

## Werk

**Jahr:** 1934

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:10

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0010

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0010](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0010)

**LOG Id:** LOG\_0020

**LOG Titel:** Zur Theorie elastischer Pendel mit besonderer Berücksichtigung des Holweck-Lejayschen Stabpendels

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Zur Theorie elastischer Pendel mit besonderer Berücksichtigung des Holweck-Lejayschen Stabpendels

Von **A. Graf,**

wissenschaftl. Mitarbeiter der Askaniawerke, Berlin-Friedenau

(Mit 6 Abbildungen)

In der vorliegenden Abhandlung werden streng gültige Formeln für die Schwingungsdauer elastischer Pendel bei kleinen Amplituden sowohl in hängender wie in stehender Lage abgeleitet, und zwar für Pendel beliebiger Massenordnungen, Federlängen und Federquerschnitte. Insbesondere werden das elastische Punktpendel und das elastische Stabpendel näher diskutiert, letzteres im Hinblick auf das bereits konstruktiv durchgeführte und praktisch in seiner Brauchbarkeit erprobte Quarzpendel von Holweck und Lejay. Ferner werden an gegebenen Beispielen je ein Punktpendel und ein Stabpendel in ihren Dimensionen und sonstigen Daten durchgerechnet und Formeln für die Konstantenbestimmungen aufgestellt.

Von Holweck und Lejay sind mehrere Veröffentlichungen\*) erschienen, die sich mit der Theorie, der Konstruktion und den Meßwerten eines elastischen, umgekehrten Pendels befassen. Ein solches schwingt nicht wie das Sterneckpendel vermittelt einer Schneide auf einer festen Unterlage hängend, sondern führt, an einer Invarlamelle befestigt, die Schwingungen stehend aus (Fig. 1). Der Drehpunkt ist nicht genau die Einspannstelle *A*, sondern ein Punkt *A'*, der jedoch bei kurzen Lamellen im Vergleich zum stabförmig ausgebildeten Pendelkörper näherungsweise als mit dem Einspannpunkt *A* zusammenfallend gedacht werden kann. Im folgenden soll eine strenge Ableitung der Schwingungsgleichung und insbesondere der Schwingungsdauer eines solchen Pendels gegeben werden. Sie erstreckt sich zwar nur auf mäßige Amplituden, doch werden innerhalb dieses Bereiches die elastischen Kräfte genau erfaßt und vor allem gestattet die Rechnung eine Verallgemeinerung für die Betrachtung beliebiger Pendelformen und Federlängen, was die vereinfachten und spezialisierten Annahmen Holweck und Lejays nicht erlauben.

Nach diesen ergibt sich für die Schwingungsgleichung:

$$J_0 \frac{d^3 \beta}{dt^3} + c \beta - m g L \sin \beta = 0 \dots \dots \dots (1)$$

---

\*) Holweck und Lejay: Etudes d'un pendule elastique sensible; Contribution à l'Etablissement du réseau gravimétrique français comptes rendues de l'Académie des Sciences Paris 196, No. 1, 44—46, 1933.

Note de Holweck et Lejay: Contribution à la compensation du réseau gravimétrique européen. Comptes rendues de l'Académie des Sciences du 13. II. 33.

Holweck und Lejay: Verbesserungen an dem transportablen Instrument zum schnellen Messen der Schwerkraft. C. R. 192, 1116 (1931); 190, 1387 (1930); ferner 188, 1089—1091 (1929), Nr. 17; 186, 1827—1830 (1928), Nr. 26.

und demgemäß für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{c - mgL} \left[ 1 - \frac{mgL}{c - mgL} \frac{\beta^2}{16} \dots \right]} \dots \dots \dots (2)$$

desgleichen für die prozentuale Änderung von  $T$ :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dg}{c - mgL} \dots \dots \dots (3)$$

Hierin bedeuten  $J_0$  das Trägheitsmoment des Pendelkörpers mit der Masse  $m$  um die Drehachse,  $c$  eine Federkonstante,  $L$  den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse und  $\beta$  den Drehwinkel.

**I. Das elastische Punktpendel.** Um zu allgemeinen Gleichungen zu gelangen, sei in Fig. 2a und 2b ein elastisches Punktpendel mit langer Feder betrachtet, das statisch durch die Kräfte  $P$  und  $Q$  beansprucht wird. Es ergeben sich dann nach den Lehren der Statik für die elastische Linie\*) für Fig. 2a:

$$y = \frac{Q}{P} \left[ x - \frac{1}{\omega} \frac{\text{Sin } \omega l - \text{Sin } \omega (l - x)}{\text{Cos } \omega l} \right] \dots \dots \dots (4a)$$

und für Fig. 2b:

$$y = \frac{Q}{P} \left[ -x + \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega l - \sin \omega (l - x)}{\cos \omega l} \right] \dots \dots \dots (4b)$$

wo  $\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ ,  $E$  den Elastizitätsmodul der Feder und  $J$  das Flächenträgheitsmoment des Federquerschnitts bezogen auf die senkrecht zur Biegungsebene stehende Schwereachse bedeuten.

Für die Tangenten am Federende erhält man:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \text{tg } \beta = \frac{Q}{P} \left( \frac{1 - \text{Cos } \omega l}{\text{Cos } \omega l} \right), \dots \dots \dots (5a)$$

$$\text{tg } \beta = \frac{Q}{P} \left( \frac{\cos \omega l - 1}{\cos \omega l} \right) \dots \dots \dots (5b)$$

Der scheinbare Drehpunkt ergibt sich aus:

$$(\text{tg } \beta)_{x=l} = \frac{y_0}{l - x},$$

wo  $y_0$  den Biegepfeil oder die größte Ausbiegung bedeutet; diese ergibt sich nach (4a) und (4b) zu:

$$(y_0)_{x=l} = \frac{Q}{P} \left[ l - \frac{\text{Tg } \omega l}{\omega} \right], \dots \dots \dots (6a)$$

$$(y_0)_{x=l} = \frac{Q}{P} \left[ \frac{\text{tg } \omega l}{\omega} - l \right] \dots \dots \dots (6b)$$

---

\*) Hütte I, 695 (1923).

Daher folgt für den scheinbaren Drehpunkt  $A'$ :

$$l - x_0 = l_{su} = \frac{\omega l \cos \omega l - \sin \omega l}{\omega (\cos \omega l - 1)}, \dots \dots \dots (7a)$$

$$l - x_0 = l_{so} = \frac{\sin \omega l - \omega l \cos \omega l}{\omega (1 - \cos \omega l)} \dots \dots \dots (7b)$$

Es zeigt sich die erfreuliche Tatsache, daß  $Q$  in  $l_{su}$  oder  $l_{so}$  nicht enthalten und daher  $l_s$  für ein gegebenes Pendel konstant ist; d. h. also, nicht nur beim starren,

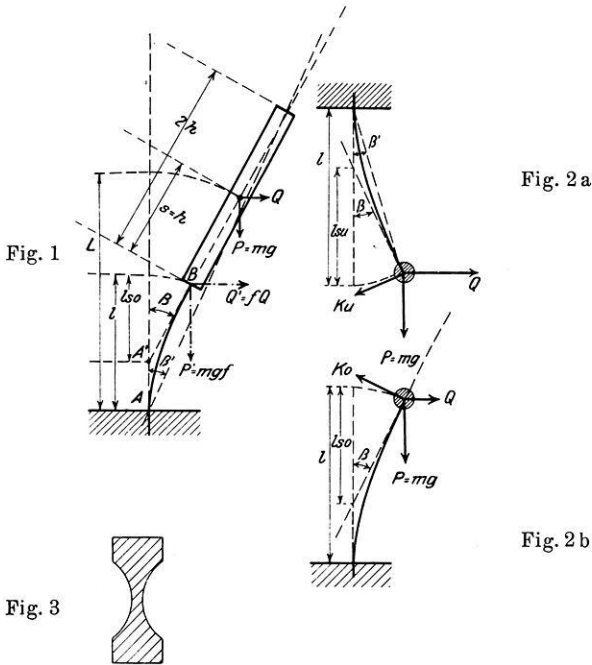


Fig. 1. Skizze zum elastischen Stabpendel  
 Fig. 2 a. Skizze zum elastischen Punktpendel (hängend)  
 Fig. 2 b. Skizze zum elastischen Punktpendel (stehend)  
 Fig. 3. Profil einer durchknickfesten Feder

sondern auch beim elastischen Pendel ist die effektive Pendellänge (Abstand Schwerpunkt—scheinbarer Drehpunkt) invariabel, wenigstens für kleine Amplituden. Die Gleichungen der elastischen Linien (4a) und (4b) gelten nämlich nur für kleine Winkel  $\beta$  streng. Der größtmögliche Winkel für den hauptsächlich interessierenden Fall (7b) ist  $\omega l = 90^\circ$ . Für diesen ergibt sich:

$$l_{su} = 0.693 l \dots \dots \dots (8a)$$

$$l_{so} = 0.637 l \dots \dots \dots (8b)$$

und eine Grenzbetrachtung liefert für sehr kleine Winkel  $\omega l$ :

$$l_{su} = 0.667 l = \frac{2}{3} l \dots \dots \dots (8c)$$

$$l_{so} = 0.667 l = \frac{2}{3} l \dots \dots \dots (8d)$$

Man sieht, daß die scheinbare Pendellänge  $l_s$  nur wenig von der Größe der Belastung abhängt; man darf daher näherungsweise bei kleinen  $P$  immer setzen  $l_{su} = l_{so} = \frac{2}{3} l$ , sowohl bei stehendem wie bei hängendem Pendel. Nur für große Belastungen  $P$ , und solche sind stets zu wählen für elastische Pendel zur schnellen Schwerebestimmung, hat man  $l_s$  für eine gegebene Pendelmasse in beiden Schwingungslagen erst zu bestimmen. Beim Holweck-Lejay-Pendel fällt der Unterschied nicht stark ins Gewicht, da dort die Feder sehr kurz ist im Vergleich zum Abstand Schwerpunkt—Drehpunkt. Darüber wird später noch näher einzugehen sein. Für den größtmöglichen Fall  $\omega l = 90^\circ = \pi/2$  erhält man:

$$P = mg = \frac{\pi^2}{4} \frac{E J}{l^3} = P_K \dots \dots \dots (9)$$

und dies ist die Eulersche Knicklast\*). Bei einer geringen Vermehrung von  $m$  würde die Feder durchknicken. Die scheinbare Pendellänge eines elastischen Pendels  $l_s$  ändert sich also nur um rund  $\pm 4.3\%$ , wenn man die Belastung von 0 bis auf die Größe der Knicklast treibt.

Im Falle der Fig. 2a und 2b hat man für die elastische, senkrecht zum Lamellenende stehende Federkraft, die  $P$  und der Hilfskraft  $Q$  das Gleichgewicht hält, gemäß (5a) und (5b):

$$K_u = P \sin \beta - Q \cos \beta = - P \sin \beta \left( \frac{1}{\cos \omega l - 1} \right), \dots \dots (9a)$$

$$K_o = - (P \sin \beta + Q \cos \beta) = - P \sin \beta \left( \frac{1}{1 - \cos \omega l} \right) \dots \dots (9b)$$

Nunmehr hat man alles, um die Schwingungsgleichung ansetzen zu können: es ergibt sich für das elastische Pendel mit punktförmiger Masse bei beliebiger Federlänge:

$$l_{su} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + g \sin \beta \frac{\cos \omega l}{\cos \omega l - 1} = 0, \dots \dots \dots (10a)$$

$$l_{so} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + g \sin \beta \frac{\cos \omega l}{1 - \cos \omega l} = 0 \dots \dots \dots (10b)$$

und für die Schwingungszeiten in beiden Fällen:

$$T_u = 2 \pi \sqrt{\frac{l_{su} (\cos \omega l - 1)}{g \cos \omega l}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{16} + \dots \right) \dots \dots \dots (11a)$$

$$T_o = 2 \pi \sqrt{\frac{l_{so} (1 - \cos \omega l)}{g \cos \omega l}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{16} + \dots \right), \dots \dots \dots (11b)$$

---

\*) Hütte I, 616 (1923).

wo  $l_{su}$  und  $l_{so}$  aus den Gleichungen (7a) und (7b) einzusetzen sind, so daß man auch schreiben kann:

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 - \frac{\mathfrak{I}g \omega l}{\omega l}\right)} (1 + \dots), \dots \dots \dots (11c)$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(\frac{tg \omega l}{\omega l} - 1\right)} (1 + \dots) \dots \dots \dots (11d)$$

Die Faktoren  $\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{I}g \omega l}{\omega l}}$  und  $\sqrt{\frac{tg \omega l}{\omega l} - 1}$  stellen also die Vergrößerungsfaktoren der Schwingungsdauer des elastischen Punktpendels gegenüber einem starren mathematischen Pendel dar. Für kleine Massen  $m$  lassen sich die Kreis- und die Hyperbelfunktionen leicht entwickeln und man bekommt unter Beachtung von (8c) und (8d) und (11a) und (11b):

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{2 m l^3}{3(2 E J + m g l^2)}}, \dots \dots \dots (12a)$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{2 m l^3}{3(2 E J - m g l^2)}} \dots \dots \dots (12b)$$

Diese Gleichungen stimmen mit denen von Holweck und Lejay (2) überein, wenn man setzt:

$$c = \frac{2 E J}{l} \quad \text{und} \quad J_o = \frac{2}{3} m l^2; \dots \dots \dots (12c)$$

Dies gilt allerdings nur für kleine Massen  $m$ . Für große, und solche werden praktisch immer verwendet, hat man die Funktion in der Nähe von  $90^\circ$  zu entwickeln; denn für diesen Fall wird  $T_o$  gleich unendlich. Praktisch am einfachsten ist es, die Funktion zu berechnen und in Kurvenform aufzutragen, wie dies in Fig. 5 geschehen ist. Man ersieht daraus, daß  $T_u$  für kleine  $\omega l$ , also kleine Pendelmassen, sich nicht merklich von  $T_o$  unterscheidet; mit wachsendem  $m$  hat man ein lang-

sames Anwachsen von  $T_u$ , während  $T_o$  sehr schnell ansteigt und bei  $m = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2 \cdot g}$

den Wert Unendlich erreicht;  $T_u$  steigt über  $\omega l = 90^\circ$  hinaus immer noch langsam an, um schließlich bei  $m$  gleich Unendlich als Maximum den Grenzwert für das starre Pendel zu erreichen, dessen reduzierte Pendellänge  $l_{su}$  wäre. Für  $\omega l = 90^\circ - \varepsilon$  kann man (11c) und (11d) auch schreiben:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l_{so}}{g \left(\frac{\pi}{2} - \omega l\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g \pi \left(\frac{\pi}{2} - \omega l\right)}} \dots \dots \dots (13)$$

welche Gleichung für das elastische Punktpendel mit großer Masse gültig ist. Es ergibt sich daher als wichtige Tatsache:

Für große Schwingungszeiten hat man  $mg l^2 / EJ \approx \pi^2 / 4$  zu machen, d. h. die Feder des elastischen Punktpendels muß nahezu auf Durch-

knicken beansprucht werden, wenn man den Vorteil des langsamen Schwingens ausnutzen will. Dies ist ein nicht gerade ermutigendes Ergebnis; denn ein solches stark belastetes Pendel wird sehr empfindlich gegenüber kleinen Änderungen der elastischen Eigenschaften der Lamelle und gegen kleinste Stöße irgendwelcher Art sein.

Holweck und Lejay ist es jedoch durch einen Trick gelungen, von dieser Knickgrenze möglichst wegzukommen, wie aus den Spezialleitungen weiter unten ersichtlich ist.

Es sei hier eingeschaltet, daß eine vereinfachte, gewissermaßen als Kontrolle zu verwendende Betrachtungsweise des elastischen Pendels, die für die elastische Linie bei kleinen Amplituden  $P$  vernachlässigt, folgendes ergibt:

Statt (4a) und (4b)

$$y = \frac{Q l^3}{2 E J} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{3 l^3} \right)^* \text{ usw.}$$

und endlich statt (11a) und (11b):

$$T_o^u = 2 \pi \sqrt{\frac{2 m l^3}{3 (2 E J \pm m g l^2)}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{16} + \dots \right) \cdot \dots \cdot \quad (14)$$

Für kleine Massen ergibt sich also dieselbe Formel wie bei der strengen Annahme; für große Massen erhält man, wie ein Vergleich mit (13) ergibt, eine um 19% zu kleine Grenzbelastung für  $T_\infty$ ; denn statt des richtigen Faktors  $\pi^2/4$  (Eulersche Knicklast) erhält man hier nur 2.00. Da praktisch die Konstanten des Pendels nicht berechnet, sondern aus Schwingungsbeobachtungen ermittelt werden, so fällt der Unterschied der strengen Betrachtung gegenüber der vereinfachten nur dann auf, wenn sich  $m$  ändert. Die Fehlergröße von (14) ersieht man durch Vergleich mit (11a); für den Faktor  $\frac{\text{Cof } \omega l - 1}{\text{Cof } \omega l} = 0.6$  ( $\omega l = \pi/2$ ) erhalte man nach (14) 0.5, also einen Fehler in  $T_u$  von rund 9%.

Für die Änderung der Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Schwerkraftsänderung errechnet sich aus (11c) und (11d):

$$\frac{d T_u}{T_u} = \frac{d g}{2 g} \left[ \frac{\text{Sin } \omega l \text{Cof } \omega l - \omega l}{2 \text{Cof } \omega l (\omega l \text{Cof } \omega l - \text{Sin } \omega l)} - 1 \right] = \frac{d g}{2 g} V_u \cdot \dots \quad (15 a)$$

$$\frac{d T_o}{T_o} = \frac{d g}{2 g} \left[ \frac{\omega l - \sin \omega l \cos \omega l}{2 \cos \omega l (\sin \omega l - \omega l \cos \omega l)} - 1 \right] = \frac{d g}{2 g} V_o \cdot \dots \quad (15 b)$$

wo die eckigen Klammern die respektiven scheinbaren Vergrößerungsverhältnisse  $V$  gegenüber dem Sterneckpendel angeben. Sie werden scheinbar genannt, da ja  $T_u$  und  $T_o$  nicht die wahren Schwingungsdauern eines gleich langen Sterneck-

\*) Hütte I, S. 657 (1923).

pendels ergeben. In Fig. 4\*) ist  $V_u$  und  $V_o$  in Abhängigkeit von  $\omega l$  aufgetragen.  $V_u$  wächst mit steigender Pendelmasse an, und zwar von 0 auf den Grenzwert 1, der erst bei unendlich großer Masse erreicht wird. Bei  $\omega l = 90^\circ$  ist  $V_u$  nicht genau  $= 0.5$ , weil, wie früher gezeigt wurde,  $l_s$  sich mit der Belastung etwas verschiebt.

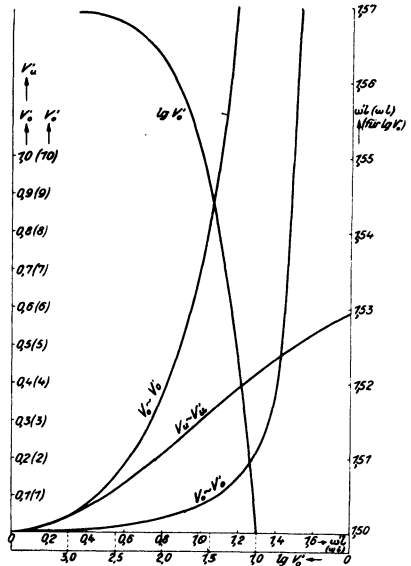
Für kleine Massen ist  $V_u = V_o = \frac{3}{8} \omega^2 l^2 = \frac{3}{8} \frac{mg l^2}{E J}$ . Für große Massen wurde

Fig. 4  
Die Vergrößerungsfaktoren  $V'_u$ ,  $V'_o$   
und  $\lg V'_o$  für elastische Stabpendel

$$V'_u = \left[ \frac{\omega' l}{2} \frac{\text{I}g \omega' l}{(\text{C}o\text{f} \omega' l - 1)} - 1 \right]$$

und

$$V'_o = \left[ \frac{\omega' l}{2} \frac{\text{t}g \omega' l}{(1 - \text{c}o\text{s} \omega' l)} - 1 \right]$$



maßstabshalber  $V'_o = V_o$  auch logarithmisch aufgezeichnet (Fig. 4). Für diesen Fall kann man (15b) mit großer Näherung ersetzen durch:

$$V_o \approx \frac{\pi}{2(\pi - 2\omega l)} \quad (\text{großes } m) \dots \dots \dots (15c)$$

Für eine Vergrößerung von 200 muß man  $\omega l$  bereits über  $89^\circ 45'$  machen; die Masse  $m$  erreicht damit praktisch schon die Größe der Knicklast. Selbst bei zehnfacher Vergrößerung wird  $\omega l$  bereits  $86^\circ$  und man gerät auch hier schon sehr bedenklich in die Nähe der gefährlichen Beanspruchung.

Man ersieht daraus, daß elastische Punktpendel, also elastische Federn mit punktförmig am Ende angebrachten Pendelkörpern, für die Zwecke der Schwerkraftmessung nicht günstig sind; denn bei geringsten Erschütterungen würden Zusatzbeschleunigungen zu  $g$  die Feder durchknicken.

\*)  $V_u$  und  $V_o$  unterscheiden sich nur wenig von  $V'_u$  und  $V'_o$ , wenn statt  $\omega l$  das Argument  $\omega' l$  gesetzt wird. Bei kleinem  $\omega l$  erhält man statt  $\frac{3}{8} \omega^2 l^2$  dort  $\frac{\omega'^2 l^2}{3}$ , bei großem wird  $V_o = V'_o$ . (25b).



Konstantenbestimmung. Die Bestimmung von  $l$  läßt sich nach (11c) sehr leicht ausführen durch eine Schwingungsmessung in hängender Lage. Es ergibt sich mit guter Näherung:

$$l = 60 T_u^2 \dots \dots \dots (16a)$$

$\omega l$  findet man durch Messung der Schwingungszeit in stehender oder in hängender und hängender Lage bei bekanntem  $g$  nach (11d) und (16a):

$$\frac{\text{tg } \omega l}{\omega l} = 1 + \frac{g T_o^2}{4 \pi^2 l} \approx 1 + \frac{g T_o^2}{240 \pi^2 T_u^2} \dots \dots \dots (16b)$$

Bei großem  $m$ , also großem  $T_o$ , darf auch gesetzt werden:

$$\omega l = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{16 l}{g T_o^2} \right) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{960 T_u^2}{g T_o^2} \right) \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 - 0,98 \frac{T_u^2}{T_o^2} \right) \dots \dots (16c)$$

Für ein Pendel mit  $T_o = 6''$  und  $T_u = 0.316''$  ergibt sich beispielsweise ein  $l$  von 6 cm (Länge der Lamelle von der Einspannstelle bis zur Mitte der punktförmigen Masse) und ein  $\omega l = 89^\circ 45.4'$ . Nach (15b) wird der scheinbare Vergrößerungsfaktor  $V_o$  der Schwereempfindlichkeit rund 183, während ein Sterneckpendel gleicher Länge gemäß (11d) nur  $1/12.17 = 1/v_o$  von  $T_o$ , also 0.493 sec Schwingungsdauer hätte ( $1/4$  sec für die halbe Periode). Der Abstand Drehpunkt—Schwerpunkt würde  $l_s = 4.0$  cm; für  $mg/EJ$  folgt 0.0685 und bei einem gegebenen  $mg$  von 1.815 g wird  $EJ$  gleich 26.5 g cm<sup>2</sup>. Für Invar ist  $E = 1.4 \cdot 10^9$  g/cm<sup>2</sup> und daher die Dicke einer Blattfeder von 4 mm Breite 0.083 mm. Aus (15c) folgt für große  $V_o$ :

$$dg = \frac{4g}{\pi T_o} (\pi - 2\omega l) dT \text{ gal.} \dots \dots \dots (17)$$

Für das gewählte Beispiel erhält man:

$$dg = 1775 dT \text{ mgal};$$

man bekäme also für 1.775 mgal Schwereänderung eine Differenz in der Schwingungszeit von 0.001 sec. Der wirkliche effektive Vergrößerungsfaktor ist daher  $\mathfrak{B} = V_o \cdot v_o = 2226$  gegenüber dem Sterneckpendel. Oder allgemein:

$$\mathfrak{B} = \left[ \frac{\omega l - \sin \omega l \cos \omega l}{2 \cos \omega l (\sin \omega l - \omega l \cos \omega l)} - 1 \right] \sqrt{\frac{\text{tg } \omega l}{\omega l} - 1} \approx \sqrt{\frac{\pi}{(\pi - 2\omega l)^3}} \dots (18)$$

**II. Das elastische Stabpendel.** Die bisherigen Ableitungen haben ergeben, daß elastische Punktpendel zwecks Erlangung eines starken Vergrößerungsfaktors

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\pi}{(\pi - 2\omega l)^3}}$$

nahezu mit der Knicklast beansprucht werden müssen. Es taucht nun die Frage auf, ob es nicht eine Massenordnung gibt, wo man schon früher, also bei geringeren Belastungen zu einem großen  $\mathfrak{B}$  gelangen kann. Eine solche liegt beim

Holweck-Lejayschen Stabpendel vor. Dort besitzt man nämlich durch das Wegrücken des Massenschwerpunktes vom Federende eine Hebelübersetzung, die gestattet, beim gleichen Vergrößerungsfaktor kleinere Massen verwenden zu können.

Ableitung der Gleichungen. Im Schwerpunkt  $S$  des elastischen Stabpendels (Fig. 1) mögen die Kräfte  $Q$  und  $P$  angreifen; dann ergeben sich für das Federende in  $B$  die Ersatzkräfte  $P' = P \cdot f'$  und  $Q' = Q \cdot f'$ , wo

$$f' = 1 + \frac{3}{2} \frac{s}{l} \text{ oder genauer } f'_u = 1 + \frac{s}{l'_{su}}, f'_o = 1 + \frac{s}{l'_{so}}.$$

Es ändert sich also an den bisherigen Ableitungen nichts, wenn man statt  $P$  nunmehr  $P'$  und statt  $Q$  nunmehr  $Q'$  und dementsprechend statt  $\omega$  nunmehr  $\omega' = \omega \sqrt{f'}$  setzt. Um die Rechnung auch für beliebige Pendelkörperformen

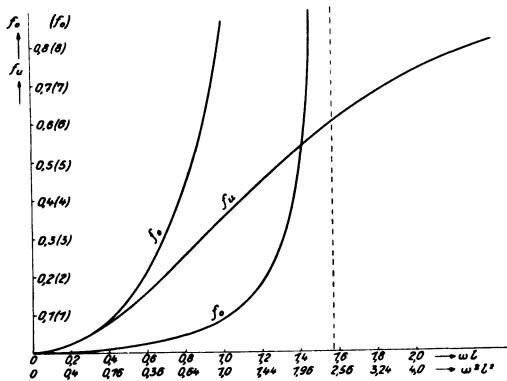


Fig. 5. Die Faktoren  $f_u = \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega l - 1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega l}$  und  $f_o = \frac{1 - \cos \omega l}{\cos \omega l}$  für beliebige elastische Pendel in Abhängigkeit von  $\omega l$  und  $\omega^2 l^2$

gültig zu gestalten, führt man das Trägheitsmoment  $J_{A'}$  um den scheinbaren Drehpunkt  $A'$  ein und erhält für (10a) mit

$$l'_{su} = \frac{\omega' l \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l - \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega' l}{\omega' (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l - 1)}$$

$$J_{A'_u} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + mg f'_u l'_{su} \left( \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l - 1} \right) \sin \beta = 0 \text{ usw. . . . . (19)}$$

und daher für die Schwingungszeiten:

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A'_u} (\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l - 1)}{mg (s + l'_{su}) \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega' l}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{16} + \dots \right) \dots \dots (20 a)$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A'_o} (1 - \cos \omega' l)}{mg (s + l'_{so}) \cos \omega' l}} \left( 1 + \frac{\beta^2}{16} + \dots \right) \dots \dots (20 b)$$

Für  $J_{A'}$  läßt sich auch setzen, wenn  $J_s$  das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment bedeutet:

$$J_{A'_u} = J_s + m (s + l'_{su})^2 \dots \dots \dots (21 a)$$

$$J_{A'_o} = J_s + m (s + l'_{so})^2 \dots \dots \dots (21 b)$$

Da man es hier stets mit kurzen Federn im Vergleich zum stabförmig ausgebildeten Pendelkörper zu tun hat, so ergibt sich mit genügender Genauigkeit:

$$T_u = 2 \pi \sqrt{\frac{3 [J_s + \frac{4}{9} m l^2 f'^2] (\cos \omega' l - 1)^*}{2 m g l f' \cos \omega' l}} \Bigg\} l \ll s \dots (22 a)$$

$$T_o = 2 \pi \sqrt{\frac{3 [J_s + \frac{4}{9} m l^2 f'^2] (1 - \cos \omega' l)}{2 m g l f' \cos \omega' l}} \Bigg\} l \ll s \dots (22 b)$$

Für große  $m$  vereinfacht sich (20a) und (20b) zu:

$$T_u = 2 \pi \sqrt{\frac{[J_s + m (s + 0.693 l)^2] (\cos \omega' l - 1)}{m g (s + 0.693 l) \cos \omega' l}} \Bigg\} \omega' l \approx \frac{\pi}{2}, \frac{l}{s} \text{ beliebig (23 a)}$$

$$T_o = 2 \pi \sqrt{\frac{[J_s + m (s + 0.637 l)^2] (1 - \cos \omega' l)}{m g (s + 0.637 l) \cos \omega' l}} \Bigg\} \omega' l \approx \frac{\pi}{2}, \frac{l}{s} \text{ beliebig. (23 b)}$$

Für  $T_\infty$  erhält man

$$\omega' l = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad m g = \frac{\pi^2 E J}{4 l^2} \left( \frac{2 l}{2 l + 3 s} \right) = P_K \frac{2 l}{2 l + 3 s}.$$

Man ersieht, daß man um so stärker von der Eulerschen Knicklast wegkommt je größer  $s/l$  ist. Für das Holweck-Lejay-Pendel läßt sich  $s/l$  leicht größer als 5 machen und daher ergibt sich als maximale Belastung ein Pendelgewicht von weniger als ein Achtel der Knicklast. Dieser Schluß ist allerdings nicht ganz berechtigt, da wahrscheinlich auch die Eulersche Knicklast infolge des größeren Hebelarmes von  $P$  größer wird. Es ist jedoch anzunehmen, daß sie nicht in demselben Maße ansteigt wie  $P$  abnimmt, so daß man gewiß von der Gefahr der Durchknickung durch den Trick der Schwerpunktsverlegung wegkommt, insbesondere dann, wenn man die Feder nicht als Blattfeder ausbildet, sondern in Profilform nach Fig. 3 aus massivem Material herausarbeitet. Das Pendel wird dann für  $\omega' l = 90^\circ$  nicht durchknicken, sondern indifferent in jeder Lage stehen bleiben, und bei  $\omega' l > 90^\circ$  sich an den Anschlag legen, da jetzt die elastischen Kräfte nicht mehr in der Lage sind, den Schwerpunkt des Pendels zu heben. Erst bei relativ starken Überbelastungen wird eine Verbiegung der Feder eintreten.

Die weitere Durchrechnung des elastischen Stabpendels erfolgt nun in derselben Weise wie früher beim Punktpendel ohne irgendwelche Schwierigkeiten.

---

\*) Bei kurzen, gelenkartigen Federn nach Fig. 3 darf man  $l'_{su} \approx l'_{so}$  setzen und demgemäß den Faktor  $3/2$ .

Als Beispiel sei ein dünner zylindrischer Pendelstab von 6 cm Länge angenommen. Dann ist:

$$J_s = m \frac{3r^2\pi + 4h^2}{12} \quad (\text{Abb. 1}) \quad \text{und}$$

$$J_{A'} = \frac{4}{9} m \left[ \frac{9r^2\pi}{16} + 3h^2 + 3hl + l^2 \right] \dots \dots \dots (23c)$$

also:

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{4 \left[ 3h^2 + 3hl + l^2 + \frac{9r^2\pi}{16} \right] (\cos \omega'l - 1)}{3g(2l + 3h) \cos \omega'l}} \left. \vphantom{\sqrt{\frac{4 \left[ 3h^2 + 3hl + l^2 + \frac{9r^2\pi}{16} \right] (\cos \omega'l - 1)}{3g(2l + 3h) \cos \omega'l}}} \right\} \begin{array}{l} \text{cylindr.} \\ \text{Stabpendel*} \end{array} \quad (24a)$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{4 \left[ 3h^2 + 3hl + l^2 + \frac{9r^2\pi}{16} \right] (1 - \cos \omega'l)}{3g(2l + 3h) \cos \omega'l}} \left. \vphantom{\sqrt{\frac{4 \left[ 3h^2 + 3hl + l^2 + \frac{9r^2\pi}{16} \right] (1 - \cos \omega'l)}{3g(2l + 3h) \cos \omega'l}}} \right\} \begin{array}{l} \text{cylindr.} \\ \text{Stabpendel*} \end{array} \quad (24b)$$

Für (15a) und (15b) ergibt das elastische Stabpendel (Fig. 4):

$$\frac{dT_u}{T_u} \approx \frac{dg}{2g} \left[ \frac{\omega'l}{2} \frac{\mathfrak{I}g \omega'l}{\cos \omega'l - 1} - 1 \right] = \frac{dg}{2g} V'_u \dots \dots \dots (25a)$$

$$\frac{dT_o}{T_o} \approx \frac{dg}{2g} \left[ \frac{\omega'l}{2} \frac{\text{tg } \omega'l}{1 - \cos \omega'l} - 1 \right] = \frac{dg}{2g} V'_o \approx \frac{dg}{2g} \left[ \frac{\pi}{2(\pi - 2\omega'l)} \right] \quad (25b)$$

Für (16a) erhält man:

$$l = (31.05 T_u^2 - 1.5h) \pm \sqrt{(31.05 T_u^2 - 1.5h)^2 + 3h(31.05 T_u^2 - h) - 1.77r^2} \quad (26)$$

Angenommen,  $T_u$  sei gleich 0.33 sec und  $h$  gleich 3 cm, so wird  $l = 1.03$  cm;  $\omega'l$  findet man aus Beobachtung von  $T_o$  bei bekanntem  $g$  gemäß (22a) und (22b):

$$\omega'l = \frac{\pi}{2} - \frac{1.67 T_u^2}{T_o^2} \left[ 1 - \frac{0.167 l}{3h + 2l} \right] \dots \dots \dots (27)$$

Für  $T_o = 6$  sec ergibt sich:

$$\omega'l = \frac{\pi}{2} - 0.00498$$

Die scheinbare Vergrößerung wird dann nach (25b)  $V_o = 158$ . Die Schwingungszeit wird gemäß (24b) gegenüber einem gleich langen Sterneckpendel um das 15.6fache übersetzt ( $l_{St} = 3.68$  cm); die Gesamtvergrößerung  $\mathfrak{B}' = V_o \frac{T_o}{T_{0.5}}$  gegenüber einem Halbsekunden-Sterneck-Pendel ist dann 1900. Eine Schwingungsdaueränderung von 0.001 sec bedeutet also rund 2.07 mgal Schwereänderung. Mit

$$\omega'l = \sqrt{\frac{m g f l^2}{E J}} = \frac{\pi}{2} - 0.00498$$

\*) Diese Formel gilt natürlich nur, wenn der Schwerpunkt in der Mitte des Stabes liegt, was beim Holweck-Lejayschen wegen des Vorhandenseins von Abstimm- und Arretierringen nicht genau der Fall ist. In diesem Falle muß (23)  $J_{A'}$  entsprechend korrigiert werden.

wird bei  $f' = 1 + \frac{h}{l_{s0}} = 5.6$  und einem  $mg = 1.815 \text{ g}$   $EJ = 4.4 \text{ g cm}^2$  und die Dicke der Blattfeder in diesem Falle  $d = 0.0455 \text{ mm}$ . Eine Invarlamelle von  $0.0455 \text{ mm}$  Dicke,  $4 \text{ mm}$  Breite und  $10.3 \text{ mm}$  Länge vermag nach Euler  $10.2 \text{ g}$  zu tragen, ohne durchzuknicken. Während hier durch den Trick der Hebelübersetzung nur  $1.815 \text{ g}$  auf der Feder lasten. Es ist allerdings, wie schon erwähnt, fraglich, ob die Eulersche Formel für den Fall der vertikalen Schwerpunktsverschiebung noch streng gültig ist. Jedenfalls aber wird die Lamelle erheblich mehr als  $2 \text{ g}$  zu tragen vermögen und damit erheblich bruch- und verbiegungs-sicherer sein als im Falle des elastischen Punktpendels.

Noch ein weiterer Punkt möge hier erwähnt werden, nämlich die Frage der Fehler durch Erschütterungen. Für ein beliebiges elastisches Pendel gilt bei starker Vergrößerung:

$$\frac{mgl}{2EJ} (2l + \pi s) = 2.47;$$

da die Fehler um so größer sind, je größer die Masse und je biegsamer die Feder ist, so wird man  $m$  nicht zu groß machen dürfen. Dies ist beim Punktpendel ( $s = 0$ ) nur möglich, wenn die Lamelle länger oder dünner gemacht wird, zwei Maßnahmen, die im selben Sinne Fehler bewirken; denn eine längere oder dünnere Feder wird bei Unterlageerschütterungen die Pendelmasse weniger zwangsläufig führen können als eine kürzere, straffere. Beim Stabpendel kann man jedoch sowohl die Masse als auch die Federlänge erheblich verkleinern, wenn nur  $s$  genügend groß ist. Es scheint daher, als ob das Stabpendel auch vom meßtechnischen Standpunkte aus dem Punktpendel vorzuziehen sei.

Schließlich soll noch darauf verwiesen werden, daß kurze dünne Federn geringere Innendämpfung besitzen als lange, dicke. Dieser Punkt ist beachtlich, wenn man bedenkt, daß schon das Holweck-Lejay-Pendel mit den ungefähr oben angenommenen Dimensionen nur Beobachtungen während einer Dauer von  $10$  bis  $15$  Minuten zuläßt. Über elastische Punktpendel mit langen Federn liegen bisher keine praktischen Erfahrungen vor.

Für den Faktor der Amplitudenkorrektion ergab sich beim elastischen Pendel derselbe Ausdruck wie für das starre Pendel, nämlich:

$$f_a = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\beta}{2} + \dots \dots \dots (28)$$

falls  $\beta$  wie dort den maximalen Drehwinkel bezeichnet. Will man jedoch den Winkel von der Einspannstelle an rechnen (s. Fig. 1 und 2), so hat man zu setzen:

$$\beta = \beta' \left(1 + \frac{l}{6h + 2l}\right),$$

für das Punktpendel also  $\beta = \frac{3}{2}\beta'$ . In Formel (28) ist die Änderung der elastischen Linie nicht berücksichtigt.

Berlin-Friedenau, den 17. Februar 1934.