Beitrag zur Berechnung von Minimum-Stabpendeln

Von **A. Graf**,
wissenschaftl. Mitarbeiter der Askaniawerke, Berlin-Friedenau

(Mit 5 Abbildungen)

Es werden kurze Formeln zur Berechnung von Minimumstabpendeln für beliebige Querschnittsformen unter Berücksichtigung des Schneidenkörpers aufgestellt und das Auftreten von zwei Minima näher diskutiert.

Über die Berechnung von Minimumpendeln sind bisher einige Veröffentlichungen von Wilsing, Schuler, Kohlschütter*) und Meisser**) erschienen. Da alle diese Arbeiten in der Ausführung den Schneidenkörper nicht berücksichtigen, so sollen hier kurze und handliche Formeln abgeleitet werden, die etwa zehnmal so genau sind (0.02 mm) wie für die Abstimmung auf Minimumbedingung (0.2 mm) gefordert werden muß. Dabei soll die Rechnung so allgemein gehalten sein, daß sie für ein Stabpendel mit beliebigem Querschnitt und beliebigem Schneidenkörper, der beliebige Dichte im Vergleich zu derjenigen des Pendels besitzen kann, verwendbar ist. Es muß lediglich die Schwereachse des Schneidenkörpers parallel zum Normalschnitt des Pendels und durch dessen Schwerpunkt führen. Dabei wird sich zeigen, daß bei Berücksichtigung des Schneidenkörpers zwei Minima auftreten, die im Anschluß an die Rechnung diskutiert werden sollen.

Die einem mathematischen Pendel äquivalente Länge eines physikalischen Pendels ist

$$L = \frac{\sum^{i} (K o i + m_i e_i^2) \;^{**})}{\sum^{i} (m_i e_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Für ein Stabpendel mit dem Querschnitt F, der Länge h, der Dichte d, dem Schneidenkörper mit der Masse m und dem Schwerpunktsabstand von der Schneide e lautet dann mit $h_2 = h - h_1$ (Fig. 1) die Gleichung (1)

$$\frac{3}{2} L = \frac{h^2 - 3 h h_1 + 3 h_1^2 + 3 J q/F + 3 (i_p + m e^2)/F d h}{h - 2 h_1 - 2 m e/F d h} \quad \ldots\ldots (2)$$

---

*) E. Kohlschütter: Die Invariabilität und Abstimmung von Minimumpendeln, Zeitschr. f. Geophys. **6**, H. 8, S. 476 (1930).

) O. Meisser: Ein neuer Vierpendelapparat für relative Schweremessungen, ebenda **6, 1—12, 476 (1930).

Hierin bedeutet: Jq das planare Trägheitsmoment des Normalschnittes des Pendels und i_p das axiale Trägheitsmoment des Schneidenkörpers, beide in bezug auf deren einander parallele Schwerpunktsachsen.

Die Bedingung $dL/dh_1 = 0$ ergibt als Beziehungsgleichung zwischen h und h_1 die streng gültige Formel:

$$h_1 = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{2me}{dh^2F}\right) - \sqrt{\frac{h^2}{12} + \frac{Jq}{F} + \frac{m^2e^2}{d^2h^2F^2} + \frac{i_p + me^2}{dhF}} \quad \ldots \quad (3\,\mathrm{a})$$

Für das Halbsekundenpendel mit den gebräuchlichen Dimensionen dürfen einige Glieder vernachlässigt werden, und zwar zeigt die Durchrechnung, daß man auf 0.02 mm genaue Maße erhält mit

$$h_1 = \frac{h}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{Fh^2}\left(J_q + \frac{me}{\sqrt{3}d}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\,\mathrm{b})$$

Setzt man diese Gleichung in (2) ein, so erhält man die beiden gesuchten Pendelabschnitte in L ausgedrückt wie folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} h &= \sqrt{3}L\left[1 - \frac{2}{L^2F}\left(Jq + \frac{me}{\sqrt{3}d}\right)\right] \\ h_1 &= \frac{\sqrt{3}L}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{L^2F}\left(Jq + \frac{me}{\sqrt{3}d}\right)\right] \end{aligned}} \quad \ldots\ldots \quad (4\ \mathrm{u.}\ 5)$$

Diese beiden Gleichungen erlauben, für eine beliebige gewünschte Schwingungsdauer $T = \pi\sqrt{L/g}$ oder für eine beliebige gewünschte Koinzidenzzeit c die Längenmaße h, h_1 und $h_2 = h - h_1$ für irgendeinen gegebenen Pendelquerschnitt und Schneidenkörper zu berechnen.

Die Bedingung $dL/dh_1 = 0$ entspricht jedoch nicht der Wilsing-Schulerschen Annahme der Invariabilität des Pendels bei Veränderung des Schneidenschwerpunktsabstandes. Der Unterschied zwischen $dL/dh_1 = 0$ und $dL/ds = 0$ (s = Schneidenschwerpunktsabstand) ist folgender:

Im ersten Fall sucht man die Stelle auf, wo für ein gegebenes Pendel das absolute Minimum der Schwingungszeit erhalten wird. Diese Schwingungszeit ändert sich nicht merklich, wenn sich Schneide mit Schneidenkörper zusammen um kleine Beträge verschieben. Würde beispielsweise das Pendel nach dem Einhängen in den Pendelapparat etwas durchhängen, so darf sich für ein solches Minimumpendel die Schwingungszeit nicht merklich ändern. Desgleichen würde sich eine kleine Schrumpfung des Kittes, mit dem der Schneidenkörper eingekittet ist, in der Schwingungszeit nicht bemerkbar machen. Anders liegen die Verhältnisse bei der Wilsing-Schulerschen Bedingung. In diesem Falle wird derjenige Punkt des Pendels aufgesucht, wo eine kleine Änderung der Schneide allein bei festem Schneidenkörper keinen Einfluß auf die Schwingungszeit haben soll. Dieses Minimum, das die Schneidenabnutzung mehr oder minder eliminiert, fällt keineswegs mit dem ersteren zusammen, sondern ist um so mehr von ihm entfernt, je größer das Massenverhältnis von Schneidenkörper und Pendel ist. Bei einem Quarzschneidenkörper in einem Quarzpendel von den üblichen Dimensionen beträgt der Abstand beider Minima 1.6 mm, bei demselben Schneidenkörper aus Stahl würde er etwa 6 mm ausmachen. An dem zuerst behandelten Punkte des Pendels herrscht die absolut kürzeste Schwingungszeit; er soll daher der absolute Minimumpunkt oder Schneidenkörper-Minimumpunkt genannt werden, im Gegensatz zum zweiten, dem relativen Minimumpunkt, oder dem Schneidenminimumpunkt.

Die Gleichungen für letzteren folgen ebenfalls aus Formel (1) in Verbindung mit der Wilsingbedingung:

$$L = 2s; \qquad \left(L = \frac{K_0 + Ms^2}{Ms}\right);$$

oder nach Meisser:

$$\frac{L}{2} = \frac{\sum_i (m_i e_i)}{\sum_i m_i} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

mit den früheren Bezeichnungen wird allgemein für ein Stabpendel

$$L = \frac{h^2 - 2hh_1 - 2me/dF}{h + m/dF} \quad \dots \dots \dots \quad (7\,\mathrm{a})$$

dies in (2) eingesetzt, ergibt:

$$h_1 = \frac{h}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{m}{dFh}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{Fh^2}\left(Jq + \frac{2me}{\sqrt{3}d}\right)\right] \quad \dots \quad (7\,\mathrm{b})$$

oder in L mit denselben Vereinfachungen wie früher:

$$\boxed{\begin{aligned} h &= \sqrt{3}L\left[1 - \frac{2}{L^2F}\left(Jq + \frac{me}{\sqrt{3}d}\right)\right], \\ h_1 &= \frac{\sqrt{3}L}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{m}{\sqrt{3}dLF}\right) - \frac{2}{L^2F}\left(Jq + \frac{me}{\sqrt{3}d}(1+\sqrt{3})\right)\right] \end{aligned}} \quad (8 \text{ u. } 9)$$

Wie ersichtlich, stimmt (8) mit (4) überein, d. h. es ergibt sich innerhalb der geforderten Genauigkeit dieselbe Gesamtpendellänge für beide Betrachtungsarten. Dies trifft nicht mehr für h_1 zu. Der Unterschied ist nahezu konstant und beträgt bei Vernachlässigung des Korrektionsgliedes $\Delta h_1 = m/2\sqrt{3}\,dF = 123\,m/M$ mm für das Halbsekundenpendel (M = Masse des Pendels). Unter der Masse des Schneidenkörpers m ist natürlich nur der aus dem Pendel herausragende Teil verstanden, da der im Pendel befindliche zu dessen Masse zählt*). Für ein Gewichts-

*) Bei einem Schneidenkörper (δ_1) aus einem anderen Material als dem des Pendels (δ_0) darf man die gleichen Formeln verwenden, nur hat man bei m zu dem aus dem Pendel herausragenden Teil noch den im Pendel befindlichen Massenüberschuß [Volumen $\cdot$ ($\delta_1 - \delta_0$)] hinzuzuaddieren.

verhältnis Pendel—Schneidenkörper von 1 % erhält man also etwa 1.23 mm Unterschied der Minima.

Beispiel. Es soll ein zylindrisches Quarzpendel mit gegebenem Durchmesser und einem gegebenen Quarzschneidenkörper berechnet werden für die Koinzidenz-

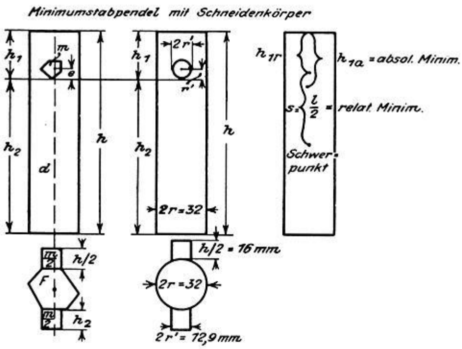

Fig. 1 Fig. 2

zeiten von 30, 60, 90 und 120 Sekunden. Mit den in der Fig. 2 angeführten Maßen ist:

$$Jq = \pi r^4/4 = 16384\,\pi \text{ mm}^4 \quad \ldots \quad (10\text{a})$$

$$F = \pi r^2 = 256\,\pi \text{ mm}^2 \quad \ldots \quad (10\text{b})$$

$$m/d = r'^2 \pi h' = 41.6025 \,.\, 32 \,.\, \pi \text{ mm}^3 \quad \ldots \quad (10\text{c})$$

$$e = r' = 6.45 \text{ mm} \quad \ldots \quad (10\text{d})$$

Für ein Halbsekundenpendel folgt dann:

$c =$	30	60	90	120	sec
$T = \{$	0.491803	0.495868	0.497238	0.497925	,,
	0.508474	0.504202	0.502793	0.502092	,,

Unter Zugrundelegung eines g von 981.28 lauten nach $T = \pi \sqrt{L/g}$ die reduzierten Pendellängen:

$L = \{$	240.479	244.470	245.823	246.503 mm
	257.058	252.757	251.346	250.646 ,,

Die Formel (4) oder (8) ergibt unter Beachtung von (10a bis (10d):

$h = \{$	415.322	422.253	424.604	425.785 mm
	444.113	436.645	434.196	432.980 ,,

Hierbei sei erwähnt, daß die Korrektion durch den Schneidenkörper im Vergleich zum schneidenlosen Pendel im gegebenen Falle etwa 0.64 ‰ der Gesamtlänge, also ungefähr 0.276 mm ausmacht. Da auch Jq und F sowohl für die Berechnung von h als auch h_1 nur in Korrektionsglieder eingehen und beim zylindrischen Pendel nur wenige Promilländerung in h bzw. h_1 ergeben, so ist ersichtlich, daß weder die Größe noch die Form des Stabpendelquerschnitts von großem Einfluß auf die

Schwingungszeit, noch auf die Minimumbedingungen sind. Für h_1 ergibt Gleichung (5) (absolutes Minimum):

$$h_{1a} = \begin{cases} 87.421 & 88.891 & 89.389 & 89.640 \text{ mm} \\ 93.527 & 91.944 & 91.424 & 91.167 \text{ ,,} \end{cases}$$

und Gleichung (9) (relatives Minimum):

$$h_{1r} = \begin{cases} 85.840 & 87.311 & 87.811 & 88.061 \text{ mm} \\ 91.951 & 90.367 & 89.847 & 89.589 \text{ ,,} \end{cases}$$

Die zugehörigen h_2 ergeben sich durch Subtraktion von h. Die Werte von h_{1a} und h_{1r} zeigen, daß der Unterschied beider Minima nahezu konstant ist und im gegebenen Falle 1.58 mm beträgt. Da er m proportional ist, so würde ein Schneidenkörper aus Stahl von derselben Größe die beiden Minima etwa 6 mm auseinander legen.

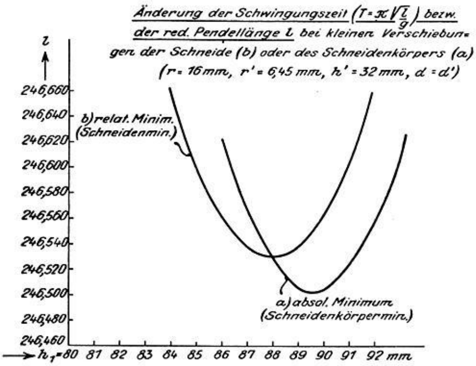

Fig. 3

Zur besseren Illustration wurden noch die Schwingungszeiten in der Gegend der beiden invariablen Punkte berechnet und in Fig. 3 aufgetragen.

Man ersieht deutlich, daß bei Zugrundelegung der Wilsingbedingung das Pendel nicht im Punkte der kürzesten Schwingungszeit gelagert ist. Es zeigt Kurve a), wie sich die Schwingungszeit bzw. L bei einer Verlagerung des Schneidenkörpers und Kurve b) bei einer Verlagerung der Schneide allein ändert. Da in der Praxis eine Abnutzung der Schneide mehr als eine dauernde Veränderung des Schneidenkörpers zu befürchten ist, letztere aber immerhin im Laufe der Zeit vorkommen kann, besonders bei eingekitteten Schneidenkörpern (eine Änderung um 1 μ = 0.001 mm ändert die Schwingungszeit um $1.2 \cdot 10^{-7}$ sec bei Lagerung im relativen Minimumpunkt), so wird man zwar nach wie vor die Pendel für das relative Schneidenminimum dimensionieren, jedoch den Spielraum von 0.2 mm, der nach Meisser und Kohlschütter zugelassen werden darf, so einrichten, daß die Schneide näher an das absolute Minimum herankommt.

Setzt man $m = 0$, d. h. vernachlässigt man den Schneidenkörper, so gehen die Formeln (5) und (9) ineinander über. Für h_1 erhält man dann 89.326 mm und für h = 426.056 mm. Die Gesamtlänge h wird daher bei Vernachlässigung des Schneidenkörpers um 0.27 mm und die Minimumlänge um 1.27 mm falsch berechnet, ein Fehler, der größer als zulässig ist (0.2 mm). Die Fig. 4 und 5 gestatten ein leichtes Abstimmen für irgendeine beliebige gewünschte Koinzidenzzeit zwischen 30 und 150 sec.

Zusammenfassend ergibt sich:

1. Für Stabpendel von beliebigem Querschnitt und beliebigem Schneidenkörper lassen sich einfache Formeln ableiten, aus denen die gesuchten Dimensionen der Pendel von beliebigem Material ermittelt werden können. Bei kurvenmäßiger Darstellung können alle Maße für beliebige Koinzidenzzeiten direkt den Figuren entnommen werden.

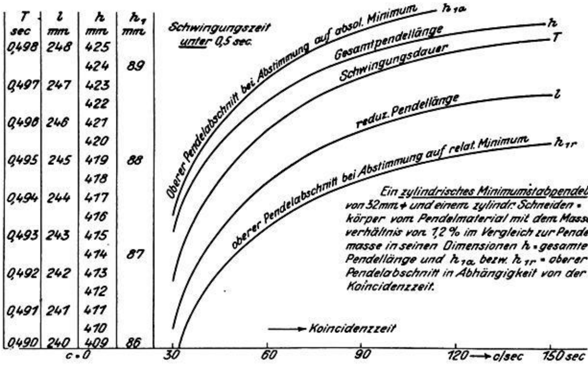

Fig. 4

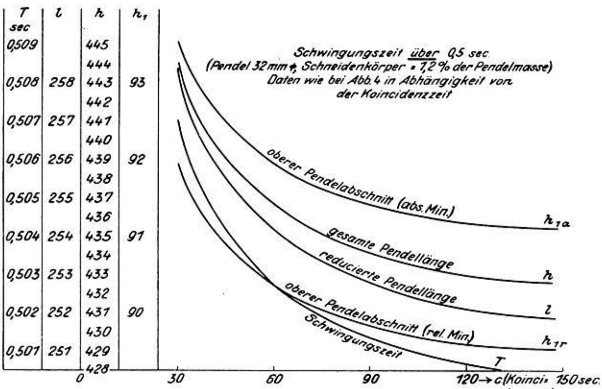

Fig. 5

2. Eine nähere Untersuchung der Minimumbedingung ergibt, daß zwei Minima auftreten, eines für die Schneide und eines für den Schneidenkörper. Bei letzterem hat die Schwingungsdauer den absolut kleinsten Betrag. Die **praktische Forderung** bezieht sich in erster Linie auf das **Schneidenminimum**, doch soll man bei der Abstimmung darauf achten, daß man den oberen Pendelabschnitt eher etwas länger als kürzer macht, da für das **Schneidenkörperminimum** die obere Länge etwas länger wird als für das Schneidenminimum.

Friedenau, den 29. Januar 1934: