(Aus dem Institut für angewandte Mechanik, Göttingen)

Betrachtungen über ebene Pendel

Von **Erich Hahnkamm** — (Mit 4 Abbildungen)

Es werden die Abhängigkeitsverhältnisse erörtert zwischen der Schwingungszeit eines Pendels und einer Änderung des Schwerpunktsabstandes bei verschiedenen nach besonderen Gesichtspunkten gewählten Werten des Trägheitshalbmessers. Die Untersuchungen ergeben bestimmte Werte des Schwerpunktsabstandes bei vorgegebenem Trägheitshalbmesser, für welche die Abhängigkeit der Schwingungszeit von einer Änderung des Schwerpunktabstandes maximal groß oder minimal klein ist.

Bei bekannter unveränderlicher Erdbeschleunigung kann man durch Bestimmung des Trägheitshalbmessers und des Schwerpunktabstandes nach der Beziehung:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho^2 + s^2}{s g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

das ebene Pendel zur Zeitbestimmung benutzen. In (1) sei ϱ der Trägheitshalbmesser des Pendelkörpers um seinen Schwerpunkt und s der Abstand dieses Schwerpunktes vom Aufhängepunkt des Pendels. Trägt man in Abhängigkeit von s die Schwingungszeit T auf, so stellt man fest, daß T für ein ganz bestimmtes s (nämlich $s = \varrho$) einen kleinsten Wert annimmt. Diesen Wert von T wollen wir mit $T_{\min}$ bezeichnen und ein Pendel, für das $s = \varrho$ gilt, ein Minimumpendel nennen. Für $T_{\min}$ hat man die Beziehung:

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2\varrho}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Beim mathematischen Pendel gibt es kein eigentliches Minimum. Vielmehr strebt $T_{\min}$ mit ϱ gleichzeitig gegen Null. Man kann eine Normalkurve erhalten, indem man die allgemeine Schwingungszeit T eines Pendels durch $T_{\min}$ dividiert. Dies liefert die Beziehung:

$$\frac{T}{T_{\min}} = \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{2 s \varrho}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Man betrachtet ϱ als vorgegebene Konstante und drückt s in Einheiten von ϱ aus. In Fig. 1 ist eine solche Normalkurve wiedergegeben für $\varrho = 1$. Der Kurven-

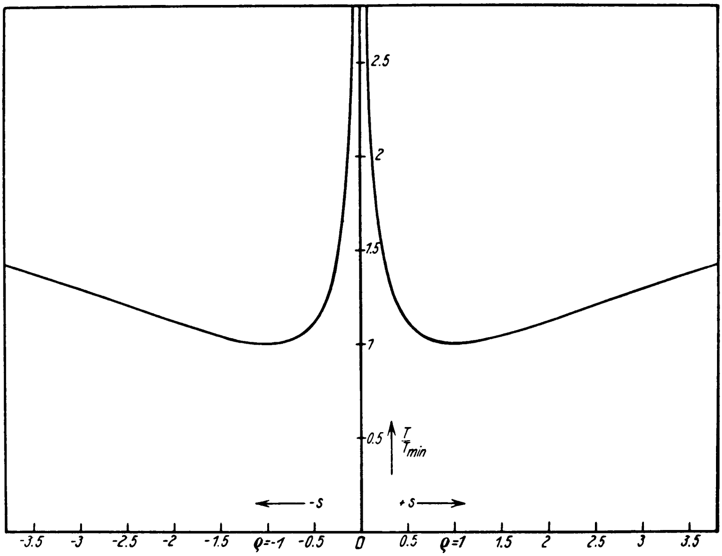

Fig. 1. Die Schwingungszeit T eines Pendels bezogen auf $T_{\min}$ (Schwingungszeit eines Minimumpendels, $s = \varrho$) in Abhängigkeit vom Schwerpunktsabstand s für den Trägheitshalbmesser $\varrho = 1$

verlauf zeigt für $s = \varrho = 1$ das erwähnte Minimum von T. M. Schuler*) hat sich bei der Konstruktion einer neuen Pendeluhr zuerst diese Tatsache zunutze

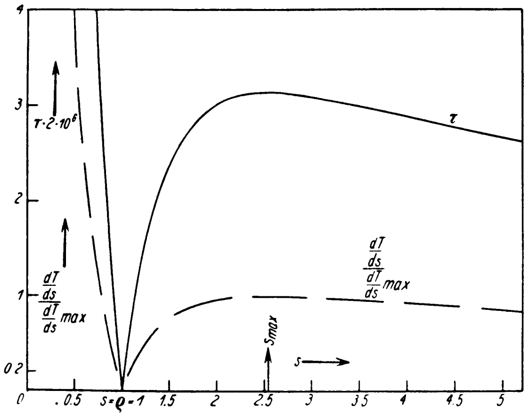

Fig. 2

Als Abszisse ist der Schwerpunktsabstand s in Einheiten des Trägheitshalbmessers ϱ aufgetragen und als Ordinate der Differentialquotient dT/ds bezogen auf dT/ds — max und die Änderung τ der Schwingungszeit T, wenn der Schwerpunktsabstand um 10 μ verändert wird

gemacht. Dadurch wurde erreicht, daß eine Änderung von s, also des Schneidenabstandes vom Schwerpunkt, in erster Näherung keinen Einfluß auf T ausübt. Um nun den Einfluß einer Änderung von s auf T bei beliebigem s zu zeigen, ist in Fig. 2 angenommen, daß s sich um 10 μ ($\mu = 0.0001$ cm) ändert. Als Abszisse

*) M. Schuler: Zeitschr. f. techn. Phys. **10**, 392 (1929).

ist s aufgetragen und als Ordinate τ, die Anzahl der Sekunden, um die sich die Schwingungszeit ändert. ϱ ist gleich 1 gesetzt. Es ist der Absolutwert aufgetragen. Der linke, steile Kurvenast müßte an sich unterhalb der Abszissenachse gezeichnet werden, da er einer Abnahme von T bei wachsendem s entspricht. Wir entnehmen der Abbildung, daß die Änderung von T für $s = \varrho = 1$ (Minimumpendel) Null wird. Für $s < \varrho$ wächst die Abhängigkeit von s sehr schnell, für $s > \varrho$ haben wir zunächst auch ein starkes Anwachsen, das aber einen Höchstwert erreicht und für sehr großes s wieder kleiner wird. Hierauf kommen wir später noch zurück.

Um uns eine Vorstellung von der Größe des Schwerpunktabstandes s für eine bestimmte, geforderte Schwingungszeit eines Minimumpendels machen zu können, ist in Fig. 3 über $T_{\min}$ das zugehörige $s = \varrho$ aufgetragen. Das Kurvenbild gestattet, unmittelbar für jede gewünschte Schwingungszeit die zugehörige Größe von $s_{\min} = \varrho$ anzugeben, die also das Pendel zu einem Minimumpendel machen würde.

Auch für ein Pendel, bei dem die Minimumbedingung erfüllt ist, bewirkt eine Verschiebung des Aufhängepunktes noch eine kleine Veränderung von T. Den Betrag dieser Änderung für ein Minimumpendel können wir der Fig. 4 entnehmen. Dort ist die Änderung $\tau_{\min}$ der Schwingungszeit $T_{\min}$ bei einer Verschiebung des Aufhängepunktes um 10 μ über $T_{\min}$ aufgetragen. Es ist beachtlich, wieviel unempfindlicher ein Pendel mit großer Schwingungszeit gegenüber einem solchen mit kleinem $T_{\min}$ ist.

Bei einigen Meßpendeln wird eine möglichst große Empfindlichkeit der Schwingungszeit bei einer Veränderung von s verlangt. Das heißt also, man hat das Pendel so zu bauen, daß dT/ds einen möglichst großen Wert annimmt, oder mathematisch ausgedrückt, d^2T/ds^2 muß Null sein. Für d^2T/ds^2 gilt:

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{3\varrho^4 + 6\varrho^2 s^2 - s^4}{s\sqrt{s(s^2-\varrho^2)^3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Aus (4) folgt, daß d^2T/ds^2 Null wird für:

$$s^2 = \varrho^2 (3 + 2\sqrt{3}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dann nimmt also dT/ds einen größten Wert an, und zwar:

$$\frac{dT}{ds}\max = \frac{\pi(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{\varrho g}\sqrt{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Auch für dT/ds können wir eine Normalkurve zeichnen, indem wir den Ausdruck $\dfrac{\frac{dT}{ds}}{\frac{dT}{ds}\max}$ als Ordinate über s auftragen. Für diesen Ausdruck gilt die Beziehung:

$$\frac{\frac{dT}{ds}}{\frac{dT}{ds}\max} = \frac{\sqrt{\varrho}\,(s^2-\varrho^2)\sqrt{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}}{s\sqrt{s^3+\varrho^2 s}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

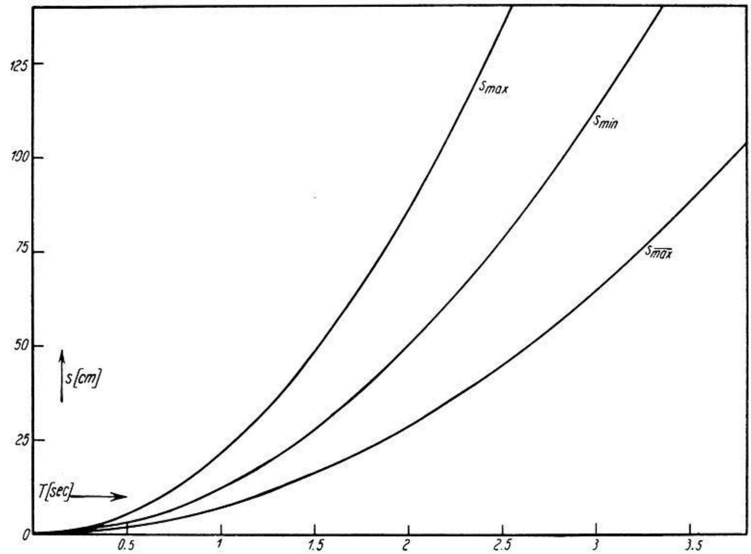

Fig. 3

Über T sind die Schwerpunktsabstände $s_{\min}$, $s_{\max}$ und $s_{\overline{\max}}$ aufgetragen

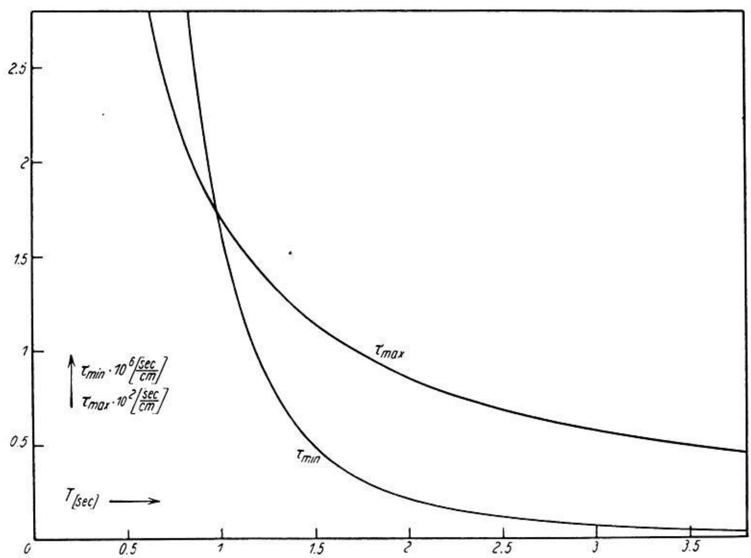

Fig. 4

Über T sind τ — max (Änderung der Schwingungszeit eines Maximumpendels bei Veränderung des Schwerpunktsabstandes) und τ — min (Änderung der Schwingungszeit eines Minimumpendels bei Veränderung des Schwerpunktabstandes) aufgetragen

Wir drücken s wieder in Einheiten von ϱ aus, setzen also $\varrho = 1$. Das Kurvenbild ist in Fig. 2 (gestrichelte Kurve) wiedergegeben. Wir entnehmen der Abbildung, daß es für $s > \varrho$ ein Maximum der Abhängigkeit der Schwingungszeit von s gibt. Diesen Wert haben wir oben in Gleichung (5) berechnet. Für $s < \varrho$ ist die Abhängigkeit bei kleiner werdendem s sehr bald sogar größer als der Betrag des eben angegebenen dT/ds — max ausmacht. Aus gewissen Gründen ist eine so kurze Schwingungszeit aber oft nicht erreichbar. Wir können noch den Wert von s angeben, für den die gleiche Stärke der Abhängigkeit der Schwingungszeit T von s vorhanden ist, wie für $s_{\max}$. Diesen zweiten Wert von s bezeichnen wir mit $s_{\overline{\max}}$. Für ihn gilt:

$$s^2_{\overline{\max}} = \varrho^2 \frac{2\sqrt{3}+1}{11} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In Fig. 2 haben die beiden Abszissen die Größe:

$$s_{\max} = 2.543 \quad \text{und} \quad s_{\overline{\max}} = 0.637 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ϱ ist gleich 1 gesetzt. Wir wollen ein Pendel, dessen Schwerpunktsabstand $s = s_{\max}$ ist, ein Maximumpendel nennen. Bei einem solchen Pendel nimmt die Schwingungszeit keinen extremen Wert an, wohl aber ist die Empfindlichkeit der Schwingungszeit gegen eine Veränderung des Schwerpunktabstandes ein Maximum. Beim Minimumpendel ist diese Empfindlichkeit ein Minimum und auch die Schwingungszeit. Zu Fig. 2 ist noch zu bemerken, daß die Ordinaten der ausgezogenen τ-Kurve und der gestrichelten $\frac{dT}{ds}\Big/\frac{dT}{ds}$ max-Kurve, wenn μ genügend klein ist, sich angenähert nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Um den Wert von $s_{\max}$ und $s_{\overline{\max}}$ für eine gewünschte Schwingungszeit eines Maximumpendels angeben zu können, sind in Fig. 3 die Schwerpunktsabstände $s_{\max}$ und $s_{\overline{\max}}$ über T aufgetragen. Man erkennt aus der Abbildung, daß die beiden Kurven symmetrisch zur $s_{\min}$-Kurve liegen.

In Fig. 4 ist noch τ—max über T aufgetragen. τ—max ist die Änderung der Schwingungszeit eines Maximumpendels bei einer Änderung des Schwerpunktabstandes um 10 μ. Auch hier wächst ähnlich wie beim Minimumpendel die Empfindlichkeit mit kleiner werdender Schwingungszeit. Die Kurve kann bei genügend kleinem μ auch als angenähertes Bild der Funktion dT/ds — max (T) aufgefaßt werden. Man entnimmt der Abbildung noch, daß die Abhängigkeit der Schwingungszeit eines Maximumpendels von einer Veränderung des Schwerpunktabstandes s etwa 10^4mal größer ist als beim Minimumpendel. Man sieht daraus, wie wichtig es ist, ein Meßpendel zweck- und bestimmungsgemäß zu bauen.