Außenraum und Innenraum

(Schlichtung des Streites um die Schwerkraftreduktion)

Von **Robert Schwinner,** Graz — (Mit 2 Abbildungen)

Aller Streit um die richtige Reduktion der Schweremessungen, um die Undulationen des Geoides usw. wird gegenstandslos, wenn man auf zwei Niveauflächen reduziert, auf eine die ganz im Innern, und eine die ganz außerhalb des Erdkörpers liegt; etwa durchzuführen ersteres nach Prey, letzteres nach Faye; beidemal mit gewissen, aber nicht sehr großen Verbesserungen des betreffenden Verfahrens. Je weiter außen, desto geringer sind die Undulationen der Niveauflächen. Daraus folgt, daß Senkung des Geoides und Minderschwere, Hebung und Überschwere zusammengehen müssen.

In der Lehre von der Erdschwere ist eine Art babylonischer Sprachverwirrung eingerissen; es gibt wenig — von einfachen Rechenvorschriften (wie die Reduktionsformeln) bis zu schwierigen Theoremen der Potentialtheorie — über das sämtliche Fachmänner einig wären. Es gibt aber ein einfaches Aushilfsmittel, das noch dazu das Übel an der Quelle faßt. Die Uneinigkeit beginnt offenbar eben schon bei den einfachsten Rechenvorschriften, mit denen jede Verarbeitung der Schweremessungen beginnen muß, den Reduktionsverfahren. Daß man für die Niveaufläche, auf die man alles bezieht, aus Gewohnheit der sonstigen geodätischen Arbeit das Meeresniveau gewählt hat, das zum Teil frei liegt, zum Teil ($^3/_{10}$ der Fläche) aber im Innern des Erdkörpers verläuft, bringt schwer auflösbare potentialtheoretische Verwicklungen. Es hatte zur Folge, daß man sich nicht einmal dahin einigen konnte, was mit der Reduktionsrechnung eigentlich gemeint und beabsichtigt sein sollte. Daraus ergaben sich naturnotwendig eine unabsehbare Reihe von Mißverständnissen.

Man wähle dagegen zur Vergleichsbasis eine Niveaufläche, die ganz außerhalb des Erdkörpers liegt. Dann fallen die potentialtheoretischen Verwicklungen weg, die Reduktion läßt sich einfach und unzweideutig definieren als die Bestimmung jenes Wertes von g, welchen ein Beobachter messen würde, der sich lotrecht über der Station auf jenem Niveau befände. In der Praxis würde dafür die Annahme 5000 m über dem Meer wohl genügen; was darüber liegt, sind Gipfel und Zipfel von geringer Masse, die man einfach wegdenken kann; wenn Stationen nicht unmittelbar drauf oder dran liegen, kommt ihre Attraktion nicht in Betracht. Man muß ja streben, mit möglichst geringer Meereshöhe auszukommen; denn mit dieser wächst die Unsicherheit der Reduktion, ein Übelstand, der ohnedem schon gegen diesen Vorschlag eingewendet worden ist*).

---

*) Gegen den Vorschlag von Brillouin, der allerdings 10 km wollte, Prey (A. Prey, E. Mainka, E. Tams, Einführung in die Geophysik 1922, S. 60/61): „Die Ungenauigkeit der Reduktionsgrößen würde das ganze Resultat in Frage stellen“. Ähnlich Helmert.

Die Meereshöhe des gewählten Bezugsniveaus sei H; wenn in einer Station mit Meereshöhe h die Schwerebeschleunigung g gemessen wird, so ist die auf jenes Niveau reduzierte Schwere

$$\bar{g} = g - (H - h) \,.\, \vartheta.$$

Der vertikale Gradient der Schwere soll konstant angenommen werden, und zwar $\vartheta = 3.086 \,.\, 10^{-4}$ (Meereshöhe h in Metern angegeben), wie das in den Tabellenwerken (Borrass, Schütte, Ackerl usw.) für die Höhenreduktion allgemein üblich ist. Bedeutet nun γ_0 die Normalschwere im Meeresniveau lotrecht unter der Station, so wird die Normalschwere oben auf dem neuen Bezugsniveau $\gamma = \gamma_0 - H \,.\, \vartheta$ und die Schwereanomalie dortselbst

$$\overline{\Delta} g = g - (H - h) \,.\, \vartheta - (\gamma_0 - H \,.\, \vartheta) = g + h \,.\, \vartheta - \gamma_0.$$

Mit anderen Worten: die Schwereanomalie, welche sich nach der hier vorgeschlagenen „Außenraum-Reduktion" ergibt, ist dieselbe, welche sich nach dem „Freiluftreduktion" genannten Verfahren von Faye ergäbe. NB. unter den vereinfachenden Annahmen: Konstanz des Vertikalgradienten der Schwere und Äquidistanz der Niveauflächen.

Diese Annahmen werden bei allen anderen gebräuchlichen Reduktionsverfahren ebenfalls gemacht, aber diese rechnen mit geringeren Höhenunterschieden. Wir müssen daher diskutieren, was in unserem Fall jene Korrekturen ausmachen können. Der vertikale Gradient der Schwere ändert sich mit der Breite (φ). Es ist (nach Prey, l. c., S. 66, und mit seiner Bezeichnung):

$$\vartheta = 2\,\frac{k^2 E}{r^3}\left\{1 + \frac{3\,(C - A)}{E\,.\,r^2}\,(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2 k^2 E}\cdot\cos^2\varphi\right\};$$

daraus folgt:

$$\vartheta = \vartheta_a\,(1 - 0.011452\,\sin^2\varphi).$$

Nehmen wir $H = 5000$ m, wie im folgenden immer verstanden sein soll, so bewirkt das im Maximum — zwischen Äquator und Pol — eine Änderung in g auf einem Bezugsniveau jener Höhe um rund 17 milligal. Eine bezügliche Korrektur muß also jedenfalls angebracht werden, aber sehr groß ist sie nicht.

Der Vertikalgradient der Schwere ändert sich ebenfalls mit der Meereshöhe; wir können da die ganze Erdmasse E im Mittelpunkt vereinigt denken, und bekommen

$$\vartheta = \vartheta_0\left(1 - 3\,\frac{h}{a}\right).$$

Es ist nun $h/a = 5/6371$, und daraus ergibt sich, daß eine bezügliche Korrektur in g äußerstens 1.8 Milligal ausmachen könnte, in den meisten Fällen also vernachlässigt werden kann.

Wohl aber können durch lokale Unregelmäßigkeit der Massenlagerung Störungen im Vertikalgradienten hervorgebracht werden. Eine Berücksichtigung derselben kommt im Wesen darauf hinaus, daß für die vorgeschlagene Reduktionsweise die topographische Korrektur anders berechnet werden muß als sonst. Von großem Einfluß können solche lokale Störungen des Vertikalgradienten nicht sein, sie klingen nach oben schnell ab. Ferner ist die topographische Korrektur für Flachland und sogar Mittelgebirgsrelief unbedeutend, sie kommt also nur auf einem ganz kleinen Teil der Erdoberfläche*) in Betracht. Überhaupt, eine allseits ausgedehnte störende Platte erzeugt — wie leicht zu verifizieren — gar keine Störungen des Vertikalgradienten. Das trifft alle an der Erdoberfläche vorkommenden großen Massenunregelmäßigkeiten, die alle sehr ausgedehnt sind; hohe Massenkonzentrationen, welche den Gradienten stark beeinflussen würden, sind in der geologischen Wirklichkeit selten und nur in kleinem Maßstab möglich.

Schließlich auch die Niveauflächen sind nicht genau äquidistant. Nach dem Energiesatz muß sein $g \,.\, d = \text{const}$ (wenn mit d der Abstand zweier bestimmter Niveauflächen bezeichnet wird). Die Schwere ist nun in erster Linie wieder von der Breite abhängig, ungefähr

$$g = g_a \,(1 + 0.0053 \,.\, \sin^2 \varphi).$$

Daher liegt unser Vergleichsniveau am Pol rund 26 m verhältnismäßig tiefer als am Äquator, was in g etwa 8 Milligal ausmachen würde. Natürlich auch den lokalen Schwerestörungen entsprechen Veränderungen der Distanz zwischen den Niveauflächen. Aber solche lokale Schwerestörungen sind sicher kleiner als $^1/_{2000} \cdot g$, die sich daraus ergebende Korrektur bleibt unter 1 Milligal, also unter der Genauigkeitsgrenze der Schweremessungen.

Nach dem Vorstehenden können die Einwände, welche gegen die vorgeschlagene Außenraumreduktion erhoben worden sind, nicht als stichhaltig angesehen werden. Gewiß, es müssen einige Korrekturen berücksichtigt werden, welche bei anderen Reduktionsverfahren nicht nötig zu sein scheinen. Aber die „geometrischen“ Korrekturen können streng berechnet werden, und die topographische Korrektur braucht dabei nicht schlechter auszufallen, als sie allemal sonst zu sein pflegt (s. oben). Von einigen Ausnahmefällen abgesehen, für die ganz überwiegende Zahl der Stationen sind jene Korrekturen klein, und auch eine prozentuell bedeutende Unsicherheit derselben bleibt unter der Genauigkeitsgrenze der Messungen. Es ist etwas mehr Mühe damit verbunden, aber auch das kann nicht so arg sein, wenn man sich einmal einen praktischen Rechenvorgang eingerichtet hat. Einzig die topographische Korrektur wird — wie immer man es auch einrichtet — merklich mühsamer sein; denn wenn der Aufpunkt weiter vom Relief entfernt ist, muß man einen größeren Umkreis berücksichtigen; dafür gleicht sich manches aus und der Absolutbetrag wird meistens geringer ausfallen als bisher.

---

*) Dort aber, im Hochgebirge, ist schon die jetzige Art der topographischen Korrektur eine Kalamität (vgl. Schwinner: Gerlands Beitr. **29**, 357 (1931)]; vielleicht wäre eine wie angedeutet begründete Rechnung besser, es könnten die Gipfelstationen, die sonst herausfallen, besser ins Milieu passend kommen?

Eine Unsicherheit haben wir allerdings noch nicht in Berücksichtigung gezogen, jene nämlich, welche betreffs der Undulationen des Geoides herrscht. Aber diese ist für die gewählte Bezugsfläche nicht größer als für irgendeine andere, das Meeresniveau eingeschlossen. Es ist überall dasselbe, der grundsätzliche circulus der Geodäsie, daß die Unbekannte, welche erst gesucht werden soll, schon in den Bestimmungsstücken drinsteckt. Eben zur Behebung dieser Schwierigkeit wird ja der vorstehende Vorschlag gemacht. Die hier vorgeschlagene Bezugsniveaufläche kann als ganz im Außenraum liegend angesehen werden, daher kann auf sie ohne Bedenken die Formel von Stokes angewendet werden:

$$N = \frac{R_m}{4\pi g_m}\int \Delta g \,.\, F(\psi) \,.\, d\sigma.$$

Darin bedeutet: N die Erhebung des Geoides über das Sphäroid, R_m, g_m die Mittelwerte von Erdradius und Schwere, $d\sigma$ ein Flächenelement der Einheitskugel, $F(\psi)$ eine gewisse Funktion des sphärischen Abstandes ψ, den $d\sigma$ vom Aufpunkt hat. Für die Schwereanomalie Δg sind natürlich jene Werte einzusetzen, welche sich bei Reduktion auf die von uns gewählte Außenfläche ergeben. Wir haben nun vorstehend gezeigt, daß diese sich nur um einige nicht sehr beträchtliche Korrekturen unterscheiden von den Schwereanomalien, welche sich nach der gebräuchlichen „Freiluftreduktion" ergeben. Hirvonen, welcher die Ondulationen des Geoides nach jener Formel berechnet hat*), verwendet als Δg die Schwereanomalien, welche man durch Reduktion auf das Meeresniveau nach der Freiluftformel (Faye) erhält. Es müssen daher die Werte, die er für die Undulationen des Geoides im Meeresniveau angibt (und die dort angezweifelt werden könnten, weil das keine saubere äußere Niveaufläche ist), jedenfalls im Sinne, Verteilung und Größenordnung, die Undulationen unserer Außenraumniveaufläche geben. Selbst in den absoluten Beträgen kann der Unterschied nicht allzugroß sein; denn Hirvonen stellt nur einen Streifen von geringer Breite dar, in dem die auf die Breitenunterschiede begründeten Korrekturen nicht arg verschieden sind, und die Wirkung der entfernteren Elemente wird sich, wie er meint, in der Summe einigermaßen von selbst kompensieren, jedenfalls wird sie in dem ganzen dargestellten Ring ziemlich gleichmäßig zur Geltung kommen. Und die „exzeptionellen Stationen" (Tiefseegräben, Bergesgipfel), die nämlich, welche große topographische Korrekturen haben könnten, hat Hirvonen von vornherein nicht in Rechnung gezogen.

Zum zweiten wäre ein Bezugsniveau zu wählen, das ganz im Innern des Erdkörpers liegt. Das erste dieser wäre das „Meeresniveau": die auf hoher See gemessenen Werte können ebensogut für innen wie außen gelten (sie sind ja wirklich innen gemessen worden!) und im Bereich der Kontinente hätte man — ebenso wie oben — die auf dem Bezugsniveau wirklich zu messende Schwere zu be-

*) R. A. Hirvonen: Über die kontinentalen Undulationen des Geoids. Vorläufige Mitteilung. Gerlands Beitr. **40**, 18—23 (1933).

stimmen, also nach der Methode von Prey zu reduzieren, und aus den so gewonnenen Werten der Schwereanomalie wäre wieder die Form der betreffenden Niveaufläche zu bestimmen; das ist genau jene Aufgabe, die sich Ackerl gestellt hat*), dessen Berechnungen sich somit auf die erste (äußerste) Niveaufläche bezieht, die bereits ganz dem Innenraum angehört. Über die Anwendbarkeit der Formel von Stokes auf diese Niveaufläche des Innenraumes möchte ich als Laie ein Urteil nicht wagen, ich glaube aber annehmen zu dürfen, daß diese Aufgabe, wenigstens näherungsweise, so oder so gelöst werden kann**).

Die Schar der Niveauflächen, die sich derart ergeben, ist leicht zu übersehen. Ganz außen, fern von allen irdischen Unregelmäßigkeiten, müssen es glatte Sphäroide sein. Rückt man näher an die Erdoberfläche heran, so erscheinen „Undulationen" und wachsen an, wenn auch vorerst nur zu geringen Beträgen. Die Darstellung von Hirvonen kann — wie oben gezeigt — eine gewisse Vorstellung vom 5000 m-Niveau geben***). Weiter nach innen fortschreitend kommt man in immer größere Nähe, zum Teil unmittelbare Berührung mit den störenden Massen, und da muß auch der Betrag, um den die Niveauflächen gestört werden, immer zunehmen, nicht bloß bis an das Meeresniveau, die erste ganz im Innern liegende Niveaufläche, sondern noch weiter; die größten Undulationen muß wohl jene Niveaufläche zeigen, welche unmittelbar unterm Ozeanboden liegt. Schon wegen der Eigenart unseres Schwerefeldes, das Singularitäten durchaus abhold ist, wird man vermuten, daß diese Steigerung der Undulation allgemein ganz allmählich und gleichsinnig vor sich geht. Es läßt sich das aber auch direkt zeigen. Wegen $g \,.\, d = \text{const}$ (s. oben) kann d ebensowenig wie g Unstetigkeit oder Sprung zeigen. Gegen innen nimmt g auch in der festen Kruste gleichsinnig zu, also d ebenso ab. Die Variationen in der Waagerechten sind naturgemäß noch viel geringer. Sind die Undulationen durch die ganze Flächenschar durch gleichsinnig — was die Regel sein muß, für Meer und Flachland, also etwa für $^4/_5$ der Fläche —, so sind sie auch oben kleiner, unten größer, und wie leicht zu sehen (Fig. 1), folgt aus $g \,.\, d = \text{const}$ dann, daß Einsenkungen des Geoides mit Minderschwere, Aufwölbungen des Geoides mit Überschwere auf allen

*) F. Ackerl: Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 263—275 (1933); Derselbe: Die Bestimmung der mathematischen Erdfigur aus Schwerkraftmessungen. Petermanns Geogr. Mitt. **79**, 173—175 (1933); vgl. auch die Zusammenstellung derselben mit Hirvonen bei: R. Schwinner: Die neuen Geoide. Gerlands Beitr. **41**, 214—224 (1934).

) Vgl. F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9, 281 (1933).

***) Weiter einwärts gibt eine Rechnung nach der Art der von Hirvonen natürlich nicht die Niveauflächen, die wirklich da sind, sondern jene, die außen zu beobachten wären, wenn man die Aufragung des Festlandes aufs Meeresniveau kondensiert hätte; diese Flächenschar ist reine Fiktion, insbesondere darf man von ihr aus nicht weiter, gegen das Erdinnere, extrapolieren. Dieses Mißverständnis ist die reale Grundlage der Differenzen zwischen Ackerl und Hirvonen.

Niveaus zusammengehen muß. Daß die Undulation oben und unten verschiedenen Sinn hat, ist nur möglich, wenn gleichzeitig die Schwereanomalie oben und unten verschiedenes Zeichen hat. Das ist im einen Falle z. B. denkbar bei einer Gebirgsmasse mit einem Massendefekt unter ihr in der Tiefe (Fig. 2); das gäbe in den Niveaus außen eine mäßige Aufwölbung, unten im Meeresniveau starke Senkung. Für den zweiten Fall finden wir Beispiele in der Vergleichung von Hirvonen (Außenraum) mit Ackerl (Innenraum). So hat ersterer in Turkestan eine Senkung des Geoides um 100 m, der letztere ebendort eine Hebung um 400 m; das würde eine Verkleinerung der Distanz unserer beiden Vergleichsniveaus um $\frac{500}{5000} = 10\%$ bedeuten; und um ebensoviel müßte der Mittelwert der Schwere auf dieser Strecke größer sein als in der Nachbarschaft! In Wirklichkeit sind in ganz Turkestan die Schwerewerte allgemein abnorm niedrig. Ich sehe keine Möglichkeit, diesen Fall anders als durch Umkehrung des Vorzeichens bei Ackerl in Ordnung zu bringen.

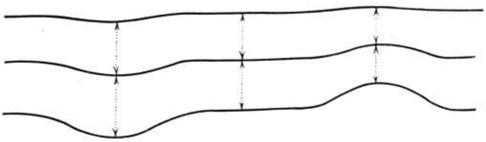

Fig. 1

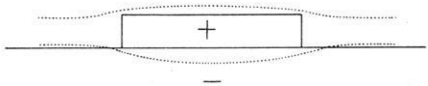

Fig. 2

Überdies ist es schwer vorzustellen, wie eine solche Anordnung der Niveauflächen zustande kommen sollte. Denkt man sich der Einfachheit halber eine homogene (oder homogen geschichtete) Kugel und legt auf diese (oder in ihre obersten Schichten) eine positive störende Masse, so werden alle äußeren Niveauflächen über dieser aufgewölbt, und oben auf der Kulmination ist die Schwere größer als normal (d. h. auf der Kugelfläche fern von der Störung). Bei Ackerl dagegen ist fast als Regel Hebung des Geoides und Minderschwere verknüpft und umgekehrt. Es müßte wohl erst dargetan werden, wie das in der Erdkruste realisiert werden kann.