durchgerechnete Verfahren zur Bestimmung des Geoids aus Schwerkraftwerten hat zu mancherlei Erörterungen Anlaß gegeben. Ich hoffe, zur Klärung mancher Frage beizutragen, wenn ich das Verfahren nochmals unter sehr allgemeinen Gesichtspunkten entwickle. Hierbei setze ich stillschweigend voraus, daß die beobachteten Schwerkraftwerte durch das Reduktionsverfahren von Prey in Randwerte am Geoid verwandelt worden sind; einerseits geben nämlich die bisher allgemein angewendeten Reduktionsverfahren keine Randwerte*) und andererseits würden Schwerkraftwerte, die keine Randwerte sind, bei der zahlenmäßigen Anwendung des Verfahrens notwendigerweise zu falschen Ergebnissen führen.

1. Es bedeute W die Kräftefunktion der Erde. Wir stellen sie als Summe zweier Funktionen U und T dar, so daß, wenn $T = W - U$ gesetzt wird,

$$W = U + T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist.

Die Funktion U kann willkürlich gewählt werden. Nur durch Erwägungen praktischer Natur erfährt der Kreis möglicher Annahmen über die Funktion U eine Einschränkung. Wir werden daher die Funktion U im folgenden in der Weise wählen, daß sie im Gesamtraum — vom Koordinatenursprung abgesehen — die Eigenschaften einer Kräftefunktion im Außenraum einer gravitierenden und rotierenden Masse besitzt. Die Gleichung U = const ist infolgedessen die Gleichung für die Schar der Niveauflächen in dem durch die Kräftefunktion U bestimmten Kraftfelde. Durch geeignete Wahl der Funktion U läßt sich erreichen, daß diese Niveauflächen geschlossene Flächen sind, die nur wenig von der Kugelgestalt abweichen. Diese Niveauflächen hat Bruns in seiner Theorie von der Erdfigur

*) F. Hopfner, Physikalische Geodäsie, S. 395. Leipzig 1933; s. auch Neue Wege zur Bestimmung der Erdfigur, Ergebnisse der kosmischen Physik **1**, Leipzig 1931.

als Niveausphäroide bezeichnet. In der noch bestehenden Willkürlichkeit der Funktion U auch nach den bisher getroffenen Einschränkungen hinsichtlich ihrer Wahl ist es übrigens begründet, daß kein Grund zur Annahme vorliegt, eines der Niveausphäroide sei mit einem der gebräuchlichen Referenzellipsoide identisch. Insbesondere kann man daher auch nicht erwarten, daß beide Flächen die nämliche Abplattung aufweisen. Diese Gleichheit wäre nur dann erreichbar, wenn sie bei der Auswahl der Funktion U in die von ihr zu erfüllenden Bedingungen aufgenommen werden würde.

Durch die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\gamma,$$

unter n die Richtung der äußeren Normalen verstanden, wird ein Kraftfeld erklärt, das im Gesamtraum — vom Ursprung abgesehen — die charakteristischen Eigenschaften eines Kraftfeldes im Außenraum einer gravitierenden und rotierenden Masse aufweist. Wir nennen γ die theoretische Schwerkraftbeschleunigung. In der Willkürlichkeit der Funktion U ist es nämlich gelegen, daß dem von der Ableitung $\partial U / \partial n$ erklärten Kraftfelde keinerlei Realität in der Natur zukommt; denn das Kraftfeld ist nur ein künstlich geschaffenes Schwerkraftfeld, mit dem das von der Erde erzeugte Schwerkraftfeld verglichen werden soll. Ich halte diesen Hinweis für nötig, da man gegenwärtig ganz allgemein in den Werten von γ geradezu von der Natur vorgegebene „Normalwerte“ der Schwere zu erblicken geneigt ist.

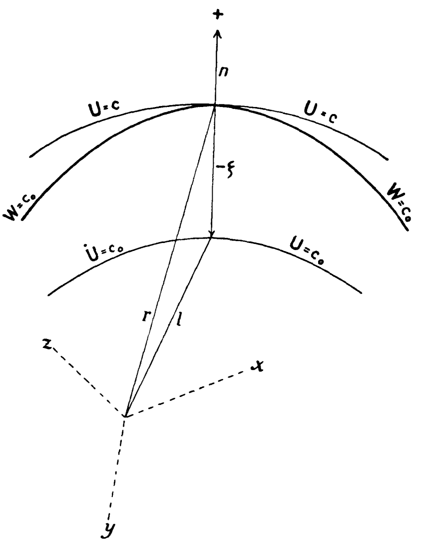

Fig. 1. Lage der Niveausphäroide $U = c$ und $U = c_0$ zum Geoid $W = c_0$

Es seien $U = c$ und $U = c_0$ $(c < c_0)$ die Gleichungen zweier sehr nahe beieinander liegender Niveausphäroide (vgl. die Figur). Wir errichten in einem Punkte des Niveausphäroids $U = c$ die Flächennormale; sie werde in seinem Außenraum positiv gewählt. Die beiden Niveausphäroide schneiden auf der Normalen die Strecke ζ ab. Da die Kräftefunktion U im Endlichen — vom Ursprung abgesehen — analytisch ist, kann sie in der Umgebung des Niveausphäroids $U = c_0$ nach Potenzen von ζ entwickelt werden. Man erhält

$$U = U_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 \zeta \cdots = U_0 + \gamma_0 \zeta \cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Wir leiten die Gleichung nach n ab und erhalten hierdurch

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_0 \zeta,$$

woraus

$$\gamma = \gamma_0 - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_0 \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

folgt.

Die Werte für die theoretische Schwerkraftbeschleunigung γ in zwei auf einer Normalen sehr nahe beieinander liegenden Punkten lassen sich sonach mit Hilfe der Freiluftformel ineinander überführen. Das Ergebnis ist leicht aus der Erwägung heraus zu verstehen, daß das durch die Kräftefunktion U bestimmte Kraftfeld nach Voraussetzung die charakteristischen Eigenschaften eines Kraftfeldes im Außenraum einer gravitierenden und rotierenden Masse besitzen soll. Aber natürlich gilt jenes Ergebnis nicht für zwei Schwerkraftbeschleunigungen g des Schwerefeldes der Erde, die Punkten zugehören, von denen zumindest der eine im Innern der Erdmasse liegt. Auch hierfür liegt der Grund auf der Hand; die Kräftefunktion W der Erde ist nämlich im Innern der Erdmasse nur innerhalb beschränkter Bereiche analytisch und insbesondere können die Werte von W in den Punkten der Erdmasse nicht durch analytische Fortsetzung aus den Werten von W in den Punkten des Außenraums gewonnen werden.

2. Im Hinblick auf die Gleichungen (1) und (2) ist hinreichend genau, d. h. mit Vernachlässigung von Größen von der Ordnung ζ^2,

$$W = U_0 + \gamma \zeta + T; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

nur der einfacheren Schreibweise wegen lassen wir den Index Null bei γ fort. Wir leiten diese Gleichung nach der äußeren Normalen ab und erhalten

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \zeta + \frac{\partial T}{\partial n};$$

hierin führen wir die Schwerkraftbeschleunigung g im Schwerefeld der Erde

$$-g = \frac{\partial W}{\partial n}$$

und die theoretische Schwerkraftbeschleunigung γ ein und erhalten hierdurch

$$g = \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \zeta - \frac{\partial T}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Der zweite Term rechter Hand ist der Term von **Bruns**.

Wir beziehen (vgl. die Figur) die Niveaufläche $W = c_0$ der Erde auf das Niveausphäroid gleichen Potentialwertes

$$U = c_0 = U_0.$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich hierdurch in bekannter Weise das Theorem von Bruns

$$\zeta = -\frac{T}{\gamma}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

womit man ζ aus der Gleichung (5) eliminieren kann; man erhält

$$\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} T + g - \gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Gleichungen (6) und (7) lösen die Aufgabe, aus den scheinbaren*) Schwerkraftstörungen $g - \gamma$ die Undulationen ζ des Geoids zu berechnen. Gelingt es nämlich, T aus der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (7) in Funktion von $g - \gamma$ zu bestimmen, so liefert sodann Gleichung (6) die Undulation ζ. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen ist es leicht möglich, jenes partikuläre Integral der partiellen Differentialgleichung anzugeben, das die Aufgabe löst.

Nach Voraussetzung erfüllt U überall im Endlichen — vom Ursprung abgesehen — die Laplacesche Gleichung $\Delta U = 2\omega^2$, unter ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation verstanden. Von der Kräftefunktion W der Erde ist bekannt, daß sie — vom Ursprung abgesehen — im Innern der Erdmasse die Poissonsche Gleichung $\Delta W = -4\pi f \varrho + 2\omega^2$ und im Außenraum die Laplacesche Gleichung $\Delta W = 2\omega^2$ befriedigt. Wir werden daher von dem partikulären Integral der Differentialgleichung (7) fordern, daß es — vom Ursprung abgesehen — im Masseninnern die Poissonsche Gleichung $\Delta T = -4\pi f \varrho$ und im Außenraum die Laplacesche Gleichung $\Delta T = 0$ erfülle. Diese Erkenntnis folgt aus der Gleichung $T = W - U$, aus der übrigens auch hervorgeht, daß das partikuläre Integral T der Differentialgleichung wesentlich von der Annahme über die willkürlich wählbare Funktion U bedingt ist. In der Differentialgleichung tritt diese Abhängigkeit der Funktion T von U dadurch in Erscheinung, daß die theoretische Schwerkraftbeschleunigung γ und ebenso ihre Ableitung $\partial\gamma/\partial n$ je nach der über U getroffenen Annahme verschiedene Werte annehmen. Die Wahl der Funktion U hat demnach für die Lösung der Aufgabe grundsätzliche Bedeutung; je nach der Annahme über U erhält man verschiedene Werte für γ, $\partial\gamma/\partial n$, T, ζ und für die scheinbare Schwerkraftstörung $g - \gamma$.

Ferner werden wir von dem partikulären Integral der Differentialgleichung (7) und seinen ersten Ableitungen fordern, daß sie im Gesamtraum — vom Ursprung abgesehen — eindeutige, endliche und stetige Funktionen des Ortes sein sollen, die im Unendlichen verschwinden. Denn in der Differenz $W - U$ fällt die Kräftefunktion der Fliehkraft heraus; T ist sonach die Differenz zweier Potentialfunktionen. Die Ordnung des Verschwindens von T und seiner Ableitungen für $\lim r = \infty$ wird von der Auswahl der Funktion U bedingt.

---

*) F. Hopfner: Physikalische Geodäsie, S. 375. Leipzig 1933.

Die Differentialgleichung besitzt übrigens eine sehr einfache gravimetrische Bedeutung. Der Differentialquotient $\partial T/\partial n$ ist nämlich mit der negativ genommenen wahren*) Schwerkraftstörung $g-\gamma'$ identisch. Die aus der Differentialgleichung folgende Formel

$$(g-\gamma')-(g-\gamma)=\frac{\partial \gamma}{\partial n}\,\zeta$$

sagt infolgedessen aus, daß sich die wahre und die scheinbare Schwerkraftstörung um den Term von Bruns voneinander unterscheiden. Diese Beziehung zwischen den beiden Schwerkraftstörungen läßt sich natürlich aus der Gleichung (3) auch unmittelbar folgern.

3. Wir bezeichnen den mittleren Radiusvektor des Niveausphäroids $U=c_0$ mit a; nach Voraussetzung ist nämlich jenes Niveausphäroid eine geschlossene Fläche, die nur wenig von der Kugelgestalt abweicht. Vernachlässigt man Größen von der Ordnung α^2 — unter α die Abplattung verstanden —, so kann in der Differentialgleichung (7)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n}=-\frac{2\gamma}{a}$$

gesetzt und die Richtung von n mit der Richtung des Radiusvektors r vertauscht werden, wodurch man die einfachere Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2}{a}\,T+g-\gamma=0 \qquad (8)$$

erhält.

Das gesuchte partikuläre Integral T soll im Innern der Erdmasse die Poissonsche Gleichung $\Delta T=-4\pi f\varrho$ und im Außenraum der Erdmasse die Laplacesche Gleichung $\Delta T=0$ erfüllen. Glücklicherweise ist in den Punkten der Erdkruste $4\pi f\varrho<\alpha^2$. Da Größen von der Ordnung α^2 in der Differentialgleichung vernachlässigt wurden, kann auch in der Erdkruste die Laplacesche Gleichung $\Delta T=0$ als erfüllt angesehen werden. Hierdurch tritt eine weitere, wesentliche Vereinfachung der Aufgabe ein, da sie als eine Aufgabe des Außenraums behandelt werden darf.

Als praktikuläre Lösung der Differentialgleichung (8) kann nämlich jetzt eine harmonische Funktion gewählt werden, der wir zweckmäßigerweise noch die Bedingung vorschreiben wollen, daß sie wie $1/r^4$ im Unendlichen verschwinden soll. Denn dann kann man, wie sich im folgenden zeigen wird, entsprechend den im Abschnitt 1 getroffenen Voraussetzungen über die Funktion U diese durch die Gleichung

$$U=\frac{Y_0}{r}+\frac{Y_1}{r^2}+\frac{Y_2}{r^3}+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

---

*) F. Hopfner: a. a. O. S. 575.

erklären, so daß die Fläche

$$\frac{Y_0}{l} + \frac{Y_1}{l^2} + \frac{Y_2}{l^3} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = c_0$$

das Niveausphäroid $U = c_0$ ist. Ebenso wird man erkennen, daß beim Zusammenfallen des Ursprungs mit dem Erdschwerpunkt $Y_1 = 0$ ist und die Kugelfunktionen Y_0 und Y_2 eine einfache Bedeutung haben; l bedeutet den Radiusvektor des Niveausphäroids.

Die harmonische Funktion T und ihre Ableitung $\partial T/\partial r$ erklären wir für $r > a$ durch die Gleichungen

$$\frac{T}{a} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y'_n}{n-1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{n+1}{n-1} Y'_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}.$$

Für $r = a$ soll

$$\frac{T}{a} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y'_n}{n-1}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{n+1}{n-1} Y'_n$$

sein; Y'_n bedeutet die allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung.

Trägt man die Werte für T/a und $\partial T/\partial r$ aus den beiden letzten Gleichungen in die Gleichung (8) ein, so ergibt sich

$$g - \gamma = \sum_{n=3}^{n=\infty} Y'_n.$$

Die Existenz der Lösung folgt aus der Entwickelbarkeit von g auf der Kugel vom Radius a in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe; denn auf dieser Kugel, die in der Differentialgleichung (8) an die Stelle des Niveausphäroids $U = c_0$ tritt, wird γ durch die Gleichung

$$\gamma = \sum_{n=0}^{n=2} Y'_n$$

dargestellt. Infolgedessen konvergiert auch die Reihe

$$\frac{T}{a} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y'_n}{n-1};$$

denn die Reihe für $g - \gamma$ ist eine Majorante dieser Reihe. Die Lösung ist eindeutig; denn g ist in einer und nur einer Weise in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelbar.

Die Verbindung der letzten Gleichung mit dem Theorem von **Bruns** führt zur Gleichung

$$\zeta = -\frac{a}{\gamma} \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y'_n}{n-1},$$

womit die oben formulierte Aufgabe gelöst ist. Eine Integraldarstellung der partikulären Lösung gaben Idelson und Malkin*); jedoch wählten sie die Fläche $\frac{Y_0}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ zum Niveausphäroid $U = c_0$.

4. Wir haben daher nur noch die Funktion W aus den Reihen für die Funktionen U und T zusammenzusetzen. Um sogleich zu einer wohlbekannten Entwicklung für die Kräftefunktion W der Erde zu gelangen, wollen wir in jedem Gliede der Reihe (9) den Faktor $\frac{a^{n+2}}{n-1}$ mit den Konstanten der Kugelfunktion Y_n' vereinigen. Man erhält hierdurch für T die Reihe

$$T = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}},$$

die für $r \geqq a$ konvergiert. Zu dieser Gleichung addieren wir die Funktion

$$U = \sum_{n=0}^{n=2} \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

wodurch sich für die Kräftefunktion W der Erde die bekannte Entwicklung

$$W = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

ergibt.

Sie konvergiert zufolge der vorangehenden Herleitung für $r \geqq a$, d. h. am Niveausphäroid $U = c_0$ und in seinem Außenraum. Ich habe jedoch an anderer Stelle**) gezeigt, daß sie über den angegebenen Bereich hinaus bis tief in die Erdkruste hinein und insbesondere in den Punkten des Geoids $W = c_0$ konvergent ist. Dieses Ergebnis ist durchaus verständlich, wenn man bedenkt, daß bei Vernachlässigung von Größen von der Ordnung α^2 die Poissonsche Gleichung $\Delta W = -4\pi f \varrho + 2\omega^2$ in den Punkten der Erdkruste in die Laplacesche Gleichung $\Delta W = 2\omega^2$ übergeht, da in der Erdkruste $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ist. Hierdurch wird nämlich die Funktion $W - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$, die im Außenraum der Erdmasse eine harmonische Funktion ist, auch in jenen Punkten der Erdkruste harmonisch, in denen $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ist. Infolgedessen ist die Kräftefunktion der Erde — wie im Außenraum — auch in jenem Bereich der Erdkruste, in dem $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ist, durch eine Reihenentwicklung der angegebenen Art darstellbar, wenn Größen von der Ordnung α^2 vernachlässigt werden dürfen.

---

*) N. Idelson u. N. Malkin: Die Stokessche Formel in der Geodäsie als Lösung einer Randwertaufgabe, Gerlands Beitr. z. Geophys. **29**, 1931; J. A. N. Idelson: Die Integralgleichung der physikalischen Geodäsie, ebenda **40**, 1033.

) F. Hopfner: Zeitschr. f. Geophys. **9, 77, 1933.

5. Man kann sagen, daß sich der Radiusvektor r des Geoids vom Radiusvektor l des Niveausphäroids $U = c_0$ um die Größe ζ unterscheidet, wenn Größen von der Ordnung α^2 vernachlässigt werden. Ebenso begeht man in der Differentialgleichung (7) nur einen Fehler von der Ordnung α^2, wenn jenes Niveausphäroid durch die Kugel vom Radius a ersetzt wird. Bei der Integration der Differentialgleichung (8) ist infolgedessen $r = a + \zeta$ zu setzen. Man könnte daher mit Helmert*) die Frage nach dem Fehler aufwerfen, der begangen wird, wenn in der Reihe (9) $r = a$ anstatt $r = a + \zeta$ gesetzt wird.

Aus der Entwicklung

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{a+\zeta}\right)^{n+1} = 1 - (n+1)\frac{\zeta}{a} + \cdots$$

folgert man, daß der in der Reihe (9), d. h. im Werte von T/a, durch den Ansatz $r = a$ hervorgerufene Fehler im ungünstigsten Falle von der Ordnung

$$\left|\frac{\zeta}{a}\sum_{n=3}^{n=\infty}\frac{n+1}{n-1}Y'_n\right| = \left|\frac{\zeta}{a}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a}\right| = \left|\frac{\zeta}{a}(g-\gamma')\right|$$

sein wird; hierin bedeutet $g - \gamma'$ die wahre Schwerkraftstörung.

Nach den Untersuchungen Ackerls**) über das Geoid ist

$$\frac{\zeta}{a} \sim 10^{-4}, \quad g - \gamma' < 1\,\mathrm{cm\,sec}^{-2}.$$

Der im Werte von T/a entstehende Fehler ist somit im ungünstigsten Falle von der Ordnung $10^{-4}\,\mathrm{cm\,sec}^{-2}$, wenn in der Reihe (9) $r = a$ für $r = a + \zeta$ gesetzt wird. Also ist der in ζ/a im ungünstigsten Falle zu erwartende Fehler höchstens von der Ordnung 10^{-7}, wie unmittelbar aus dem Theorem von Bruns erschlossen werden kann. Da α^2 von der Ordnung 10^{-5} ist, kann man sagen, daß ein im Ergebnis merklicher Fehler nicht hervorgerufen wird, wenn bei der Integration der Differentialgleichung (8) in der Reihe (9) $r = a$ für $r = a + \zeta$ gesetzt wird.

6. Ich glaube nicht, daß gegen die theoretischen Grundlagen des Verfahrens ein stichhaltiger Einwand vorgebracht werden könnte. Aber auch die gegen Ackerls mühsame Berechnungen erhobenen Vorwürfe sind zumindest ungerechtfertigt. Gewiß sind seine Linien gleicher Schwerkraftbeschleunigung vielfach hypothetisch. Aber man sollte nicht übersehen, daß die bisher auf anderen Wegen abgeleiteten Ergebnisse auch um kein Jota zuverlässiger sind, da ihnen ein ebenso ungleichmäßig verteiltes und in der Regel noch viel weniger reichhaltiges Beobachtungsmaterial zugrunde liegt wie den Ackerlschen Resultaten. Auch darf man Ackerl nicht die Verwendung der Inselwerte beim Entwurf seiner Linien zum Vorwurf machen. Gewiß gelten die Inselwerte gegenwärtig als

---

*) F. R. Helmert: Höhere Geodäsie **2**, 248, Leipzig 1884.

) F. Ackerl: Die Bestimmung der mathematischen Erdfigur aus Schwerkraftmessungen, Petermanns Mitt. **79, 1933; s. auch Zeitschr. f. Geophys. **9**, 263—275, 1933.

„gestört". Aber es ist kaum mehr daran zu zweifeln, daß diese „Störung" der Inselwerte vorwiegend nur eine Folge der Wirkung des bisher nicht beachteten Terms von Bruns ist; Senkungen über den Weltmeeren im Ausmaße von 600 bis 800 m erzeugen nämlich bei Außerachtlassung jenes Terms „Störungen" in den Inselwerten von 0,198 bis 0,262 cm sec^{-2}. Aus dieser Erkentnis heraus durfte Ackerl die Inselwerte nicht fortlassen, ganz abgesehen davon, daß er gegen einen alten naturwissenschaftlichen Erfahrungssatz gesündigt hätte, wenn er nicht alle vorliegenden Beobachtungswerte ohne Ausnahme zur Ableitung seiner Ergebnisse herangezogen hätte. Denn sein Ziel war gewesen, wenigstens die beiläufige Größe und Verteilung der Undulationen festzustellen, aber nicht etwa diese durch eine geeignete Auslese unter den vorliegenden Beobachtungen wegzueskamotieren nur zu dem Zwecke, um die bisherigen Ergebnisse über die Abplattung des Niveausphäroids zu bestätigen. Wenn hierbei Ackerl zu Ergebnissen kam, die von den gegenwärtigen Vorstellungen zum Teil beträchtlich abweichen, so spricht diese Tatsache an und für sich weder gegen die zugrunde liegende Theorie noch gegen die verwendeten Beobachtungswerte, da niemand leugnen kann, daß die bisherigen Ergebnisse auf höchst mangelhafter theoretischer Grundlage gewonnen worden sind. Ich will nur — ohne mich auf weitere Ausführungen einzulassen — daran erinnern, daß die Geodäsie in den letzten 50 Jahren ein Randwertproblem zu lösen versucht hat, ohne sich vorher die hierzu erforderlichen Randwerte zu verschaffen; ich glaube, schon diese Tatsache allein genügt für die Beurteilung der bisherigen Versuche und ihrer Ergebnisse.

Neue Messungsergebnisse mit dem statischen Schweremesser

Von **H. Haalck,** Potsdam — (Mit 4 Abbildungen)

Es werden die Versuchsergebnisse mit dem statischen Schweremesser auf einem Elbdampfer während einer Fahrt von Hamburg nach Potsdam mitgeteilt. Die Messungen haben gezeigt, daß es möglich ist, mit Hilfe des statischen Schweremessers die Änderung der Schwerkraft auf einem fahrenden Schiff mit einer hinreichenden Genauigkeit zu registrieren. Der Anschluß an mehr als 14 Pendelstationen ergab im Mittel als mittleren Fehler der statischen Messungen etwa $\pm$ 3 Milligal. Das Vorhandensein einer örtlichen positiven Schwerestörung im Gebiet der Vierlande südlich von Hamburg wird nach den statischen Messungen als sehr wahrscheinlich bezeichnet. Messungen im Gelände längs der Versuchsstrecke Potsdam—Treuenbrietzen, bei welchen das Instrument wie früher auf einem Auto aufgehängt war, ergaben aus den Wiederholungsmessungen ebenfalls einen mittleren Fehler von derselben Größenordnung. Als Ergebnis der damit im wesentlichen zum Abschluß gekommenen Versuche wird festgestellt, daß der barometrische Schweremesser in der Form eines dreifachen Apparats ein für eine allgemeine gravimetrische Vermessung der Länder und Meere geeignetes Instrument bildet.

1. Messungen auf fahrenden Schiffen. In der Weiterentwicklung des statischen (barometrischen) Schweremessers wurde in diesem Frühjahr mit Ver-