Bemerkungen zu den Geoiden von Ackerl und Hirvonen

Von **K. Ledersteger,** Wien — (Mit 1 Abbildung)

Es wird versucht, durch eine Umdeutung des Begriffes „Massenunregelmäßigkeit" den Gegensatz in den bestehenden Auffassungen des Geoids zu überbrücken.

Die kürzlich erschienene Gegenüberstellung der Geoide von Ackerl*) und Hirvonen**) durch R. Schwinner***) gibt Anlaß zu einigen Bemerkungen, die vielleicht dazu beitragen können, den schroffen Gegensatz zwischen den beiden Auffassungen zu mildern.

Den umfangreichen Berechnungen, die Ackerl im Anschluß an seine Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung ausgeführt hat, liegt die Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie von F. Hopfner†) zugrunde. Die Grundgleichungen dieses für die physikalisch orientierte Geodäsie so ungemein wichtigen Verfahrens lassen sich in größter Allgemeinheit nach Hopfner kurz folgendermaßen entwickeln. Man wählt eine das Potential in den Punkten des Geoids annähernd darstellende Funktion U, die bis auf den Schwerpunkt im Gesamtraum harmonisch ist und vergleicht das Geoid mit der Niveaufläche gleichen Potentials dieses fiktiven, theoretischen Schwerefeldes. Der Abstand beider Flächen, die Undulation ζ, werde in Richtung der Geoidnormalen vom Punkte P des Geoids

$$W_P = U_P + T_P = U_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

zum korrespondierenden Punkt Q auf dem „Niveausphäroid" $U = U_0$ gezählt. Als positiver Zählsinn werde die Richtung der äußeren Normalen gewählt, so daß $\zeta = \overrightarrow{PQ}$ im Außenraum des Geoids positiv ausfällt. Die Taylorsche Entwicklung:

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q \cdot \overrightarrow{QP} = U_Q - \zeta \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

gibt zusammen mit (1) das Theorem von Bruns:

$$W_P = U_Q - \zeta \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q + T_P = U_0$$

oder

$$\zeta = -\frac{T}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

---

*) F. Ackerl: Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 263ff. (1933).

) R. A. Hirvonen: Über die kontinentalen Undulationen des Geoids. Gerlands Beitr. **40, 18ff. (1933).

***) R. Schwinner: Die neuen Geoide. Ebenda **41**, 213ff. (1934).

†) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 277ff. (1933).

wenn man unter γ die positive, theoretische Schwerebeschleunigung

$$\gamma = -\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) > 0$$

versteht. Eine positive Restfunktion T ist daher stets mit einer Hebung des Geoids über das Niveausphäroid gleichen Potentialwertes verknüpft. Sind $g = -\frac{\partial W}{\partial n} > 0$ und γ' die wahre und die theoretische Schwerebeschleunigung im Punkte P, während γ die theoretische Beschleunigung im Punkte Q bedeutet, so läuft die durch Ableitung von (2) nach der äußeren Normalen zu gewinnende partielle Differentialgleichung auf eine Verbindung der „wahren Schwerestörung" $(g - \gamma')$ mit der „scheinbaren Schwerestörung" $(g - \gamma)$ hinaus. Das Verfahren liefert hierfür gemäß:

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = -\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 - \zeta\left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_P$$

und

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a},$$

unter a den mittleren Kugelradius der Erde verstanden, bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung des Quadrates der Abplattung α die beiden Gleichungen:

$$(g - \gamma) - (g - \gamma') + \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\,\mathrm{a})$$

oder:

$$(g - \gamma) + \frac{2T}{a} + \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\,\mathrm{b})$$

Die Größe $\zeta \frac{\partial \gamma}{\partial n}$ nennt man den Term von Bruns. Da in den Punkten der Erdkruste $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ist, kann man mit derselben Genauigkeit in allen Punkten des Geoids die Laplacesche Gleichung $\Delta T = 0$ als erfüllt ansehen und daher als partikuläre Lösung der Differentialgleichung (4b) eine harmonische Funktion ansetzen, die je nach Wahl von U im Unendlichen von bestimmter Ordnung $1/r^n$ verschwindet.

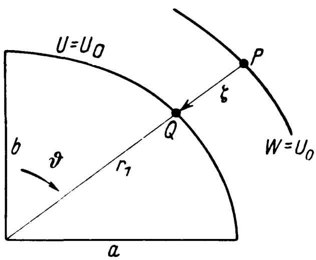

Fig. 1

Im folgenden wird das Brunssche Niveausphäroid verwendet, das innerhalb der vorausgesetzten Genauigkeitsgrenze mit einem Rotationsellipsoid identifiziert werden darf. Ist b sein Polarradius, so gilt unter Hinweis auf Fig. 1:

$$r_1 = b\,(1 + \alpha \sin^2 \vartheta),$$
$$r = r_1 - \zeta.$$

Am Geoid $W = U_0$ ist bei Entwicklung nach Kugelfunktionen:

$$U_P = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2}{r^3} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$T_P = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}.$$

Für die theoretische Schwerebeschleunigung findet man:

$$\gamma_Q = \gamma = \frac{Y_0}{r_1^2} + \frac{3\,Y_2}{r_1^4} - \omega^2 r_1 \sin^2 \vartheta$$

$$\gamma_P = \gamma' = \frac{Y_0}{(r_1 - \zeta)^2} + \frac{3\,Y_2}{(r_1 - \zeta)^4} - \omega^2 (r_1 - \zeta) \sin^2 \vartheta.$$

Auf der Kugel $r = b$ läßt sich somit bei Vernachlässigung von α^2 entwickeln:

$$\gamma = \frac{Y_0}{b^2}(1 - 2\alpha \sin^2 \vartheta) + \frac{3\,Y_2}{b^4}(1 - 4\alpha \sin^2 \vartheta) - \omega^2 b \sin^2 \vartheta = f(\cos^2 \vartheta) = Y_0' + Y_2',$$

während für γ' gilt:

$$\gamma' = \frac{Y_0}{r_1^2}\left(1 + 2\frac{\zeta}{r_1}\right) + \frac{3\,Y_2}{r_1^4}\left(1 + 4\frac{\zeta}{r_1}\right) - \omega^2 . r_1 \sin^2 \vartheta$$

$$= Y_0' + Y_2' + \frac{2\,Y_0}{r_1^3}\zeta + \frac{12 . Y_2}{r_1^5}\zeta = Y_0' + Y_2' + \sum_{n=3}^{\infty} Y_n'.$$

Da nämlich $\zeta = \zeta(\vartheta, \varphi)$ als Funktion von T durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen von der dritten Ordnung aufwärts darstellbar ist, liefert das erste Zusatzglied, der Term von Bruns, die rechtsstehende Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} Y_n'$, wenn man das zweite Zusatzglied, das nur mehr eine maximale Undulation von 8 m erzeugt, außer acht läßt.

Führt man schließlich auch in die Restfunktion die Längeneinheit b ein, so läßt sich darstellen:

$$\frac{T}{b} = \sum_{n=3}^{\infty} Y_n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)\, Y_n \cdot \left(\frac{b}{r}\right)^{n+2},$$

worin man erfahrungsgemäß wegen der Kleinheit der Koeffizienten $(b/r) = 1$ setzen darf, so daß nahe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{T}{b} &= \sum_{n=3}^{\infty} Y_n, \\ (g - \gamma') &= \sum_{n=3}^{\infty} (n+1)\, Y_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

resultiert. Die Relation (4a) liefert jetzt für die scheinbare Schwerestörung die Entwicklung:

$$(g-\gamma) = \sum_{n=3}^{\infty}(n+1)\,Y_n + \sum_{n=3}^{\infty} Y'_n = \sum_{n=3}^{\infty} Y''_n$$

und schließlich:

$$g = Y'_0 + Y'_2 + \sum_{n=3}^{\infty} Y''_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Da nach einem bekannten Satze jede Funktion unter gewissen, hier sicher erfüllten Voraussetzungen nur in einer Weise nach Kugelfunktionen entwickelbar ist, muß (6) mit der Ackerlschen Entwicklung des gegebenen Schwerefeldes identisch sein. Man hat somit:

$$g-\gamma = \sum_{n=3}^{\infty} Y''_n$$

und gemäß (4b) und (5)

$$\sum_{n=3}^{\infty} Y''_n + 2\sum_{n=3}^{\infty} Y_n - \sum_{n=3}^{\infty}(n+1)\,Y_n = 0 \quad \text{oder} \quad Y''_n = (n-1)\,Y_n.$$

Läßt man in der Folge den oberen Index der Kugelfunktion weg, so ergibt sich das auf Ackerls Entwicklung anwendbare Formelsystem:

$$\left.\begin{array}{ll} g-\gamma = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} Y_n; & \dfrac{T}{b} = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{Y_n}{n-1} \\ g-\gamma' = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n-1}\,Y_n; & \zeta = -\dfrac{b}{\gamma}\cdot\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{Y_n}{n-1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Die Gleichung (4a) kann als wünschenswerte Kontrolle verwendet werden. Bei gegebener Entwicklung (6) muß sie innerhalb der Rechengenauigkeit streng erfüllt sein.

Ackerl hat versehentlich das Theorem von Bruns mit entgegengesetztem Vorzeichen verwendet, was eine Umkehrung der von ihm berechneten Undulationen sowie eine Neuberechnung der wahren Schwerkraftstörungen nötig macht. Hierdurch erklärt sich im wesentlichen der von Schwinner betonte Austausch von Hebung und Senkung bei den Geoiden von Ackerl und Hirvonen. Andererseits aber bleibt das starke Mißverhältnis in der Größenordnung der Undulationen nach wie vor bestehen. Zu seiner Erklärung sind hier sicherlich teilweise die Mängel des Beobachtungsmaterials, das gegenwärtig leider noch fast ausschließlich auf die Kulturgebiete beschränkt ist, die Linienführung Ackerls auf den Weltmeeren und besonders der stark hypothetische Charakter der Entwicklung auf der Südhalbkugel in Betracht zu ziehen. Auch das Auftreten einer Kugelfunktion erster Ordnung bedarf noch einer eingehenden Diskussion. Aber der Hauptsache nach liegt der Fehler hier bei Hirvonens Geoid. Denn wie immer die Antwort auf die Frage nach der Isostasie ausfallen mag, die Hopfnersche Theorie, die streng auf dem Potentialbegriff aufgebaut ist, bleibt davon gänzlich unberührt. Selbst wenn sich auf Grund eines viel besser verteilten Beobachtungsmaterials einmal herausstellen sollte, daß die Genauigkeit der Theorie zur sicheren Erfassung der Undulationen nicht mehr ausreicht, so wäre dies keineswegs als negatives Ergebnis zu werten, sondern auch dann der einzige einwandfreie Nachweis der Größenordnung des Unterschiedes zwischen Geoid und Niveausphäroid. Denn alle anderweitigen Versuche zur Berechnung des Geoids scheitern — abgesehen von den rein synthetischen Verfahren — schon daran, daß sie Vorstellungen über die Massenanordnung im Erdinnern fälschlich schon der Reduktion der beobachteten Schwerewerte auf das Meeresniveau zugrunde legen.

Für die Theorie Hopfners ist die Kenntnis der tatsächlichen Randwerte am Geoid selbstverständliche Voraussetzung. Solange wir den Gradienten $\partial g/\partial n$ in der Erdkruste nicht kennen, können wir uns diese Randwerte nur durch das Reduktionsverfahren von Prey verschaffen:

$$g = g' + \frac{2\,g\,h}{r} - (b + b').$$

Hierin bedeuten g und g' die reduzierte und beobachtete Schwere, h die Seehöhe, $2\,g/r$ den negativen Gradienten der theoretischen Schwere und b bzw. b' die Wirkung der über dem Geoid liegenden Massen auf die beiden in Betracht kommenden Punkte. Wie Hopfner mehrfach betont hat, reduzieren hingegen alle isostatischen Verfahren, zu denen auch die Freiluftformel gehört, tief unter das Geoid. Der Rechnung Hirvonens liegen nach Faye reduzierte Schwerewerte zugrunde und es soll daher hier eine Abschätzung der Reduktionstiefe der Freiluftformel im Anschluß an die unten zitierte Arbeit Hopfners*) vorgenommen werden. Da empirisch die doppelte Bouguersche Reduktion $2\,b \sim b + b'$ nahe $^2/_3$ des Terms $|\partial\gamma/\partial n|\,.\,h$ beträgt, andererseits wegen $4\,\pi f \varrho < \alpha^2$ in den Punkten des Geoids

$$g = g' - \frac{\partial g}{\partial n}\,h$$

gesetzt werden darf, so gibt der Vergleich mit der Preyschen Formel

$$g \doteq g' - \frac{\partial\gamma}{\partial n}\,h + {}^2/_3\,\frac{\partial\gamma}{\partial n}\cdot h$$

die Beziehung:

$$\frac{\partial g}{\partial n} \sim {}^1/_3\,\frac{\partial\gamma}{\partial n},$$

*) F. Hopfner: Über einige aktuelle Fragen der physikalischen Geodäsie II. Gerlands Beitr. **41**, 181—184 (1934).

was besagt, daß die Freiluftformel ungefähr um die doppelte Seehöhe unter das Geoid reduziert. Der tiefere Grund für die größeren Undulationen bei Ackerl ist demnach darin zu suchen, daß sich die Schwerestörungen bei der einzig richtigen Reduktion nach Prey im allgemeinen absolut größer ergeben als bei jeder anderen Reduktion.

Bei der Deutung der Ergebnisse verursacht die größte Schwierigkeit das Auftreten von Geoidsenkungen unter den Kontinenten. Streng potentialtheoretisch ist natürlich infolge der Vieldeutigkeit des Umkehrproblems ein Rückschluß auf die Anordnung der Massen in der Erdkruste aus dem Schwerefeld nicht möglich. Aber dies bedeutet noch lange nicht eine summarische Verurteilung des Versuches, gewisse Erscheinungen des Schwerefeldes nachträglich nach isostatischen Gesichtspunkten zu deuten. Doch reicht die Lehre von der Isostasie keineswegs zur Erklärung von Geoidsenkungen unter den Kontinenten aus. Denn die Kontinentalmasse erzeugt zwangsläufig eine positive Restfunktion T', die erst durch einen, natürlich ganz undenkbaren, spiegelbildgleichen Massendefekt im Erdinnern zum Verschwinden gebracht werden könnte, während isostatische Kompensation wohl eine Verringerung des Wertes von T, niemals aber eine Umkehrung des Vorzeichens bewirken kann*). Mit anderen Worten: Isostatische Kompensation zieht lediglich eine Verflachung der Geoidhebung nach sich. Dieser Sachverhalt zwingt zu einer Revision unseres Begriffes „Massenunregelmäßigkeit“. Er hat eben nur relativ zum gewählten Niveausphäroid einen bestimmten Sinn, darf aber nicht stillschweigend auf die Erscheinungen der Erdkruste beschränkt werden. Man erkennt dies schon daraus, daß im Brunsschen Niveausphäroid die Trägheitsmomente des tatsächlichen Erdkörpers vorweggenommenen sind. Die Restfunktion T der Theorie dürfte somit die Differenz des Einflusses der Trägheitsmomente und der sichtbaren und unsichtbaren Massenunregelmäßigkeiten zum Ausdruck bringen. Es bleibt weiterer Untersuchung vorbehalten, die Größe dieses Effektes abzuschätzen.

*) Vergleiche hierzu die wichtigen synthetischen Untersuchungen K. Maders, zuletzt in „Berechnung von Geoidhebungen in den Alpen“. Gerlands Beitr. **41**, 56—85 (1934).