den Ansatz herum bei Stromschluß in der Spule wurde mit Eisenfeilspänen untersucht. Die Kraftlinien treten nach vorne im wesentlichen radial aus dem Ansatz aus, also so, daß ihre Richtung immer gerade mit der des Schreibarmes zusammenfällt. Um nachzuprüfen, ob wirklich keine störenden, seitlichen Kräfte auf den Schreibarm wirken, wurden außerdem noch zwei Versuche angestellt. Einmal wurde die Pendelmasse absichtlich etwas aus ihrer normalen Ruhelage herausgebracht, so daß der Schreibarm ganz schief stand. Die erhaltene Registrierlinie zeigte an den Minutenmarken keinerlei seitliche Ausbiegungen. Dann wurde in der Normalstellung eine größere Anzahl von Dämpfungsfiguren mit geringer Dämpfung aufgenommen, alle mit der gleichen Anfangsamplitude. Bei jeder Dämpfungsfigur wurde eine Zeitmarke ausgelöst, und zwar von Figur zu Figur etwas verschoben, anfangs bei großer Amplitude und dann bei immer kleiner werdenden Amplituden. Die so erhaltenen Dämpfungsfiguren waren alle einander vollkommen gleich. Damit ist, glaube ich, wohl zur Genüge nachgewiesen, daß durch diese Art der Zeitmarkierung keine Störung der Aufzeichnung entsteht.

Bei Seismographen mit geringer Vergrößerung reicht diese Zeitmarkierung auch bei starken Beben vollständig aus. Bei Seismographen mit mittlerer Vergrößerung, wie z. B. bei den Stuttgarter Mainkapendeln mit etwa 150 facher Vergrößerung, setzt die Zeitmarkierung bei Diagrammamplituden größer als etwa 60 mm aus. Derartige Amplituden sind aber verhältnismäßig selten und kommen bei uns eigentlich fast nur im Bereich der Oberflächenwellen von starken Fernbeben vor; wenn da die eine oder andere Zeitmarke gelegentlich ausfällt, so schadet dies gar nichts. Bei Instrumenten mit sehr starker Vergrößerung (1000- bis 2000 fach) habe ich noch keine Versuche anstellen können; ich glaube aber, daß sich auch hier diese Art der Zeitmarkierung bewähren wird.

Über die Minimumseigenschaft der Schwerestörungen

Von **K. Ledersteger,** Wien

Es wird nachgewiesen, daß die übliche Ableitung der theoretischen Schwerkraft nach der Methode der kleinsten Quadrate nur bei streng symmetrischer Verteilung der Beobachtungswerte Gültigkeit hat. Die Reduktion der Beobachtungen hat nur geringen Einfluß auf die Abplattung.

Bekanntlich folgt aus der Ackerlschen Entwicklung*) des Schwerefeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung für das Brunssche Niveausphäroid ein Abplattungswert, der von den anderweitigen neueren Bestimmungen der „Erdabplattung“ aus dem Clairautschen Theorem nicht unbeträchtlich abweicht. Bei der Diskussion über diesen Gegensatz hat man bisher ausschließlich

*) F. Ackerl: Die Ergebnisse der Entwicklung des Schwerkraftfeldes der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Zeitschr. f. Geophys. 9, 263ff. (1933).

die verschiedene Behandlung der beobachteten Schwerewerte hinsichtlich ihrer Verwendung und Reduktion auf das Meeresniveau in Betracht gezogen, noch nie aber die Frage gestellt, ob nicht möglicherweise die gänzlich verschiedene Methode in der Ableitung der theoretischen Schwerkraft die Ursache dieser Unstimmigkeit sein kann, oder ob beide Methoden bei gleichen Ausgangswerten stets auf dasselbe Ergebnis führen müssen. Nach der physikalischen Theorie Hopfners ergeben sich, wie schon mehrfach auseinandergesetzt wurde*), die Koeffizienten der Clairautschen Formel unmittelbar aus den Kugelfunktionen 0. und 2. Ordnung der Ackerlschen Entwicklung. Diese beiden Funktionen stellen nämlich die theoretische Schwerkraft auf jenem Niveausphäroid dar, das mit dem Ausgangsgeoid gleichen Potentialwert besitzt. Bei der älteren Methode hingegen werden die gegebenen Schwerewerte einfach nach vermittelnden Beobachtungen auf Grund der Fehlergleichung:

$$g_i + v_i = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi_i) \qquad (1)$$

ausgeglichen. Damit ist die Schwerestörung $(g - \gamma)$ durch die Minimumsbedingung definiert. Diese rein formale Definition der theoretischen Schwerkraft und der scheinbaren Schwerestörung soll im folgenden auf ihre physikalische Berechtigung und Brauchbarkeit untersucht werden.

Man denke sich das Schwerefeld der Erde nach Kugelfunktionen entwickelt. Abstrahiert man dabei der Einfachheit halber von den Längengliedern, beschränkt sich also auf die zonalen Funktionen P_i, so lassen sich die Beobachtungswerte durch die Reihe:

$$g = a_0 P_0 + a_2 P_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n P_n \qquad (2)$$

darstellen. Die theoretische Schwerkraft ist nach Hopfner durch

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \beta \cos^2 \vartheta) = a_0 P_0 + a_2 P_2 \qquad (3)$$

gegeben, während die scheinbare Schwerestörung in der Form:

$$g - \gamma = \sum_{n=3}^{\infty} a_n P_n \qquad (4)$$

resultiert. Bezeichnet andererseits $\bar{\gamma}$ die nach der Minimumsbedingung

$$[\bar{\gamma} - g] = \min \qquad (5)$$

definierte theoretische Schwerkraft $\bar{\gamma} = A_0 P_0 + A_2 P_2$, so erhält man für die Unbekannten

$$A_0 - a_0 = x \quad \text{und} \quad A_2 - a_2 = y \qquad (6)$$

wegen $P_0 = 1$ die Fehlergleichungen:

$$(\bar{\gamma} - g)_i = x + P_2 y - \sum_{n=3}^{\infty} a_n P_n = v_i \ldots (i = 1 \ldots p) \qquad (7)$$

*) F. Hopfner: Die praktische Lösung der 2. Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 277ff. (1933). K. Ledersteger: Bemerkungen zu den Geoiden von Ackerl und Hirvonen. Ebenda **10**, 246 (1934).

und die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p\,x + [P_2]\,y - [\textstyle\sum a_n P_n] &= 0, \\ [P_2]\,x + [P_2 P_2]\,y - [P_2 \cdot \textstyle\sum a_n P_n] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hierin lassen sich die Absolutglieder in:

$$\left.\begin{aligned} [\textstyle\sum a_n P_n] &= \textstyle\sum a_n [P_n] \\ [P_2 \cdot \textstyle\sum a_n P_n] &= \textstyle\sum a_n \cdot [P_2 P_n] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

transformieren. Nach einem bekannten Satze verschwindet das Oberflächenintegral aus dem Produkt zweier verschiedener, allgemeiner Kugelfunktionen:

$$\int_S Y_n Y_{n'}\, d o = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n Y_{n'} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Demnach werden die Summen $[P_n]$ und $[P_2 P_n]$ bei genügender Dichtigkeit und streng symmetrischer Verteilung der Beobachtungswerte über die ganze Erdoberfläche praktisch Null, womit $x = y = 0$ oder

$$A_0 = a_0 \quad \text{und} \quad A_2 = a_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

folgt. Diese Anwendung des Integralsatzes (10) war natürlich schon Helmert bekannt. Aber selbst bei strenger Beschränkung auf den Außenraum ist damit allein noch nicht die Beziehung zum Brunsschen Niveausphaeroid gleichen Potentials klargestellt.

Da zur empirischen Entwicklung des Schwerefeldes gleichfalls symmetrische Ausgangswerte erforderlich sind, kann man das Ergebnis dieser Überlegung dahin zusammenfassen, daß bei hinreichend dicht und streng symmetrisch verteilten Beobachtungen beide Methoden die theoretische Schwerkraft am Brunsschen Niveausphäroid liefern. Im ersten Falle ergibt sie sich, um es nochmals zu betonen, auf Grund der fundamentalen Differentialgleichung

$$(g - \gamma) + \frac{2\,T}{a} + \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

in der Größen vom Quadrat der Abplattung vernachlässigt sind, unmittelbar als die Summe der Kugelfunktionen 0. und 2. Ordnung, im anderen gemäß der Minimumsbedingung für die Schwerestörung. Innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Theorie Hopfners genügt somit die scheinbare Schwerestörung $(g - \gamma)$ der Bedingung, daß ihre Quadratsumme über die ganze Erde zu einem Minimum wird.

Die symmetrische Verteilung muß natürlich gleicherweise hinsichtlich geographischer Breite und Länge bestehen. Wäre, wie oben angenommen, g eine reine Funktion der Breite, so müßte der Äquatorwert ein dem gewählten Intervall in φ entsprechendes Gewicht erhalten und müßten die Gewichte auf den Parallelkreisen mit dem $\cos\varphi$ abnehmen. Zur Abschätzung der notwendigen Dichte wurde die Kugelfunktion $P_2 = {}^3/_2 \cos^2\vartheta - {}^1/_2$ für ein Intervall von 10^0 berechnet.

Der Äquatorwert erhält dabei das Gewicht 36, der Pol, wie immer, das Gewicht 2. Aus der kleinen Tabelle 1 ersieht man, daß schon bei diesem verhältnismäßig großen Intervall fast genau $[P_2] = 0$ ist. Es genügen somit schon etwa 400 symmetrisch über die ganze Erde verteilte Beobachtungswerte zur sicheren Bestimmung der Koeffizienten γ_0 und β und damit der Abplattung des Niveausphäroids. Die Tabelle zeigt aber auch, daß infolge des Vorzeichenwechsels

Tabelle 1

ϑ	P_2	Gewicht	ϑ	P_2	Gewicht
0^0	+ 1.000	2	50^0	+ 0.120	55
10^0	+ 0.955	12	60^0	− 0.125	62
20^0	+ 0.826	25	70^0	− 0.325	68
30^0	+ 0.625	36	80^0	− 0.455	71
40^0	+ 0.380	46	90^0	− 0.500	36

von P_2 bei etwa 35^0 Breite in der Äquatorzone zwischen $\pm 35^0$ geographischer Breite mehr Beobachtungen vorliegen müssen, als nördlich und südlich davon. Wie wenig das gegenwärtige Beobachtungsmaterial dieser Forderung gerecht wird, läßt der Katalog Ackerls*) erkennen, in dem kaum mehr als ein Fünftel aller Messungen auf diese Zone entfällt.

Ackerl hat sich nach Anbringung der Preyschen Reduktion aus den Beobachtungsdaten durch Interpolation mittels der Linien gleicher Schwerkraft die als Grundlage seiner Entwicklung notwendigen, symmetrischen Ausgangswerte verschafft. Mit diesen Ausgangswerten mußte er, wie oben bewiesen, nach beiden Verfahren dieselben Konstanten der Clairautschen Formel erhalten. Daß seine nach dem Formelsystem Hopfners berechneten Schwerestörungen**) der Minimumsbedingung genügen, läßt sich mit den Kontrollgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[P_0 v] = [g - \gamma] = 0 \\ [P_2 v] = [P_2 (g - \gamma)] = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

nachweisen. Die Gleichungen (13) folgen übrigens wegen (4) unmittelbar aus dem Integralsatz (10). Die Übereinstimmung bei Ackerl vermag also die eingangs gestellte Frage nach der Ursache der Diskrepanz in den Abplattungswerten nicht zu klären. Hierzu ist vielmehr eine direkte Verarbeitung derselben, nach Prey reduzierten Beobachtungen nach die Methode der kleinsten Quadrate unerläßlich. Da eine derartige Rechnung wegen der starken Asymmetrie des Beobachtungsmaterials notwendigerweise auf eine falsche Abplattung führen muß, genügt es, dem Ausgleich das Clairautsche Theorem in seiner einfachsten Form zugrunde zu legen. Auch ist es für den vorliegenden Zweck sicher erlaubt, aus den 4165 Schwerkraftwerten des Ackerlschen Katalogs durch einfaches, seitenweises

*) F. Ackerl: Die Schwerkraft am Geoid. Akad. Wien. Sitzungsber. d. math.-naturwiss. Kl. (IIa) **141** (1932).

**) A. a. O., Anm. 1.

Mitteln 76 Fehlergleichungen aufzustellen. Die Asymmetrie, der unser Hauptaugenmerk gilt, kommt in ihnen noch deutlich zum Ausdruck. Mit den in der Tabelle 2 zusammengestellten gleichgewichtigen Daten erhält man die Schwereformel:

$$\gamma = 977.9898\,(1 + 0.005284 \sin^2 \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

und damit die Abplattung $\alpha = 1:296$.

Das Ergebnis dieser Untersuchung lehrt danach, daß der große Unterschied in den Abplattungswerten der Hauptsache nach nicht in der verschiedenen Reduktion der Beobachtungen, sondern in der starken Verschiedenheit der zu ihrer Ableitung verwendeten Methoden begründet ist. Es spricht ferner gegen die Richtigkeit des bisher fast allgemein anerkannten Abplattungswertes. Hieran ändert auch die bisherige Übereinstimmung der Abplattungswerte aus Gradmessungen und Schweremessungen nichts, da vermutlich dieselben Bedenken für den Ausgleich der Gradmessungen gelten. Aber umgekehrt können wir auch ebensowenig behaupten, daß der wesentlich größere Abplattungswert Ackerls 1 : 277 der Wirklichkeit entspricht. Das Verfahren, nach dem er gewonnen wurde, ist an sich vollkommen einwandfrei, jedoch die notwendigerweise vorhergehende Interpolation gegenwärtig noch mit großen Schwierigkeiten verbunden, wie Ackerl selbst mehrfach hervorgehoben hat. Jedenfalls ist es aber wahrscheinlich, daß die Fehler der Interpolation bei einiger Vorsicht das Resultat nicht im selben Maße verfälschen, wie die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, die trotz der üblichen Bedachtnahme auf die theoretische Forderung noch immer problematisch bleibt. Denn auch das in Tabelle 2 vorliegende Material führt bei dem Versuch, das Überwiegen der Kulturländer durch Änderung der Gewichte zu kompensieren, nur zu einer unwesentlichen Variation der Formel (14), ganz ähnlich, wie es bei der Helmert-Berrothschen Formel der Fall war. Man darf eben die fast ausschließlich aus Landmessungen gebildeten g-Mittel noch nicht mit den wahren Mittelwerten auf den zugehörigen Parallelkreisen identifizieren. Diese Mittelwerte werden vielmehr infolge des Einflusses der Weltmeere, namentlich auf der Südhalbkugel, im allgemeinen größer sein. Es ist darum sicher besser, mit Hilfe der Inselwerte und der Messungen von Vening-Meinesz die g-Linien über den Weltmeeren näherungsweise zu interpolieren, als die Inselwerte bloß darum auszuschalten, weil sie nicht als Repräsentanten ihrer Umgebung gelten können. Freilich muß letzterer Tatsache bei der Interpolation Rechnung getragen werden.

Für einen größeren Abplattungswert spricht in diesem Zusammenhange der Umstand, daß die älteren Bestimmungen der Abplattung aus dem Clairautschen Theorem auf Grund eines viel kleineren, aber eben darum besser verteilten Beobachtungsmaterials Werte um 1 : 290 herum ergeben haben. Ich verweise hier besonders auf die interessante Arbeit A. Fischers*), der erst nach Aus-

*) A. Fischer: Die Gestalt der Erde und die Pendelmessungen. Astron. Nachr. **88**, Nr. 2094/5 (1876).

Tabelle 2

Nr.	φ	g	Nr.	φ	g	Nr.	φ	g	Nr.	φ	g
1	74°50′	982.821	20	49°18′	980.967	39	46°23′	980.552	58	36°52′	979.897
2	64 08	2.225	21	49 01	0.948	40	46 14	0.596	59	36 05	9.789
3	61 28	2.028	22	48 50	0.930	41	46 01	0.531	60	35 11	9.603
4	60 24	1.937	23	48 39	0.923	42	45°35	0.635	61	34 22	9.536
5	59 31	1.891	24	48 26	0.888	43	45 14	0.621	62	33 04	9.523
6	57 15	1.714	25	48 14	0.890	44	44 53	0.552	63	30 56	9.330
7	55 48	1.591	26	48 06	0.869	45	44 25	0.525	64	29 24	9.258
8	55 27	1.581	27	47 58	0.842	46	43 48	0.499	65	27 34	9.123
9	55 06	1.560	28	47 49	0.814	47	43 07	0.411	66	25 29	8.991
10	53 58	1.437	29	47 40	0.789	48	42 36	0.274	67	23 08	8.800
11	52 47	1.332	30	47 30	0.774	49	42 05	0.308	68	21 12	8.682
12	52 14	1.285	31	47 19	0.755	50	41 26	0.220	69	19 23	8.504
13	51 55	1.246	32	47 11	0.715	51	40 46	0.178	70	16 46	8.489
14	51 38	1.222	33	47 05	0.657	52	40 13	0.069	71	13 30	8.340
15	51 21	1.183	34	46 59	0.692	53	39 38	979.998	72	9 44	8.202
16	50 51	1.107	35	46 52	0.670	54	39 00	980.000	73	3 42	8.125
17	50 24	1.075	36	46 46	0.643	55	38 26	979.915	74	— 3 46	7.963
18	49 59	1.040	37	46 39	0.614	56	37 54	9.977	75	— 12 21	8.360
19	49 38	981.005	38	46 33	0.551	57	37 29	979.909	76	— 38 26	980.061

Die Tafelwerte sind Mittel aus 54 bis 57 Einzelwerten. Nur dem Mittel Nr. 73 liegen bloß 37 Einzelwerte zugrunde.

schluß der „Störungszone“ zwischen $\pm 30^0$ Breite den üblichen Abplattungswert erhält.

Es braucht kaum betont zu werden, daß die vorhergehenden Betrachtungen für jede beliebige Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ gelten. Legt man dem Ausgleich der symmetrisch verteilten Funktionswerte den Ansatz:

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\varkappa} a_n P_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

zugrunde, wobei $\varkappa$ einen willkürlichen Index bedeutet, so wird die Restfunktion

$$\sum_{n=\varkappa+1}^{\infty} a_n P_n$$

die Minimumsbedingung erfüllen. Obige Beweisführung läßt sich ja für jeden beliebigen Index der Kugelfunktion verallgemeinern. Es muß daher auch die Entwicklung für die einzelnen Kugelfunktionen stets dieselben Koeffizienten liefern, unabhängig von der Ordnung, bis zu welcher man fortschreitet. Hinsichtlich der Funktion darf aber diesem formalen Ergebnis nicht ohne weiteres ein physikalischer Sinn beigelegt werden. Das will heißen, es gilt die Minimumsbedingung nicht a priori allgemein für die Schwerestörung bei Zugrundelegung eines Niveausphäroids beliebig hoher Ordnung. Faßt man die Niveausphäroide im Sinne Bruns als Flächen auf, denen der gleiche Potentialwert wie dem Geoid zukommt, so ergibt sich z. B. für die Kugel als Niveausphäroid 0. Ordnung, wie sich leicht nachweisen läßt, eine konstante theoretische Schwerkraft, die eine Majorante aller g-Werte darstellt, also sicher nicht die Minimumsbedingung erfüllt. Die Minimumsbedingung wird hier vielmehr für eine Kugel anderen Potentials gelten. Der tiefere Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß man in diesem Falle die theoretische Schwerkraft nicht einfach durch Abspalten der Kugelfunktion $a_0 P_0$ in der g-Entwicklung erhält.

Radiologische Untersuchungen im Radiumbad Brambach

Von **Werner Vogt**, Freiberg i. S. — (Mit 2 Abbildungen)

Ein Gelände in unmittelbarer Nähe des Radiumbades in Brambach wurde zur Festlegung der wasserführenden Spalten geophysikalisch nach der Methode der radioaktiven Bodenluftuntersuchung vermessen. Die Meßmethode und die Ergebnisse werden im ersten Teil der Arbeit besprochen; ein Vergleich mit rein geologisch gefundenen Tatsachen, wie er für einen Teil des Geländes möglich war, fällt erwartungsgemäß gut aus. — Außerdem wurden verschiedene Gesteinsproben aus der näheren und weiteren Umgebung des Bades auf Uran-Radiumgehalt untersucht. Die Ergebnisse gibt Tabelle 1. Auf einige Sonderheiten und Zusammenhänge mit den dortigen radiologischen Verhältnissen wird im Text hingewiesen.

Zur Frage der Entstehung der radioaktiven Quellen im Gebiet des Radiumbades Brambach wurden schon mehrfach Untersuchungen vom Radium-Institut