

## Werk

**Jahr:** 1933

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:9

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0009

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0009](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0009)

**LOG Id:** LOG\_0068

**LOG Titel:** Aufsuchen versteckter Periodizitäten

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

(Mitteilung aus dem Institut für Praktische Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt, Prof. Dr. A. Walther.)

## Aufsuchen versteckter Periodizitäten \*)

Von Dipl.-Ing. **P. Terebesi**, Budapest — (Mit 5 Abbildungen)

Für die praktisch wichtige Aufgabe des Aufsuchens versteckter Periodizitäten in einem gegebenen Funktionsverlauf wird als Ergebnis einer kritischen Würdigung der vielen vorhandenen Verfahren empfohlen, zunächst Näherungswerte der versteckten Perioden durch Periodogrammanalyse zu bestimmen, und zwar instrumentell mit dem harmonischen Analysator Mader-Ott, dann die Genauigkeit durch Trennung der einzelnen periodischen Bestandteile mit der immer zum Ziele führenden „Destillation“ nach Nikolaus Bernstein zu erhöhen.

Bei der mathematischen Bearbeitung geophysikalischer, insbesondere meteorologischer Versuchsergebnisse spielt das Aufsuchen versteckter Periodizitäten eine wesentliche Rolle.

Eine Summe von rein periodischen Komponenten etwa der Form

$$\left. \begin{aligned}
 y = f(x) &= \sum_k \left( a_k \cos \frac{2\pi}{p_k} x + b_k \sin \frac{2\pi}{p_k} x \right) \\
 &= \sum_k c_k \sin \left( \frac{2\pi}{p_k} x + \psi_k \right)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ist, wenn die  $p_k$  inkommensurabel sind, nicht periodisch. Praktisch müssen sogar rein periodische Vorgänge von der Form (1) (mit kommensurablen  $p_k$ ) oft als nichtperiodisch behandelt werden, wenn nämlich die Gesamtperiode so lang ist, daß die zur Untersuchung des Vorganges angestellte Versuchsreihe sich nicht über eine volle Periode erstreckt. Die Verhältnisse werden noch mannigfaltiger, wenn Summen gemischt aus periodischen und nichtperiodischen Gliedern vorkommen oder wenn es sich um Zusammensetzung gedämpfter Schwingungen handelt.

Das Problem des Aufsuchens versteckter Periodizitäten besteht darin, eine gegebene Funktion  $y = f(x)$  in der Form (1) darzustellen, d. h. die Konstanten  $a_k$ ,  $b_k$  und  $p_k$  zu ermitteln. Gegenüber der gewöhnlichen harmonischen Analyse, bei der die  $p_k$  als Bruchteile  $p/k$  (mit  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) einer Grundperiode  $p$  von vornherein bekannt und nur die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  zu bestimmen sind, tritt hier als neu und sehr erschwerend die Aufgabe hinzu, auch die  $p_k$  selbst festzulegen.

---

\*) Teil einer von der Technischen Hochschule Darmstadt zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Inaugural-Dissertation.

Eine vorzügliche ausführliche Zusammenstellung verschiedenster Verfahren zum Aufsuchen versteckter Periodizitäten findet man bei K. Stumpff: Analyse periodischer Vorgänge\*); wir werden deshalb hier nur die Grundlagen wiederholen und namentlich die seit dem Erscheinen der Arbeit von Stumpff neu zugekommenen Abhandlungen diskutieren. Unser Ziel ist, die bequemsten Lösungswege herauszuheben und zu zeigen, daß das so häufig vorkommende Aufsuchen versteckter Periodizitäten heute nicht mehr eine Angelegenheit weniger Spezialisten zu sein braucht, sondern jedem Praktiker zugänglich ist.

**1. Periodogramm-Analyse.** Die eine Gruppe der Methoden zur Lösung des gestellten Problems ist eine unmittelbare Erweiterung der harmonischen Analyse und wird als Periodogramm-Analyse bezeichnet. Die Grundlagen sind folgende:

Die vier Integrale

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= \frac{\nu}{n\pi} \int_0^{\frac{n}{\nu} \frac{2\pi}{\nu}} \cos \mu x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{n\pi} \frac{\mu \nu}{\mu^2 - \nu^2} \sin n \mu \frac{2\pi}{\nu} \\
 J_2 &= \frac{\nu}{n\pi} \int_0^{\frac{n}{\nu} \frac{2\pi}{\nu}} \sin \mu x \sin \nu x \, dx = \frac{1}{n\pi} \frac{\nu^2}{\mu^2 - \nu^2} \sin n \mu \frac{2\pi}{\nu} \\
 J_3 &= \frac{\nu}{n\pi} \int_0^{\frac{n}{\nu} \frac{2\pi}{\nu}} \sin \mu x \cos \nu x \, dx = -\frac{1}{n\pi} \frac{\mu \nu}{\mu^2 - \nu^2} \left( \cos n \mu \frac{2\pi}{\nu} - 1 \right) \\
 J_4 &= \frac{\nu}{n\pi} \int_0^{\frac{n}{\nu} \frac{2\pi}{\nu}} \cos \mu x \sin \nu x \, dx = \frac{1}{n\pi} \frac{\nu^2}{\mu^2 - \nu^2} \left( \cos n \mu \frac{2\pi}{\nu} - 1 \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(dabei sollen  $\mu$  und  $\nu$  beliebige, auch irrationale, von einander verschiedene positive Zahlen sein;  $n$  ist irgendeine positive ganze Zahl; die Integration erstreckt sich über  $n$  volle Perioden  $2\pi/\nu$  des einen Faktors) streben mit wachsendem  $n$  gegen Null, falls  $\mu \neq \nu$  ist. Bei  $\mu = \nu$  werden die Integrale  $J_1$  und  $J_2$  unabhängig von  $n$  gleich 1, die Integrale  $J_3$  und  $J_4$  gleich Null.

Wird daher eine Summe von der Form (1) mit  $\cos \nu x$  oder  $\sin \nu x$  multipliziert und bei passendem, genügend großem  $n$  zwischen Null und  $n \frac{2\pi}{\nu}$  integriert, so

\* Sammlung geophysikalischer Schriften, herausgegeben von C. Mainka, Nr. 6. Berlin, Gebr. Bornträger, 1927.

ist das Ergebnis im allgemeinen wenig von Null verschieden, bis auf den Fall, daß  $\nu$  mit irgendeinem  $2\pi/p_k$  mehr oder weniger übereinstimmt. Führt man die Integration für verschiedene, versuchsweise angenommene  $\nu$  aus und trägt die Werte der Integrale zur Abszisse  $\nu$  oder  $2\pi/\nu$  auf, so wird die so erhaltene „Periodenfunktion“ an den Stellen Extrema aufweisen, wo  $2\pi/\nu$  mit einer der versteckten Perioden  $p_k$  nahezu übereinstimmt. Störungen kommen dadurch herein, daß die Integrale (2) für  $\mu \neq \nu$  bei endlichem  $n$  nur nahezu, aber nicht restlos verschwinden. Sie treten um so mehr zurück, je größer  $n$  gewählt wird.

Praktisch führt man die Integration auf die für eine harmonische Analyse erforderliche Integration zurück. Für die beiden  $n$ -ten Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  einer periodischen Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $P$  gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n \frac{2\pi}{P} x dx \dots \dots \dots (3)$$

Setzt man den oberen Integrationsgrenzen in (2) entsprechend  $P = n \frac{2\pi}{\nu}$ , so gehen die Integrale (3) in

$$\left. \begin{matrix} \alpha_\nu \\ \beta_\nu \end{matrix} \right\} = \frac{\nu}{n\pi} \int_0^{n \frac{2\pi}{\nu}} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \nu x dx \dots \dots \dots (4)$$

über. Die  $\alpha_\nu$  und  $\beta_\nu$  lassen sich also einerseits als Fourier-Koeffizienten der Funktion  $f(x)$  für die Periode  $n \frac{2\pi}{\nu}$  bestimmen. Andererseits sind sie nach (1) und (2)

Summen aus den für  $\mu = \frac{2\pi}{p_k}$  gebildeten  $J$  mit Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ :

$$\alpha_\nu = \sum_k (a_k J_1 + b_k J_3),$$

$$\beta_\nu = \sum_k (a_k J_4 + b_k J_2).$$

Man trägt  $\gamma_\nu = \sqrt{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$  als Ordinate in Abhängigkeit von  $\nu$  zur Abszisse  $2\pi/\nu$  auf. Die so erhaltene Kurve heißt Periodogramm. Sie wird an gewissen Stellen Maxima aufweisen. Die Abszissen  $2\pi/\nu$  der Maxima sind Näherungswerte für die Perioden  $p_k$  der einzelnen periodischen Glieder in (1) und die Ordinaten Näherungswerte für die Amplituden  $c_k$ .

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten  $\alpha_\nu$  und  $\beta_\nu$  von  $f(x)$  für die Periode  $n \frac{2\pi}{\nu}$ , auf die es hiernach hauptsächlich ankommt, hat man bisher fast ausschließlich rechnerische Verfahren angewandt (Periodogrammanalyse nach A. Schuster, vgl. die Schemaverfahren zur harmonischen Analyse), wobei man

die Integrale durch Summen ersetzt. Dabei müssen einzelne getrennte Werte von  $f(x)$  herausgegriffen werden. Demgegenüber scheint es grundsätzlich vorteilhafter, einen stetigen Kurvenzug für die Funktion  $f(x)$  zu benutzen, den man gegebenenfalls durch Verbinden diskreter Beobachtungspunkte zu einer stetigen Kurve gewinnt. Dies ist möglich bei Gebrauch des harmonischen Analysators, der die Fourier-Koeffizienten  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  bequem und genau instrumentell liefert. Die systematische Heranziehung des harmonischen Analysators zum Aufsuchen versteckter Periodizitäten ist ein Hauptpunkt, auf den ich die Praktiker hinweisen möchte. Dadurch werden alle ermüdenden numerischen Rechnungen vermieden und durch einfache mechanische Vorrichtungen ersetzt.

Der harmonische Analysator von Mader-Ott\*), den ich verwendet habe, gestattet die Ermittlung der Integrale (3) für ganzzahlige  $n = 1, 2, \dots, 25$  und für Periodenlängen  $P \leq 36$  cm durch Umfahren der Kurve  $y = f(x)$ . Man zeichnet die Funktion  $f(x)$  so auf, daß die Gesamtlänge der Abszisse 36 cm nicht überschreitet. Dann führt man die Analyse aus, wie in der Gebrauchsanweisung für periodische Kurven angegeben ist. Als Periode  $P$  wählt man zunächst das gesamte Abszissenintervall und nimmt  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Nachher wiederholt man das Verfahren für kleinere  $P$ . Zweckmäßig justiert man den Analysator über die Kurvenmitte und verkleinert die Grenzen von beiden Enden her gleichmäßig. Beispiele S. 320 ff.

**2. Algebraisierung nach Felix Bernstein.** Wie die numerischen Methoden zur Periodogrammanalyse, so verwendet auch ein von Felix Bernstein\*\*) angegebenes Verfahren — jedenfalls soweit es bisher angewandt worden ist — getrennte, gleichabständige Ordinaten. Die Grundlage des Verfahrens ist die „Lagrange-Transformation“

$$L(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} f(x_q) e^{-\tau x_q},$$

durch welche das Problem „algebraisiert“ wird. Die Bestimmung der unbekanntenen Perioden läuft darauf hinaus, die Summen  $L(\tau)$  für verschiedene  $\tau$  zu bilden und algebraische Gleichungen zu lösen. Dabei kann man die Summation im Endlichen abbrechen, wenn  $\tau$  nicht zu klein gewählt wird, in Übereinstimmung damit, daß die Funktion  $f(x)$  nur in einem endlichen Intervall bekannt ist. Als Mangel des Verfahrens macht sich aber geltend, daß bei Vergrößerung von  $\tau$  ein immer größerer Teil der bekannten  $f(x_q)$  durch den Faktor  $e^{-\tau x_q}$  unterdrückt wird. D. h.: Praktisch

\*) Der harmonische Analysator Mader-Ott, Druckschrift Ad. 341 der Firma A. Ott, Kempten-Allgäu.

\*\*) F. Bernstein: Über die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **7**, 441—444, 1927. — A. Glogowski: Beiträge zur Auffindung verborgener Periodizitäten. Münster, Helios-Verlag, 1929. — H. Münzner: Günstigste Bestimmung der Umkehrung der Laplace-Transformierten zur Auffindung verborgener Periodizitäten. Göttingen 1932.

verwendet die Methode nach F. Bernstein nur die ersten 10 bis 20 gleichabständigen Ordinaten; das Resultat wird von den Meßfehlern dieser Ordinaten ausschlaggebend beeinflusst. Glogowski rechnet in seiner Dissertation nach dieser Methode ein fingiertes Beispiel durch. Er bestimmt rechnerisch 120 Ordinaten  $y_0$  bis  $y_{119}$  der Funktion  $y = 8 \sin 0.63 x - 5 \sin 0.17 x$  und bekommt durch sein Verfahren nach durchgeführter Analyse gute Resultate, während das zum Vergleich herangezogene Whittakersche Periodogrammverfahren\*) mehr oder weniger versagt. Ich habe seine Rechnungen nachgeprüft und gefunden, daß die von ihm berechneten 120 Ordinaten vom Index 36 ab, also  $y_{36}$  bis  $y_{119}$  sämtlich falsch sind. Bei seinem Verfahren bleibt dieser Umstand ohne Einfluß auf das Resultat. Rechnet man mit den richtigen Ordinaten, so erhält man auch durch das Whittakersche Verfahren richtige Ergebnisse. Vgl. die Tabellen 1 und 2.

Tabelle 1  
Ergebnisse der Periodogramm-Analyse nach Whittaker

$p$	9	10	11	12
$\gamma$ nach Glogowski . . . . .	4.4	6.4	6.8	5.3
$\gamma$ richtig . . . . .	0.42	7.67	0.78	

Münzner berechnet theoretisch die Anzahl der Ordinaten, welche noch berücksichtigt werden müssen. Ich fand, daß praktisch noch weniger genügen. Um die höheren Ordinaten zu berücksichtigen, schlägt Münzner vor, sie teils in richtiger, teils in umgekehrter Reihenfolge in die Rechnung hereinzuziehen, gibt aber selbst zu, daß die Rechenarbeit dadurch wesentlich steigt.

Zusammenfassend scheint jedenfalls, daß die theoretisch höchst geistreiche Methode von F. Bernstein in der Praxis starken Einwänden ausgesetzt ist. Auch die Bestimmung der mittleren Fehler der gewonnenen Perioden, worauf F. Bernstein mit Recht hohes Gewicht legt, wird in der Praxis wohl ziemlich illusorisch.

**3. Destillation nach Nikolaus Bernstein.** Nikolaus Bernstein\*\*) stellt sich als Hauptaufgabe die Trennung der einzelnen Glieder in (1) und entwickelt dazu eine von ihm als Destillation bezeichnete Methode. Es sollen gewisse Näherungswerte für die Perioden bekannt sein, etwa durch eine Periodogramm-analyse. (N. Bernstein gibt auch selber eine neue Art der Periodogramm-analyse an, die aber außer der interessanten Herleitung gegenüber den bekannten Methoden nichts wesentlich Neues bringt.)

\*) Vgl. die angeführte Arbeit von K. Stumpff, ferner H. Burkhardt: Trigonometrische Reihen und Integrale, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 1. Teil, 2. Hälfte, S. 819—1354; E. T. Whittaker und G. Robinson, The Calculus of Observations, 2. Aufl., Kap. 13, S. 343—362. London, Glasgow, Bombay, Blackie and Son, 1926.

\*\*) N. Bernstein: Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 7, 476—485, 1927.

Man berechnet folgende Funktionen:

$$y^{\overline{1}} = f^{\overline{1}}(x) = f(x) - f(x + p_1) \dots \dots \dots (5)$$

$$y_{\overline{1}} = f_{\overline{1}}(x) = f(x) + f\left(x + \frac{p_1}{2}\right) \dots \dots \dots (6)$$

wobei  $p_1$  einer der Näherungswerte für eine wahre Periode ist. In den Funktionen  $y^{\overline{1}}$  oder  $y_{\overline{1}}$  kann kein sinusförmiges Glied mit der Periode  $p_1$  vorhanden sein. Denn für das  $k$ -te Glied  $f_k(x)$  in der Entwicklung von  $f(x)$  gelten folgende Gleichungen:

$$c_k \sin\left(\frac{2\pi}{p_k} x + \psi_k\right) = f_k(x) = f_k(x + p_k) = -f_k\left(x + \frac{p_k}{2}\right).$$

In (5) und (6) liefert also  $f_1(x)$  den Beitrag 0.

In  $y^{\overline{2}} = f^{\overline{1}}(x) - f^{\overline{1}}(x + p_2)$  und  $y_{\overline{2}} = f_{\overline{1}}(x) + f_{\overline{1}}(x + p_2/2)$  fehlt weiter das Glied mit der Periode  $p_2$  usw. Wenn man diese Methode genügend oft wiederholt, eliminiert man sämtliche sinusförmigen Glieder, und es bleibt eventuell nur ein nichtperiodischer Rest übrig. Es ist noch bemerkenswert, daß durch die Destillation (5) alle harmonischen Obertöne und durch (6) alle ungeraden Harmonischen mit eliminiert werden.

Selbstverständlich werden nur diejenigen sinusförmigen Glieder restlos eliminiert, deren Perioden mit den angesetzten  $p_1, p_2, \dots$  genau übereinstimmen. Da die Perioden nur angenähert bekannt sind, wird allgemein ein kleiner Rest übrig bleiben, der durch wiederholtes Anwenden der Methode beliebig klein gemacht werden kann.

Der Rest, der bei einer einmaligen Destillation übrig bleibt, läßt sich leicht abschätzen.  $p$  sei die wahre Periode und  $p(1 + \epsilon)$  die durch Näherung ermittelte und in die Destillation eingeführte, wobei  $\epsilon \ll 1$  ist. Betrachten wir nun das Glied der trigonometrischen Reihe mit der Periode  $p$  nach der Destillation (5):

$$\begin{aligned} c \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{p} x + \psi\right) - \sin\left[\frac{2\pi}{p} (x + p(1 + \epsilon)) + \psi\right] \right\} \\ = c \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{p} x + \psi\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{p} x + \psi\right) \cos(1 + \epsilon) 2\pi \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{2\pi}{p} x + \psi\right) \sin(1 + \epsilon) 2\pi \right\}. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon \ll 1$  ist, können wir  $\cos(1 + \epsilon) 2\pi \approx 1$  und  $\sin(1 + \epsilon) 2\pi \approx \epsilon \cdot 2\pi$  setzen. Der Rest ist also:

$$R \approx -c \cdot \epsilon \cdot 2\pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p} x + \psi\right),$$

d. h. die Amplituden vor und nach der Destillation verhalten sich wie  $1 : 2\pi \epsilon$ . Ähnlich läßt sich zeigen, daß bei Destillation nach Gleichung (6) das Amplitudenverhältnis  $1 : \pi \epsilon$  ist.

Besteht die Funktion aus  $n$  rein periodischen Gliedern, so wird nach  $n - 1$  Destillationen nur eine der Perioden übrig bleiben bzw. die Amplitude  $c_n$  des  $n$ -ten periodischen Gliedes überwiegen. Man kann dann die Periode  $p_n$  mit großer Genauigkeit an der Restkurve messen (vgl. die durchgerechneten Beispiele S. 320 ff.). Nun greift man wieder auf die gegebene Funktion zurück und wiederholt die Destillation, wobei man diesmal  $p_n$  zuerst eliminiert. Am Schluß kommt  $p_{n-1}$  sehr genau, usw. Auch Periodogrammanalyse der Destillate, die ja weniger Komponenten enthalten, erweist sich manchmal als nützlich.

Selbstverständlich erscheinen in den Destillaten die Amplituden und Phasen der übriggebliebenen Glieder der Reihe verzerrt. Im  $(n - 1)$ -ten Destillat lassen sich Periode, Amplitude und Phase des  $n$ -ten Gliedes sehr genau bestimmen. Während die Periode  $p_n$  durch die Destillation unverändert bleibt, müssen die ursprüngliche Amplitude  $c_n$  und Phase  $\psi_n$  aus den gemessenen des  $(n - 1)$ -ten Destillats berechnet werden. Bezeichnen wir mit

$$c'_n \text{ die Amplitude, } \psi'_n \text{ die Phase nach } n - 1 \text{ Destillationen (5)}$$

$$c''_n \text{ ,, ,, } \psi''_n \text{ ,, ,, ,, } n - 1 \text{ ,, (6)}$$

und mit  $p_k$  die destillierten Perioden, dann gelten nach Nikolaus Bernstein die Beziehungen:

$$c_n = \frac{c'_n}{2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi p_k}{p_n}} = \frac{c''_n}{2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi p_k}{p_n}},$$

$$\psi_n = \psi'_n - \frac{\pi}{p_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k + \frac{\pi}{2} (n - 1) = \psi''_n - \frac{\pi}{2 p_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k.$$

Durchgeführt wird die Destillation zweckmäßig numerisch. Man schreibt eine Tabelle gleichabständiger Ordinaten auf einen langen Papierstreifen untereinander auf. Dann nimmt man noch einen weiteren Papierstreifen zu Hilfe, auf den in einem gewissen, von der zu destillierenden Periode abhängenden Abstand zwei Marken gezeichnet sind. Legt man die beiden Papierstreifen nebeneinander, so zeigen die beiden Marken auf diejenigen Zahlen, die addiert [Gleichung (6)] bzw. subtrahiert [Gleichung (5)] werden müssen (Fig. 1). Dann schiebt man die Marken eine Stelle weiter, rechnet die Summe bzw. Differenz aus usw. Diese Methode wurde mir von Herrn N. Bernstein brieflich mitgeteilt. In seiner Veröffentlichung ist die Praxis der Rechnung nicht beschrieben. Noch zweckmäßiger verfährt man in der folgenden Weise: Man schneidet in zwei Kartonstreifen je ein kleines Fensterchen, befestigt sie in geeignetem Abstand entsprechend der zu destillierenden Periode mit Reißnägeln auf dem Reißbrett und zieht dann den Papierstreifen mit den Ordinatenwerten unter dem Fensterchen durch (Fig. 2). Man muß dann immer die Zahlen in den Fensterchen ablesen, addieren bzw. subtrahieren und nachher den Papierstreifen in der Pfeilrichtung

eine Stelle weiter ziehen. Im kleinen Fensterchen oben links erkennt man die Ordnungszahl der Ordinate. Mit einer Schreibbadiiermaschine kann man den Streifen mit den Ordinaten besonders bequem herstellen und auch die übrige Rechnung sicher und schnell durchführen.

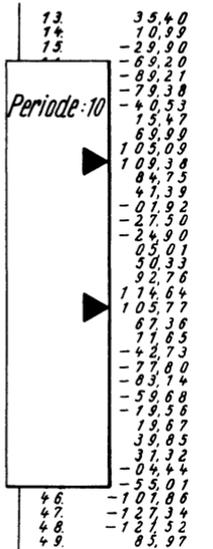


Fig. 1

Praktische Ausführung der Destillation nach Nikolaus Bernstein

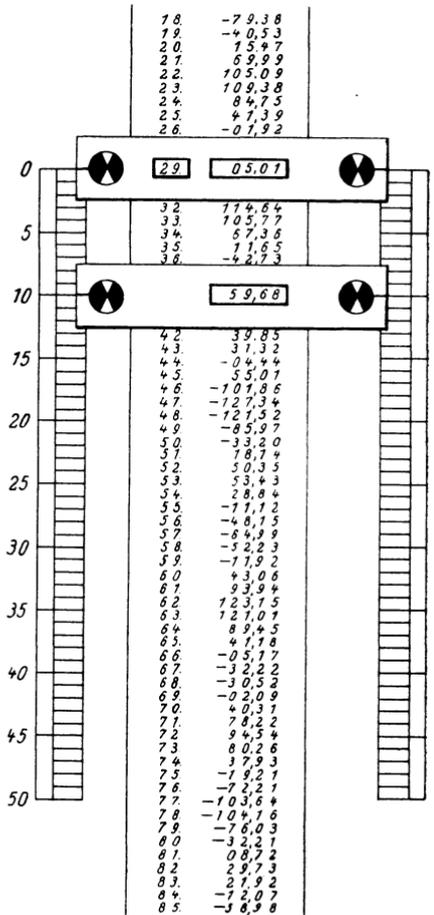


Fig. 2. Schablone für die Destillation

**4. Zahlenbeispiele.** Um die Methode der Periodogrammanalyse und der Destillation im einzelnen zu prüfen und zu erläutern, wurden zwei Beispiele durchgerechnet. Zuerst wurde die von Glogowski\*) als Beispiel verwendete Funktion:  $y = 8 \sin 0.63 x - 5 \sin 0.17 x$  (vgl. S. 317) untersucht. Nachdem die 120 Ordinaten neu berechnet waren, ließ sich die kürzere Periode:  $p_1 = \frac{2\pi}{0.63} \approx 10$  durch

\*) Vgl. S. 316, Fußnote \*\*).

eine Periodogrammanalyse genau ermitteln und nach ihrer Destillation auch die andere:  $p_2 = \frac{2\pi}{0.17} \approx 37$ . Die Periodogrammanalyse wurde auf verschiedenen Wegen durchgeführt, und zwar nach Whittaker, nach N. Bernstein und mit dem Analysator. Fig. 3 zeigt das mit dem Analysator gefundene Periodogramm.

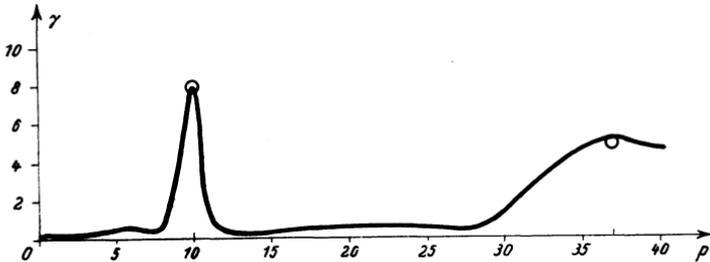


Fig. 3. Zahlenbeispiel 1. Periodogramm mit dem Analysator

Die kleinen Kreise zeigen die wahren Amplituden an. Die Funktion auch nach der Methode Glogowski neu zu untersuchen erübrigt sich. Denn die ersten 36 Ordinaten waren schon bei seiner Rechnung richtig und die übrigen beeinflussen das Resultat nicht mehr (vgl. S. 316—317). Fig. 4 zeigt den Verlauf der Funktion und der Destillate  $f^{\text{I}}$  und  $f^{\text{II}}$ , an denen die Perioden gemessen wurden. Tabelle 2 gibt einen Vergleich zwischen den wahren und den nach verschiedenen Methoden berechneten Perioden und Amplituden.

Tabelle 2  
Beispiel 1 von Glogowski

Wahre Periodenlängen . . . . .	10.0	37.0
Nach Whittaker . . . . .	10.0	39.5
Nach N. Bernstein . . . . .	10.0	35.0
Mit dem Analysator . . . . .	10.0	36.7
Durch Destillation . . . . .	10.0	37.0
Nach Glogowski . . . . .	10.0	36.3
Wahre Amplitude . . . . .	8.00	5.00
Durch Destillation . . . . .	7.95	4.98
Nach Glogowski . . . . .	8.02	4.97

Als zweites Beispiel wurde ein etwas schwierigerer Fall durchgerechnet. Die Perioden wurden nur wenig verschieden gewählt und zu drei Gliedern mit größeren Amplituden wurden noch drei weitere mit kleineren addiert. Letztere sollen etwa periodische Meßfehler oder ähnliche Störungen darstellen, um zu beweisen, daß man die Perioden und Amplituden durch die Destillation auch dann noch genau ermitteln kann, wenn in dem Destillat noch weitere kleine Reste übrig bleiben.

Von der Funktion

$$\begin{aligned}
 f(x) = & -5.3 \cos 13 x + 3.2 \cos 17 x \\
 & + 4.1 \sin 13 x + 4.3 \sin 17 x + 2.8 \sin 20.5 x \\
 & + 0.2 \cos 21 x + 0.3 \cos 22 x \\
 & + 0.4 \sin 21 x - 0.2 \sin 22 x + 0.6 \sin 19 x
 \end{aligned}$$

wurden die Ordinaten von  $x=0$  bis  $x=3.06$  mit der Argumentenspanne  $\Delta x = 0.0175$ , also insgesamt 176 Ordinaten berechnet, graphisch aufgetragen und

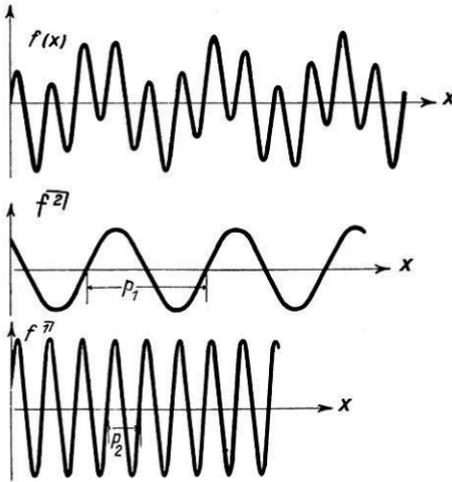


Fig. 4. Zahlenbeispiel 1

Destillation nach Nikolaus Bernstein

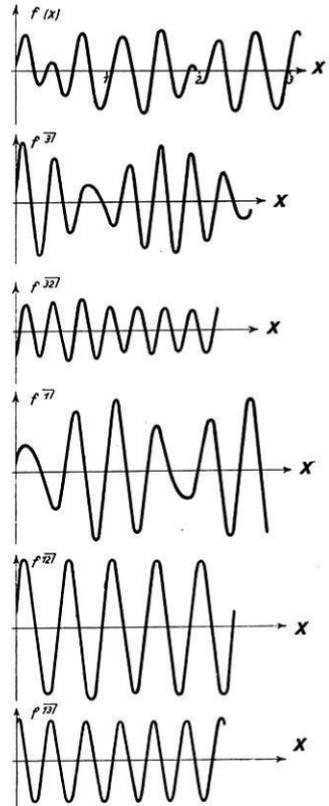


Fig. 5. Zahlenbeispiel 2

Funktion und Destillate

die so erhaltene Kurve analysiert. Fig. 5 zeigt die Destillation der Kurve nach N. Bernstein. Es wurden, wie erwähnt, lediglich die Perioden für die Kreisfrequenzen 13 ( $p = 0.483$ ), 17 ( $p = 0.370$ ) und 20.5 ( $p = 0.306$ ) ermittelt, die weiteren kommen mit verhältnismäßig kleinen Amplituden vor. Tabelle 3 zeigt

das Ergebnis der Analyse. Man erkennt, daß nach der Destillation die Perioden mit guter Genauigkeit bestimmt werden können.

Tabelle 3. Beispiel 2

	$p_1$	$p_2$	$p_3$
Wahre Periodenlänge . . . . .	0.306	0.370	0.483
Periodogramm nach N. Bernstein . . .	0.308	0.372	0.495
Mit dem Analysator . . . . .	0.309	0.368	0.493
Durch Destillation . . . . .	0.304	0.370	0.483

Es wurden folgende Periodenlängen destilliert:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.297 \approx 17 \Delta x \\
 p_2 &= 0.367 \approx 21 \Delta x \\
 p_3 &= 0.489 \approx 28 \Delta x
 \end{aligned}
 \quad \Delta x = 0.0175 = \text{Argumentenspanne.}$$

## Bemerkungen zu F. Ackerls Berechnung der Geoidundulationen

Von **Karl Jung**, Potsdam

In Heft 4/5, S. 265, dieser Zeitschr. bringt F. Ackerl die Ergebnisse seiner Berechnungen des Geoids aus den nach dem Verfahren von Prey auf das Geoid reduzierten Schwerewerten. Wegen eines Vorzeichenfehlers in den Berechnungen und Widersprüchen ihrer theoretischen Grundlagen mit bekannten, gesicherten Ergebnissen der Potentialtheorie können die angegebenen Zahlen die Gesaltl des Geoids nicht beschreiben.

1. Formel (8), S. 270, läßt unmittelbar erkennen, daß für jede einzelne Ordnung  $n$  die Undulation  $\zeta$  und die scheinbare Schwereanomalie  $g - \gamma$  verschiedene Vorzeichen haben. Es ist danach im allgemeinen zu erwarten, daß im Ergebnis die Fälle mit verschiedenen Vorzeichen von  $\zeta$  und  $g - \gamma$  wesentlich häufiger vorkommen als die Fälle mit gleichem Vorzeichen. Eine Durchzählung der Tabelle 2, S. 265, zeigt jedoch, daß dort unter 544 Fällen nur 71 Fälle mit verschiedenem und 473 Fälle mit gleichem Vorzeichen von  $\zeta$  und  $g - \gamma$  zu finden sind.

Es liegt nahe, anzunehmen, daß bei der Berechnung der  $\zeta$  aus den  $g - \gamma$  ein Vorzeichenfehler unterlaufen ist. Diese Annahme wird durch Stichproben gestützt. Für die Pole der Erde gilt:

$$g - \gamma = \sum_{n=3}^{\infty} A_n^0 P_n(\pm 1), \quad \zeta = -\frac{a}{\gamma} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{A_n^0}{n-1} P_n(\pm 1),$$