Die Relativität der Undulationen

Von **F. Hopfner**, Wien — (Mit 2 Abbildungen)

Hebungen (Senkungen) des Geoids relativ zu einer Bezugsfläche können unabhängig von der Massenanordnung in der Erdkruste nur durch den Übergang zu einer anderen Bezugsfläche unter Umständen in Senkungen (Hebungen) übergehen; hieraus werden eine Reihe von Folgerungen gezogen.

1. Noch vor wenigen Jahren besaßen die Undulationen wenig oder gar kein Interesse für die Geodäsie; sie galten nämlich ganz allgemein als so geringfügig, daß ihre Berücksichtigung bei der rechnerischen Verarbeitung der Beobachtungsergebnisse kaum der Mühe wert schien. Erst als die Bedeutung des Terms von Bruns für die Erklärung der Schwerkraftstörungen in ihrer vollen Tragweite erkannt worden war und Ackerls Bearbeitung der Schwerkraftwerte auf größere Undulationen hindeutete, wandte sich die Aufmerksamkeit der Geodäten und Geophysiker wieder der Frage nach der Größe und Verteilung der Undulationen am Geoid zu. Trotz der zahlreichen Veröffentlichungen scheint vielen Geophysikern in letzter Zeit dieses Problem rätselhafter denn je zu sein, seitdem nämlich Hirvonen*) hinsichtlich der Verteilung der Undulationen am Geoid zu gegenteiligen Ergebnissen wie Ackerl**) gelangt ist. Ledersteger***) hat allerdings diesen Widerspruch kürzlich einwandfrei aufgeklärt. Er war dadurch entstanden, daß Ackerl, dem Helmerts Geoiddarstellung maßgeblich gewesen ist, seinen berechneten Undulationen ein Vorzeichen erteilte, das dem durch die verwendete Formel vorgeschriebenen Vorzeichen entgegengesetzt war. Kehrt man daher im Einklang mit der Theorie†) das Vorzeichen der Undulationen Ackerls um, so stehen seine Ergebnisse mit den Resultaten Hirvonens weitgehend in Überein-

---

*) R. A. Hirvonen: Über die kontinentalen Undulationen des Geoids. Gerlands Beitr. z. Geophys. **40** (1933); The continental Undulations of the Geoid. Veröff. d. Finnischen Geod. Inst. **19**, Helsinki 1934.

) F. Ackerl: Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Zeitschr. f. Geophys. **9 (1933); Die Bestimmung der mathematischen Erdfigur aus Schwerkraftmessungen. Petermanns Geogr. Mitt. **79** (1933).

***) K. Ledersteger: Bemerkungen zu den Geoiden von Ackerl und Hirvonen. Zeitschr. f. Geophys. **10** (1934); siehe auch K. Jung: Bemerkungen zu F. Ackerls Berechnung der Geoidundulationen. Zeitschr. f. Geoph. **9** (1933).

†) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9** (1933).

stimmung, wenn vorläufig davon abgesehen wird, daß Ackerls Undulationen sich meist beträchtlich größer als Hirvonens Undulationen ergeben haben.

Der durch Ledersteger herbeigeführte Einklang in qualitativer Hinsicht zwischen den Ergebnissen Ackerls und Hirvonens stellt uns aber vor ein neues Rätsel. Wider alles Erwarten und namentlich im Gegensatz zu Helmerts bekannten Ergebnissen*) über die Verteilung der Undulationen am Geoid führten die Arbeiten Ackerls und Hirvonens — erstere Arbeit erst nach Umkehrung der Vorzeichen — auf ausgedehnte Senkungen des Geoids im Bereiche der Kontinente, und insbesonders deckte Ackerls Untersuchung auch umfangreiche Hebungen über den Ozeanen auf. Bereits Ledersteger hat darauf hingewiesen, daß diese Ergebnisse durch die Annahme einer isostatischen Massenlagerung in der Erdkruste nicht erklärt werden können. Er ist der Meinung, daß durch eine Abänderung des Begriffs Massenunregelmäßigkeit sich eine Erklärung für die überraschenden Ergebnisse Ackerls und Hirvonens finden lassen werde. Dieser Ansicht liegt der richtige Gedanke zugrunde, daß der Begriff Massenunregelmäßigkeit durch die Wahl der Funktion U in der Gleichung $W = U + T$ bedingt wird. Wie ich nämlich in der bereits oben zitierten Abhandlung**) betont habe, ist die Wahl der Funktion U, die trotz der ihr vorgeschriebenen allgemeinen Eigenschaften noch innerhalb weiter Grenzen willkürlich angenommen werden darf, für die Beantwortung aller mit der Erdfigur zusammenhängenden Fragen von grundsätzlicher Bedeutung.

Bei der Beurteilung der Größe und Verteilung der Undulationen müßte meines Erachtens zunächst darauf Bedacht genommen werden, daß die Undulation an einer vorgegebenen Stelle keineswegs nur die Wirkung der Massenunregelmäßigkeiten in der Umgebung der betrachteten Stelle ist, sondern daß man in jeder Undulation das Ergebnis der Wirkung aller Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste zu erblicken hat. Diese Tatsache, auf die Schumann***) erst kürzlich hingewiesen hat, kann man auch der von Ackerl benutzten Entwicklung der Funktion T nach allgemeinen Kugelfunktionen entnehmen, Auch Maders†) synthetische Untersuchungen zum Geoid zeigen, daß die Massenwirkung auf die Undulation gerade in horizontaler Richtung außerordentlich weitreichend ist. Je nach dem Vorwalten der mit positivem oder negativem Vorzeichen in Erscheinung tretenden Wirkungen der verschiedenen Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste stellt sich daher in der Umgebung der betrachteten Stelle eine Senkung oder Hebung des Geoids ein, wobei die Wirkung der Massenunregelmäßigkeiten in der nächsten Umgebung durch die Wirkung der übrigen Massen-

*) F. R. Helmert: Höhere Geodäsie **2**, 4. Kap. Leipzig 1884.

) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9, 280 (1933).

***) R. Schumann: Graphische Darstellung von Geoidhebungen auf Grund der Stokesschen Formel. Gerlands Beitr. z. Geophys. **40** (1933).

†) K. Mader: Berechnung von Geoidhebungen in den Alpen. Gerlands Beitr. z. Geophys. **41** (1934).

unregelmäßigkeiten unter Umständen völlig überdeckt werden kann, so daß anstatt der vielleicht erwarteten Hebung bzw. Senkung sich geradezu die gegenteilige Undulation einstellen kann. Schon aus diesem Grunde halte ich einen Schluß von der Undulation auf die Massenanordnung in der nächsten Umgebung für bedenklich.

Erfolgversprechender erscheint daher — wenigstens auf den ersten Blick — die Diskussion der Partialundulationen auf Grund der Ackerlschen Entwicklungen. Indessen werden auch auf diesem Wege Schlüsse von der Undulation auf die Massenanordnung der nächsten Umgebung nur mit Vorsicht gezogen werden dürfen, da sich zeigen läßt, daß die gewählte Bezugsfläche regional, nämlich über weite Gebiete hinweg, das Vorzeichen der Undulationen systematisch beeinflussen kann. Ich komme damit auf die grundsätzliche Bedeutung der Funktion U für die Beantwortung aller mit der Erdfigur zusammenhängenden Fragen zurück. Je nach der Annahme über U erhält man verschiedene Werte für γ, $\partial\gamma/\partial n$, T, ζ und $g - \gamma$. Ich hätte a. a. O.*) noch hinzufügen können, daß sich auch die Richtung von ζ, d. h. sein Vorzeichen, beim Übergang von einer Annahme über U zu einer anderen Annahme unter gewissen Voraussetzungen ändern könne, mit anderen Worten, ich hätte behaupten dürfen, daß Hebungen (Senkungen) des auf eine vorgegebene Bezugsfläche bezogenen Geoids beim Übergang zu einer anderen Bezugsfläche unter Umständen als Senkungen (Hebungen) in Erscheinung treten können. Dem Nachweis dieser Aussage ist der folgende Abschnitt gewidmet.

2. Wir wählen die beiden Funktionen U, U' derart, daß $U - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ bzw. $U' - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ im Gesamtraum — vom Ursprung abgesehen, der mit dem Erdschwerpunkt zusammenfalle — harmonisch sind. Wir bilden für die Kräftefunktion W der Erde die Gleichungen

$$W = U' + T',\ T' = W - U';\quad W = U + T,\ T = W - U = U' - U + T'.$$

In der Umgebung einer Stelle am Geoid $W = c$ seien die Werte von U' und T' vorgegeben. Alsdann zeigt die letzte Gleichung, daß T eine Funktion von U allein ist. Unabhängig von der Massenanordnung in der Erdkruste läßt sich daher durch geeignete Wahl von U der Funktion T ein beliebiger positiver oder negativer Wert an der vorgegebenen Stelle des Geoids erteilen.

Bei der weiteren Untersuchung der Abhängigkeit der Funktion T von U soll vorerst $U' - U < 0$ sein. Von der Funktion T' fordern wir, daß sie an der betrachteten Stelle positiv und so klein sei, daß $T < 0$ ist; die Forderung ist für $U - U' > T' > 0$ erfüllt. Alsdann zeigen die Gleichungen

$$\zeta' = -\frac{T'}{\gamma'},\quad \zeta = -\frac{T}{\gamma}, \qquad (1)$$

*) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. 9, 280 (1933).

daß der Hebung ζ' bezogen auf das Niveausphäroid $U' = c$ die Senkung ζ bezogen auf das Niveausphäroid $U = c$ entspricht; der in den Außenraum des Geoids gerichteten Normale geben wir nämlich das positive Vorzeichen.

Wir betrachten den weiteren Fall, daß T' an der betrachteten Stelle des Geoids $W = c$ zwar wieder positiv sei, aber im übrigen die Ungleichung $T' > U - U' > 0$ erfülle. Alsdann ist $T > 0$ und die Gleichungen (1) sagen aus, daß die Hebung ζ' des auf das Niveausphäroid $U' = c$ bezogenen Geoids $W = c$ auch eine Hebung ζ dieses Geoids — wenn auch im allgemeinen von einem anderen Betrage — bei seiner Beziehung auf das Niveausphäroid $U = c$ ist.

Schließlich wollen wir noch annehmen, daß T' negativ sei; dann ist auch $T < 0$. Die Gleichungen (1) sagen jetzt aus, daß der Senkung ζ' relativ zum Niveausphäroid $U' = c$ eine Senkung ζ anderen Betrages relativ zum Niveausphäroid $U = c$ entspricht.

Zu ähnlichen Ergebnissen kommt man, wenn von der Annahme $U' - U > 0$ ausgegangen wird. Wir haben hierdurch die Erkenntnis gewonnen, daß wenigstens unter gewissen Umständen eine Hebung (Senkung) des Geoids unabhängig von der vorgegebenen Massenanordnung in der Erdkruste nur durch den Wechsel der Bezugsfläche in eine Senkung (Hebung) übergehen kann. Wir wollen dieses fast selbstverständliche Ergebnis noch an folgendem Beispiel erläutern.

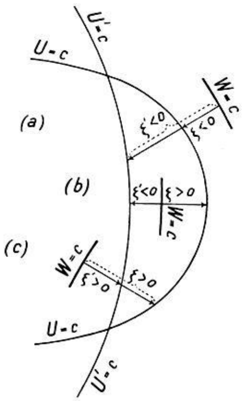

Fig. 1. Relativität der Undulationen bezüglich der Bezugsflächen $U = c$ und $U' = c$

Man setze

$$U' = \frac{Y_0}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

$$U = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2}{r^3} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Alsdann unterscheidet sich das Niveausphäroid $U' = c$ kaum von einer Kugel und das Niveausphäroid $U = c$ kaum von einem abgeplatteten Rotationsellipsoid.

Wir betrachten am Geoid $W = c$ zunächst eine Stelle in der Umgebung des Äquators. Dann ist $Y_2 > 0$ und daher

$$U' - U = -\frac{Y_2}{r^3} < 0.$$

Nun sind die Unterscheidungen zu machen:

a) $T' > U - U' > 0$, also $T > 0$, $\zeta' < 0$, $\zeta < 0$;

b) $U - U' > T' > 0$, also $T < 0$, $\zeta' < 0$, $\zeta > 0$;

c) $T' < 0$, also $T < 0$, $\zeta' > 0$, $\zeta > 0$.

Alle drei Fälle sind in der Fig. 1 schematisch dargestellt; in ihr bedeuten die Kurven $U = c$, $U' = c$ die Spuren eines Meridianschnittes der beiden Niveausphäroide mit der Zeichenebene.

Wir wollen Größen von der Ordnung des Quadrats der Abplattung vernachlässigen. Dann gelten in den Punkten des Geoids $W = c$ die Gleichungen*):

$$T' = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{Y_n}{n-1}, \quad T = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n}{n-1} = -Y_2 + T'.$$

Da in der Umgebung des Äquators $Y_2 > 0$ ist, lassen sich die untersuchten drei Fälle für die vorgegebene Stelle am Geoid auch folgendermaßen charakterisieren:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & T' > Y_2 > 0, \text{ also } T > 0, \ \zeta' < 0, \ \zeta < 0; \\ \text{b)} & Y_2 > T' > 0, \text{ also } T < 0, \ \zeta' < 0, \ \zeta > 0; \\ \text{c)} & T' < 0, \text{ also } T < 0, \ \zeta' > 0, \ \zeta > 0. \end{array}$$

Man sieht, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß in der Umgebung des Äquators eine Hebung ζ' des Geoids $W = c$ bezüglich des kugelförmigen Niveausphäroids $U' = c$ in eine Senkung ζ relativ zum ellipsoidischen Niveausphäroid $U = c$ übergehe, durch die Ungleichungen $Y_2 > Y_2 + T > 0$ gegeben werden.

Ähnliche Überlegungen lassen sich für eine Stelle in der Umgebung des einen oder anderen Pols am Geoid $W = c$ anstellen. Hier ist $Y_2 < 0$. Ich begnüge mich mit der Angabe, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Ungleichungen $Y_2 < Y_2 + T < 0$ sind, damit in der Umgebung der Pole einer Senkung ζ' des Geoids $W = c$ bezüglich des kugelförmigen Niveausphäroids $U' = c$ eine Hebung ζ relativ zum ellipsoidischen Niveausphäroid $U = c$ entspreche.

Wir wollen in Kürze noch folgendes Beispiel betrachten. Die Kräftefunktion werde durch die Gleichung

$$W = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2}{r^3} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

$$Y_2 = -\frac{a}{2}(3\cos^2\Theta - 1) + b\sin^2\Theta\cos 2\varphi$$

bestimmt, worin $a > b > 0$ und b sehr klein sei. Wir wählen die Funktionen U, U' wie folgt:

$$U' = \frac{Y_0}{r} - \frac{a}{2r^3}(3\cos^2\Theta - 1) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

$$U = \frac{Y_0}{r} - \frac{a}{2r^3}(3\cos^2\Theta - 1) + \frac{b'}{r^3}\sin^2\Theta\cos 2\varphi + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

worin b' nur wenig größer als b sein soll. Dann ist $U' - U = -\frac{b'}{r^3}\sin^2\Theta\cos 2\varphi$.

---

*) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. 9, 282 (1933); für $a = 1$.

Wir beschränken uns auf Punkte am Äquator; also ist $\Theta = \pi/2$. Der Äquatorschnitt des Niveausphäroids $U' = c$ ist ein Kreis; die Äquatorschnitte des Geoids $W = c$ und des Niveausphäroids $U = c$ sind sehr nahe Ellipsen, falls nämlich b bzw. b' gegenüber dem Kreisradius sehr klein sind. In der Fig. 2 werden die hier vorliegenden Verhältnisse schematisch veranschaulicht. Man sieht, daß durch die Wahl der Bezugsfläche das Vorzeichen der Undulationen regional, nämlich über weite Gebiete hin, systematisch beeinflußt wird. Nehmen wir beispielsweise an, daß beim Bezug des Geoids $W = c$ auf das Niveausphäroid $U' = c$ von Rotationsform die beiden Senkungen ($\zeta > 0$) über Ozeanen und die beiden Hebungen

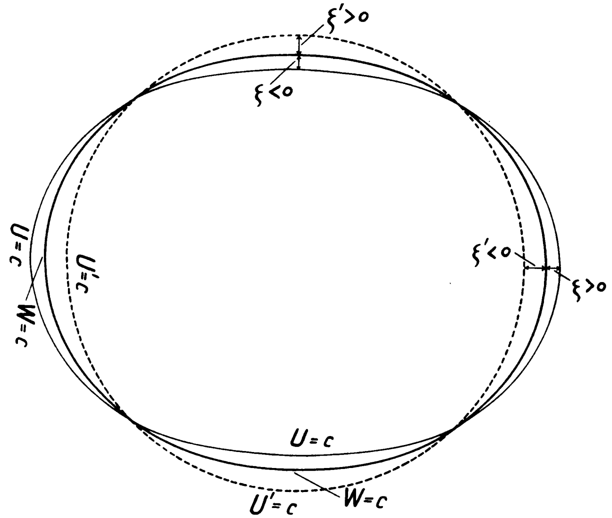

Fig. 2
Äquatorschnitt einer dreiachsigen Erdfigur und zweier ihrer Bezugsflächen

($\zeta < 0$) über Kontinenten liegen. Alsdann kehren sich beim Übergang zum Niveausphäroid $U = c$ mit elliptischem Äquator unter den getroffenen Annahmen die Verhältnisse gerade um.

Das Beispiel scheint mir besonders aufschlußreich. Nehmen wir nämlich an, daß in der Entwicklung der Kräftefunktion W nach Kugelfunktionen sich der Koeffizient b nur sehr ungenau ergeben habe, so daß man für diesen Koeffizienten den Wert $b' > b$ erhalten habe. Offenbar wäre es dann ein vergebliches Bemühen, aus der Verteilung der positiven und negativen Undulationen relativ zum Niveausphäroid $U = c$ auf die Massenanordnung Schlüsse ziehen zu wollen. Hierbei haben wir im Beispiel noch der Einfachheit halber angenommen, daß der Orientierungswinkel φ_0 für die Zählung der Längen φ bei beiden Flächen derselbe ist. Die Verhältnisse würden sich noch viel verwickelter herausgestellt haben, wenn wir eine kleine Verschiedenheit in den Orientierungswinkeln φ_0 bzw. φ_0' der beiden Flächen angenommen hätten.

3. Die eben gewonnenen Erkenntnisse dienen als Grundlage für eine Reihe von Folgerungen. Bekanntlich hat Helmert*) bei seinem fast in Vergessenheit geratenen synthetischen Aufbau des Geoids größere Hebungen über den Kontinenten erhalten. Auf den ersten Blick scheint daher Helmerts Geoid zwar mit dem ursprünglichen Geoid Ackerls in guter Übereinstimmung, aber zum Geoid Hirvonens im diametralen Gegensatz zu stehen, da letzteres Geoid auffallenderweise gerade über Zentralasien und Nordamerika Senkungen aufweist. Der Widerspruch mit dem Geoid Hirvonens und mit dem berichtigten Geoid Ackerls klärt sich indessen auf, wenn auf die Bezugsflächen Bedacht genommen wird, die den so verschieden aussehenden Geoiden zugrunde liegen. Helmerts Bezugsfläche ist nämlich eine Kugel, die sich kaum von dem kugelförmigen Niveausphäroid $U' = c$ unterscheidet und der Helmert die Kontinentalmassen aufgesetzt hat. Ackerl und Hirvonen wählten ellipsoidische Bezugsflächen, nämlich Niveausphäroide der Form $U = c$, deren erzeugende Funktion U durch die Zerlegung der Kräftefunktion W in die Bestandteile U und T gewonnen wurde; das Geoid läßt sich allerdings aus diesen Niveausphäroiden nicht durch einen einfachen synthetischen Prozeß, nämlich durch Aufsetzen bzw. Abheben geeigneter Massen, herstellen.

Aus der Tatsache, daß die Umgebung einer Stelle am Geoid nach Wahl zweier geeigneten Bezugsflächen unabhängig von der Massenanordnung in der Erdkruste bezüglich einer der beiden Flächen auf einer Hebung des Geoids und gleichzeitig bezüglich der anderen Bezugsfläche auf einer Senkung liegen kann, wird man schließen, daß zumindest zum gegenwärtigen Zeitpunkte alle Versuche unfruchtbar bleiben müssen, die aus den Undulationen Rückschlüsse auf die Massenanordnung in der Erdkruste mit Sicherheit ziehen wollen. Ledersteger**) hat daher mit Recht — wenn auch aus anderen Gründen — jene Deutungsversuche***) zu dem Geoid Ackerls und Hirvonens abgelehnt, die die Senkungen im Bereiche der Kontinente mit Massendefekten und die Hebungen über den Ozeanen mit Massenüberschüssen in einen kausalen Zusammenhang zu bringen versuchten.

Die Relativität der Undulationen hinsichtlich der Bezugsfläche ist eine notwendige Folge jener Unbestimmtheit, die der Funktion U trotz der ihr vorgeschriebenen allgemeinen Eigenschaften noch immer anhaftet. Den aus U abgeleiteten Größen γ, $\partial \gamma / \partial n$, $g - \gamma$ kommt daher die nämliche Relativität wie den Undulationen ζ zu. Es ist infolgedessen ein wenigstens dermalen aussichtsloses Bemühen, aus den Schwerkraftstörungen sichere Schlüsse auf die Massenanordnung in der Umgebung der Störung ziehen zu wollen. Denn in der Umgebung geeignet gewählter Stellen am Geoid läßt sich erreichen, daß die Schwerkraftstörung $g - \gamma$

*) F. R. Helmert: Höhere Geodäsie **2**, 4. Kap. Leipzig 1884. Vgl. die Karte am Schluß des Bandes.

) K. Ledersteger: Bemerkungen zu den Geoiden von Ackerl und Hirvonen. Zeitschr. f. Geophys. **10, 251 (1934).

***) K. Jung: a. a. O., S. 324; R. Schwinner: Die neuen Geoide. Gerlands Beitr. z. Geophys. **41** (1934).

je nach der Annahme über die Funktion U verschiedene Werte — gegebenenfalls sogar von entgegengesetztem Vorzeichen — annimmt. Demgemäß wird auch der Rückschluß auf die Massenanordnung in der Erdkruste je nach der getroffenen Annahme über die Funktion U verschieden ausfallen. Hiermit ist natürlich keine neue Erkenntnis gewonnen, wenn man bedenkt, daß jeder Rückschluß von den Schwerkraftstörungen $g-\gamma$ auf die Massenanordnung in der Erdkruste einen Versuch zur Lösung des Umkehrproblems der Potentialtheorie bedeutet, dessen Vieldeutigkeit längst bekannt ist.

4. Die Rolle der Funktion U beim Studium der Erdfigur läßt sich an einem Analogon in der Theorie der allgemeinen Planetenstörungen gut klarmachen. Hier geht man häufig von einer sogenannten intermediären Bahn — meist einer Ellipse oder einer rotierenden Ellipse — aus, die innerhalb gewisser Grenzen willkürlich wählbar ist, um sodann die kleinen Abweichungen der in der Natur vorgegebenen Bahn von der gewählten intermediären Bahn aus einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu berechnen. Beim Studium der Erdfigur spielt das Niveausphäroid die Rolle der intermediären Bahn; das Analogon zu der von der Natur vorgegebenen Bahn ist das Geoid, dessen kleine Abweichungen vom Niveausphäroid $U = c$ durch die Funktion T gegeben werden, die als partikuläres Integral einer partiellen Differentialgleichung geeignet zu bestimmen ist*). Während aber für die Astronomen die intermediäre Bahn nichts anderes als ein mathematisches Hilfsmittel ist, erblickt die Mehrzahl der Geodäten schon in der intermediären Lösung $U = c$, nämlich im Niveausphäroid, die Erdfigur.

In logischer Folge dieser Auffassung erklärten daher diese Geodäten die Werte der theoretischen Schwerkraftbeschleunigung $\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}$ als die „normalen" Werte und die von der Natur vorgegebenen Schwerkraftwerte $g = -\frac{\partial W}{\partial n}$ als die „gestörten" Werte. Diese Begriffsbildungen führten zwangsläufig zum Vergleich letzterer Schwerkraftwerte mit den durchaus willkürlich als „normal" bezeichneten Schwerkraftwerten γ, womit sich die Geophysik insbesondere in der Deutung der „Schwerkraftstörungen" $g-\gamma$ durch Massenunregelmäßigkeiten in der Umgebung der Störung ein unlösbares Problem selbst geschaffen hat.

Weil die nach Bouguer reduzierten Beobachtungswerte in der Regel auf Schwerkraftstörungen $g-\gamma$ führten, die im Bereich der Kontinente negativ und über den Ozeanen positiv waren, hat man zur Deutung dieser auffälligen Erscheinung — allerdings ohne Bedachtnahme auf die Relativität der Differenzen $g-\gamma$ — die Hypothese von der isostatischen Massenlagerung in der Erdkruste erdacht. Denn auf ihrer Grundlage ließen sich trotz des systematisch wirkenden Fehlers, der durch die Außerachtlassung des Terms von Bruns hineingetragen wurde, Reduktionsverfahren angeben, die zwischen den „gestörten" und „normalen"

*) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 280 (1933).

Schwerkraftwerten schlecht und recht eine Übereinstimmung herbeiführten. Nach den Ausführungen im vorangehenden Abschnitt muß es aber wegen der Unbestimmtheit der Funktion U trotz der ihr vorgeschriebenen allgemeinen Eigenschaften als ein sehr gewagter Schritt bezeichnet werden, wenn aus jener sogenannten Übereinstimmung umgekehrt auf das tatsächliche Bestehen einer isostatischen Massenlagerung in der Erdkruste geschlossen wird.

Die Geologen mögen es sich gesagt sein lassen, daß so und nicht anders die gravimetrische Begründung der Lehre von der Isostasie ausschaut. Die Geodäten und Geophysiker aber werden sich darüber klar werden müssen, daß sie der Probleme, die uns das Schwerefeld der Erde stellt, nicht Herr werden können, solange nicht jene typisch scholastische Einstellung mit ihrer Unterscheidung zwischen „normalen“ und „gestörten“ Schwerkraftwerten aufgegeben wird.

5. Kehrt man — wie bereits bemerkt — im Einklange mit der Theorie die Vorzeichen der Undulationen Ackerls um, so zeigt sich hinsichtlich der Verteilung der Hebungen und Senkungen des Geoids eine weitgehende Übereinstimmung mit den Ergebnissen Hirvonens. Nur hinsichtlich der Größe der Undulationen bestehen beträchtliche Unterschiede; Hirvonens Undulationen sind nämlich fast durchweg erheblich kleiner als Ackerls Undulationen.

Letzterer benutzte bekanntlich Schwerkraftwerte, die aus den Beobachtungswerten nach dem Reduktionsverfahren von Prey hervorgingen; Hirvonen führte die Reduktion nach der Freiluftformel durch. Da nur das Verfahren von Prey Randwerte des Geoids liefert, ging somit Hirvonen bei der Berechnung seiner Undulationen von Werten aus, die keine Randwerte des Geoids sind. Man kann natürlich keine richtigen Ergebnisse erwarten, wenn der zahlenmäßigen Lösung einer Randwertaufgabe Ausgangswerte zugrunde gelegt werden, die keine Randwerte sind*). Also verdienen nach Berichtigung des Vorzeichens nur Ackerls Ergebnisse über die Größe der Undulationen Vertrauen.

Immerhin scheint mir auf Grund meiner Ausführungen in den vorangehenden Abschnitten eine Einschränkung aus der Erwägung heraus am Platze, daß zufolge der Unsicherheit mancher von den verwendeten Schwerkraftbeschleunigungen größere Fehler systematischen Charakters in den Undulationen über ausgedehnteren Gebieten nicht ausgeschlossen sein dürften; selbstverständlich können jene unsicheren Werte der Schwerkraft auch die Größe, Form und Orientierung des Ackerlschen Niveausphäroids beeinflußt haben. Nicht übersehen sollte weiterhin werden, daß Ackerls Undulationen nur an wenigen Stellen $\pm$ 600 m und darüber erreichen. Man kann daher sagen, daß die größten Undulationen ausgedrückt in Einheiten des mittleren Erdradius — unter α die Abplattung verstanden — etwa von der Ordnung $\pm 10\,\alpha^2$ sind. In der bereits wiederholt erwähnten partiellen Differentialgleichung und in den Nebenbedingungen, die von der Funktion T erfüllt werden sollen, sind Größen von der Ordnung α^2 vernachlässigt. Es scheint

*) K. Ledersteger: Bemerkungen zu den Geoiden von Ackerl und Hirvonen. Zeitschr. f. Geophys. **10**, 250 (1934).

mir zwar ganz unwahrscheinlich, daß hierdurch bei der numerischen Berechnung der Undulationen Fehler von der Ordnung $\pm$ 10 α^2 hervorgerufen werden könnten; sicherlich darf man aber Fehler bis zu $\pm$ 2 α^2 oder $\pm$ 3 α^2 in den numerischen Werten der Undulationen befürchten, ob man nun wie Ackerl die Reihenentwicklung oder wie Hirvonen die Stokessche Integraldarstellung von ζ benutzt; denn beide Lösungen sind ja nur verschiedene Formen einer und derselben partikulären Lösung jener partiellen Differentialgleichung. Man wird daher Undulationen unter 150 m kaum als gesichert ansehen können. Aus allen diesen Gründen möchte ich vor weitgehenden Schlüssen aus den bisher vorliegenden Ergebnissen warnen. Wie Ackerl bereits mehrfach betont hat, handelte es sich bei seinem rechnerischen Versuch vorerst nur darum, einerseits die numerische Ausführbarkeit des Verfahrens zu erproben und andererseits zu zeigen, daß die Undulationen größer sein dürften als in den letzten Jahren allgemein angenommen worden ist.

Ein detonierendes Meteor über dem Weserbergland am 2. Januar 1934

Von **Wilhelm Hartmann,** Hannover, Flugwetterwarte — (Mit 3 Abbildungen)

Am 2. Januar 1934 wurde um 18.58 Uhr über dem Weserbergland zwischen Detmold und dem Steinhuder Meer ein sehr lichtstarkes Meteor beobachtet. Mit einer Anfangsgeschwindigkeit von etwa 45 km pro Sekunde begann das Meteor in etwa 65 km Höhe zu erglühen. Wahrscheinlich teilte es sich gleich in zwei Teile. In steiler, etwa 110 km langer Bahn drang es nach Nordnordosten in die Erdatmosphäre ein, um in etwa 3 km Höhe nordnordöstlich der Stadt Rehburg zu explodieren. Der kleinere Teilmeteorit stürzte etwa 14 km vorher ab. — Die Bahn konnte aus Augenbeobachtungen berechnet werden. Die aufgetretenen Schallerscheinungen ließen sich mit der berechneten Bahn in gute Übereinstimmung bringen. — Nicht erklärt werden konnte ein während der Lichterscheinung auftretendes Zisch- und Brummgeräusch, das aber möglicherweise durch den mit kosmischer Geschwindigkeit in die Erdatmosphäre eindringenden Weltkörper als Schall höherer Ordnung von etwa 10 bis 20 km/sec erzeugt wurde, ähnlich wie die höheren Schallgeschwindigkeiten in der Nähe von Geschützen.

Am 2. Januar 1934 wurde um 18.58 Uhr über dem Weserbergland ein sehr helles Meteor beobachtet, das mit heftigen Schallerscheinungen zersprang. Eine Aufforderung der Flugwetterwarte Hannover in den Zeitungen um Mitteilung von Beobachtungen brachte etwas mehr als 40 Zuschriften, die unter sich allerdings ziemlich ungleichwertig waren. Die Bearbeitung dieser Angaben ließ den Vorgang in den Hauptzügen erkennen.

Beobachtungsgebiet. Die Beobachtungen der Lichterscheinungen erstrecken sich über ein ziemlich weites Gebiet, welches in der Ost—West-Richtung etwa 150 km Durchmesser hat. Die Nord—Süd-Erstreckung beträgt dagegen nur