5. Conclusion. It has been shown that the inclusion of the attraction of distant topography and its compensation in the Hayford-Bowie tables is largely illusory, since the attraction for all zones beyond 35° is between 50 and 200% different from what it would be if calculated for perfect hydrostatic equilibrium.

In calculating attractions in future there seem to be three possible courses:

1. To continue to use the Hayford and Bowie tables uncorrected.
2. To use the tables and correct by (1) and (2).
3. Not to consider the distant zones at all.

A small change in the assumptions would change the corrections for the outer zones by a large factor, for instance if compensation were only 98% complete, a further change as big as that discussed above would be produced; or if the strain in the crust is assumed to be a minimum the correction vanishes altogether*). It thus seems impossible to predict the attraction of these zones, even approximately, without making very detailed assumptions. There is therefore little to be gained by using the corrected tables. In principle it would probably be best to omit zones 1—5 (that is all zones beyond 35°) altogether. On the other hand a large number of stations have been reduced using the existing tables, and if it is decided to omit the outer zones in future, it would be disirable to remove their effect from these stations also. The work involved in doing this is not great. The decision whether it is worth while must be left to those directly concerned.

In using results reduced by the tables to discuss such questions as the ellipticity of the equator or the difference between the form of the northern and the southern hemisphere, care must be taken that systematic error is not introduced.

Kann die Laplacesche Differentialgleichung für das Schwerkraftpotential auch innerhalb der Erdkruste als erfüllt angesehen werden?

Von **L. Grabowski**, Lwów (Lemberg)

Es könnte müßig erscheinen, diese Frage aufzuwerfen, da es ja bekannt ist, daß dies nicht der Fall ist. Wenn ich trotzdem darauf zu sprechen komme, so geschieht es, weil in einigen in diesem Jahre erschienenen Abhandlungen die Behauptung ausgesprochen und zu begründen versucht wird, die Anwendung der Laplaceschen Differentialgleichung sei als Näherung auch innerhalb der Erdkruste gestattet, und aus dieser Behauptung zum Teil auch weitere Folgerungen gezogen werden.

*) Jeffreys: M. N. R. A. S. Geophys. Suppl. Vol. 3, p. 30 (1932).

In einer in Gerlands Beitr. z. Geophys. **41**, Heft 2 (1934) erschienenen Abhandlung lesen wir auf S. 183 (W bedeutet das Schwerkraftpotential, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, α die Abplattung, f die Gravitationskonstante):

„Da in der Erdkruste, unter ϱ die Dichte verstanden, $4\pi f\varrho < \alpha^2$ ist, kann in den Punkten daselbst die Poissonsche Gleichung $\Delta W = 2\omega^2 - 4\pi f\varrho$ durch die Laplacesche Gleichung $\Delta W = 2\omega^2$ ersetzt werden, wenn Größen von der Ordnung α^2 vernachlässigt werden dürfen.“

Hierbei wäre zunächst zu fragen, was eigentlich mit der Vernachlässigung von Größen der Ordnung α^2 gemeint ist. Sollte es etwa bedeuten, daß in der Berechnung der Abstände des Geoids von einer passend gewählten gravimetrischen Referenzfläche (etwa einem Ellipsoid oder einem Niveausphäroid) Fehler um Strecken, die im Verhältnis zum Erdradius klein von der Ordnung α^2 sind, als zulässig erachtet werden, so wäre demgegenüber zu bemerken, daß dies Strecken von der Größenordnung von 70 m sind, also von derselben Größenordnung wie die Geoidabstände selbst, da diese letzteren nach den Abschätzungen von Helmert und der auch heute überwiegenden Ansicht nur in wenigen kleinen Gebieten 100 m übersteigen können, im allgemeinen aber viel kleiner bleiben; die erwähnte Vernachlässigung wäre also nicht zulässig.

Aber auch abgesehen davon ist die Motivierung der Zulässigkeit der Verwendung der Laplaceschen Gleichung statt der Poissonschen mit der Ungleichung $4\pi f\varrho < \alpha^2$ nichtig; denn diese Ungleichung besteht nicht. Sie hat nämlich überhaupt keinen Sinn, da $4\pi f\varrho$ und α^2 Größen von verschiedener Dimension sind. Die erstere hat die Dimension $[t^{-2}]$, also die des Quadrates einer Winkelgeschwindigkeit; α^2 dagegen ist eine reine Zahl.

Ersetzt man aber, wie oben gesagt, $2\omega^2 - 4\pi f\varrho$ durch $2\omega^2$, so heißt das Größeres gegenüber Kleinerem vernachlässigen. Denn $2\omega^2$ ist annähernd gleich $\dfrac{1}{3712 \cdot 10^6\,\mathrm{sec}^2}$, während $4\pi f\varrho$, wenn man ϱ in der Erdkruste gleich 2,7mal der Dichtigkeit des Wassers bei 4° C annimmt, annähernd $\dfrac{1}{0{,}44 \cdot 10^6\,\mathrm{sec}^2}$ ist; also etwa 8400mal größer als $2\omega^2$.

In derselben Abhandlung liest man an einer weiteren Stelle auf derselben Seite, wobei g die wahre, γ die dem Niveausphäroid entsprechende Schwerebeschleunigung bezeichnet:

„Denn der Unterschied zwischen den beiden Termen

$$\left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_0 h \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right)_0 h$$

in den Formeln (2) und (3) ist von der Ordnung der Terme, also im allgemeinen größer als α^2.“ Darin bedeutet $(\partial/\partial n)_0$ Differentiation nach der äußeren Normale des Niveausphäroids (oder auch des Geoids) in einem Punkte der Erdoberfläche und h die Meereshöhe dieses Punktes.

Hierzu ist zu bemerken, daß der Unterschied der beiden Terme offenbar (wie die Terme selbst) eine Beschleunigung ist, also wieder nicht vergleichbar mit der reinen Zahl α^2.

In einer später erschienenen Abhandlung (von einem anderen Verfasser) in der Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. 1934, Heft 5/6, die sich mit der Frage der Verwendung von Schwerebeobachtungen zur Ermittlung der Undulationen des Geoids befaßt, wird das Schwerkraftpotential W zerlegt in

$$W = U + T, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei U „eine das Potential in den Punkten des Geoids annähernd darstellende Funktion, die bis auf den Schwerpunkt im Gesamtraum harmonisch*) ist" (also U = const. die Gleichung eines Niveausphäroids) bedeutet. Es wird dann mit g und γ' die wahre und die „theoretische" Schwerebeschleunigung (letztere nämlich $= -\partial U/\partial n$) im Punkte P des Geoids bezeichnet und mit γ die theoretische Beschleunigung im Punkte Q des Niveausphäroids, der auf derselben Normale des Geoids liegt. Auf S. 247 lesen wir dann:

„... Das Verfahren liefert ... bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung des Quadrates der Abplattung α

$$g - \gamma + \frac{2\,T}{a} + \frac{\partial T}{\partial r} = 0.\text{"} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4\,\mathrm{b})$$

(a bedeutet den mittleren Radius der Erde.) Und nun zwei Zeilen weiter wieder, wie in der früher erwähnten Abhandlung: „Da in den Punkten der Erdkruste $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ist, kann man mit derselben Genauigkeit in allen Punkten des Geoids die Laplacesche Gleichung $\Delta T = 0$ als erfüllt ansehen, und daher als partikuläre Lösung der Differentialgleichung (4b) eine harmonische Funktion ansetzen ..."

Da ΔU infolge der Wahl der Funktion U gleich $2\omega^2$ ist, beruht die über ΔT gezogene Schlußfolgerung $\Delta T = 0$ offenbar darauf, daß in der aus (2) folgenden Gleichung

$$\Delta W = \Delta U + \Delta T$$

die linke Seite, also $2\omega^2 - 4\pi f \varrho$, durch $2\omega^2$ ersetzt wird. Man hat hier also wieder dieselbe unzulässige Vernachlässigung, und zwar wieder mit derselben irrtümlichen Begründung.

Es wird dargelegt, daß die in einigen neueren Abhandlungen ausgesprochene Behauptung, die Anwendung der Laplaceschen Differentialgleichung für das Schwerkraftpotential sei (statt der Poissonschen) als Näherung auch innerhalb der Erdkruste gestattet, auf einem Irrtum beruht.

*) Aus dem auf S. 248 angeschriebenen Ausdruck für U ersieht man indessen, daß der Verfasser unter U eigentlich (wie üblich) die Summe einer harmonischen Funktion und des Potentials der Zentrifugalkraft versteht.

Lwów (Lemberg), Polen, Techn. Hochschule, September 1934.