

## Werk

**Jahr:** 1935

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:11

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0011

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0011](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0011)

**LOG Id:** LOG\_0052

**LOG Titel:** Turbulente Windströmungen auf der rauhen Erdoberfläche

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Turbulente Windströmungen auf der rauhen Erdoberfläche

Von Ludwig Roux, Oppeln. — (Mit 22 Abbildungen)

Bei turbulenten Strömungen wird das Geschwindigkeitsprofil durch das logarithmische Profil gut approximiert. Die Turbulenzhöhe bzw. die anderen Größen (Winkel), die in dem logarithmischen Profilansatz unbestimmt gelassen sind, werden durch Anwendung des Impulssatzes berechnet. Die auftretenden Differentialgleichungen müssen fast immer numerisch gelöst werden (unter Benutzung der Tangentenmethode statt der genaueren Kuttaschen Methode, um allzu große Rechenarbeit zu vermeiden).

Zur Berechnung eines Strömungsvorganges kann man zwei Wege einschlagen:

1. Man löst die Bewegungsgleichungen des betreffenden Vorganges, d. h. man bestimmt direkt die Geschwindigkeit der Bewegung.

2. Man macht für die Geschwindigkeitsverteilung bestimmte Ansätze, die auf Grund experimenteller Ergebnisse als wahrscheinlich angenommen werden können oder aus anderen Gründen (etwa aus Analogie) gefordert werden. Mit diesem Ansatz geht man in die Bewegungsgleichungen ein und bestimmt dann die in dem Ansatz noch offen gebliebenen Größen. Der erste Weg führt meist zu unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten. Wir werden daher hier den zweiten Weg einschlagen.

Die Geschwindigkeitsverteilung  $u(z)$  in einer turbulenten Strömung, die wir stets als zweidimensional annehmen wollen, wird nach dem Ansatz von Prandtl\*) durch das logarithmische Profil wiedergegeben:

$$u(z) = u(\delta) \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}} \quad (\text{s. Fig. 1}) \quad \dots (1)$$

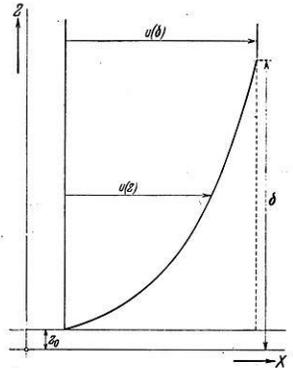


Fig. 1

Dabei bedeutet:  $z$  die Höhe über dem Erdboden,  $z_0$  die dem Rauheitsmaß  $k$  proportionale Höhe ( $z_0 = k/30$ ), in der die Geschwindigkeit null ist,  $\delta$  die sogenannte Turbulenzhöhe, bis zu der eine Abänderung der konstanten Windverteilung  $u(\delta)$  infolge der Bodenreibung sich bemerkbar macht.

\*) L. Prandtl: Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre (Bjerknes-Festschrift) 19, 194.

Mit dem Ansatz (1) geht man nun in die Bewegungsgleichung ein. Dadurch erhält man für die unbestimmt gelassene Größe  $\delta/z_0$  eine Bestimmungsgleichung. Wir werden später auch Fälle behandeln, bei denen noch andere Größen im Geschwindigkeitsansatz vorkommen, deren Bestimmung dann ebenfalls in der angegebenen Weise erfolgt. Dabei benutzt man die Bewegungsgleichungen nicht in ihrer gewöhnlichen Form:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \dots \dots \dots (2)$$

sondern man integriert sie zuvor von  $z_0$  bis  $\delta$  (bei  $z = \delta$  verschwindet die Schubspannung  $\tau_{xz}$ ;  $\rho$  sei als konstant angenommen). Man erhält dann:

$$\int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z_0}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_0}^{\delta} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = -\frac{1}{\rho} \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{1}{\rho} \tau_{xz_0} \dots \dots (2a)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  ergibt sich:

$$\int_{z_0}^{\delta} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = w \cdot u \Big|_{z_0}^{\delta} - \int_{z_0}^{\delta} u \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(\delta) \cdot u(\delta) + \int_{z_0}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz \dots \dots (2b)$$

und

$$w(\delta) = - \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz, \dots \dots \dots (2c)$$

womit Gleichung (2a) übergeht in:

$$\int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + 2 \int_{z_0}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - u(\delta) \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{1}{\rho} \tau_{xz_0} \dots \dots (3)$$

Dies ist die sogenannte „von Kármánsche Integralbedingung“ oder der Impulsatz, bezogen auf die Schicht von  $z_0$  bis  $\delta$ .

Für die Schubspannung am Boden  $\tau_{xz_0}$  ist nach Prandtl\*) zu setzen:

$$\tau_{xz} = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \dots \dots \dots (4)$$

Der Mischungsweg  $l$  ist proportional der Höhe  $z$  zu setzen:  $l = 0,4z$ . Somit ergibt sich für  $\tau_{xz_0}$  mit dem Ansatz (1):

$$\tau_{xz_0} = \frac{0.16 \rho u^2(\delta)}{\ln^2 \frac{\delta}{z_0}} \dots \dots \dots (5)$$

---

\*) Bjerknæs-Festschrift, I. c., S. 189.

Der Druckgradient  $-\partial p/\partial x$  ist in den behandelten Fällen entweder null oder konstant gesetzt worden.

Unter diesen Voraussetzungen können wir nun die Geschwindigkeitsverteilung in ihrer Gesamtheit berechnen.

### I. Stationäre Strömungsvorgänge

Man versteht darunter solche Vorgänge, bei denen die Zeitdauer ohne Einfluß auf die Bewegung ist. Sie werden dann in der Natur zu finden sein, wenn der Wind, der durch den Druckgradienten entsteht, schon genügend lange Zeit weht, so daß alle am Anfang auftretenden Anlaufbewegungen praktisch abgeklungen sind.

1. Die Turbulenzhöhe bei Wechsel der Bodenrauigkeit. Ein horizontal wehender, stationärer Seewind mit der Geschwindigkeit  $U$  trifft auf eine gleichmäßig flache Küste auf. Die Reibung zwischen Wind und Seewasser sei vernachlässigt, so daß also das Geschwindigkeitsprofil über der See überall konstant ( $u = U$ ) ist. Sobald der Wind die Küste erreicht hat, wird die Strömung turbulent, d. h. das konstante Profil geht für  $z < \delta$  in das logarithmische:

$$u = U \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}} \dots (6)$$

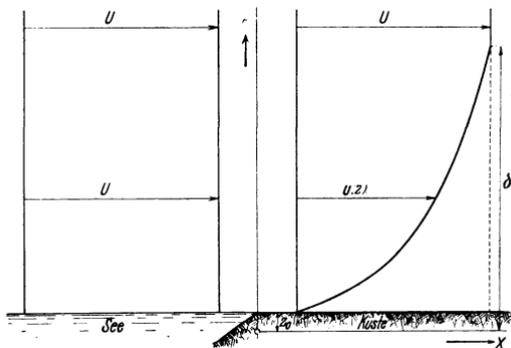


Fig. 2

über (s. Fig. 2).

Ansatz (6) wird in Gleichung (3) eingeführt, die in unserem Falle die Form:

$$2 \int_{z_0}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - U \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \tau_{xz_0} \dots (3a)$$

bzw.

$$\frac{d}{dx} \int_{z_0}^{\delta} u (U - u) dz = \frac{1}{\rho} \tau_{xz_0} \dots (7)$$

hat. Für die Schubspannung  $\tau_{xz_0}$  ist Ausdruck (5) mit  $u(\delta) = U$  zu setzen. Man erhält dann aus Gleichung (7) mit Gleichung (5) und (6):

$$\frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{x}{z_0}\right)} = \frac{0.16 \ln \frac{\delta}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{z_0}{\delta}\right) - 3 \ln \frac{\delta}{z_0} + 4 \left(1 - \frac{z_0}{\delta}\right)} \dots (8)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung geschieht auf elementare Weise (für  $\ln \delta/z_0$  wird eine Hilfsvariable eingeführt). Es ergibt sich:

$$\left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right) \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 4\right) + 4 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{\delta}{z_0}\right)^v}{v \cdot v!} = 0.16 \frac{x}{z_0} \dots \dots \dots (9)$$

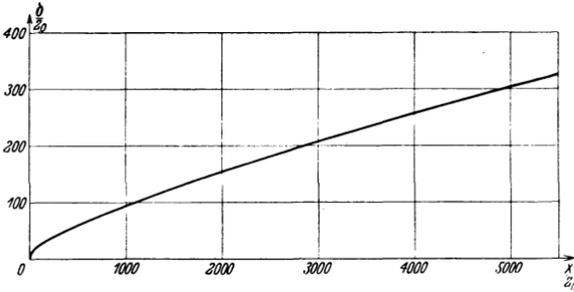


Fig. 3

[bei  $x = 0$  (Küstenanfang) ist  $\delta = z_0$  bzw.  $\delta/z_0 = 1$  gesetzt]. Fig. 3 gibt die Turbulenzhöhe als Funktion von  $x/z_0$  wieder.

Aus dem Verlauf der Turbulenzhöhe  $\frac{\delta}{z_0} \left(\frac{x}{z_0}\right)$  läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung der Reibungsaufwind

$$w(x, \delta) = - \int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = U \cdot \frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{x}{z_0}\right)} \cdot \frac{\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{\delta}}{\ln^2 \frac{\delta}{z_0}} \dots \dots (10)$$

berechnen. Seine Größe ist in der Praxis für die Ausübung des Segelfluges von Bedeutung; sie nimmt stark mit  $x/z_0$  ab (vgl. Fig. 4).

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und fragen nach dem Geschwindigkeitsprofil eines Windes, der schon lange Zeit über eine raue Fläche (Rauigkeitsmaß  $z_0$ ) hinweggeweht ist und nun auf eine rauhere Fläche (Rauigkeitshöhe  $z_1, z_1 > z_0$ ) auftrifft. Solche Windströmungen werden dort zu finden sein, wo ein Wind, von einer Wiesen- oder Heidelandschaft kommend, über einen hohen Wald oder eine Großstadt hinwegweht. Von der Grenze der beiden verschiedenen Rauigkeiten an wird sich ein neues Reibungsprofil ausbilden.

Durch das Auftreffen der Luftmasse auf eine Fläche von größerer Rauigkeit ( $z_1$ ) wird sich das an-

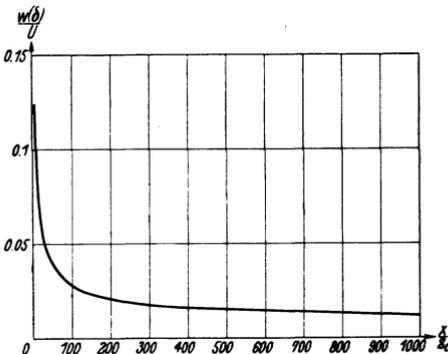


Fig. 4

kommende Profil  $u = U \frac{\ln z/z_0}{\ln \delta/z_0}$  vom Boden um den Betrag  $a(x)$  abheben. In dieses abgehobene Profil soll sich das sich neu bildende Profil so einfügen, wie

aus Fig. 5 zu ersehen ist. Die Übergangsbedingungen sind dann (s. Fig. 5) ( $\Delta$  ist die Turbulenzhöhe des neuen Profils,  $u^*$  seine Geschwindigkeit):

$$\int_a^{\Delta} u dz = \int_0^{\Delta} u^* dz \quad (\text{Kontinuität}), \dots \dots (11a)$$

$$u(\Delta) = u^*(\Delta) = u_1 \quad (\text{Anschlußpunkt}) \dots \dots (11b)$$

Für das gehobene alte Profil wäre zu setzen:

$$u(z) = U \frac{\ln \frac{z-a+z_0}{z_0}}{\ln \frac{\delta+z_0}{z_0}}, \dots \dots (12)$$

für das neu sich entwickelnde:

$$u^*(z) = U \cdot \frac{\ln \frac{\Delta-a+z_0}{z_0}}{\ln \frac{\delta+z_0}{z_0}} \cdot \frac{\ln \left( \frac{z}{z_1} + 1 \right)}{\ln \left( \frac{\Delta}{z_1} + 1 \right)} \dots \dots (13)$$

Statt dessen wollen wir die logarithmischen Profile, um die Rechnung durchführen zu können, durch Potenzprofile ersetzen:

$$u(z) = U \left( \frac{z-a}{\delta} \right)^{\beta}, \dots (12a)$$

$$u^*(z) = U \left( \frac{\Delta-a}{\delta} \right)^{\beta} \left( \frac{z}{\Delta} \right)^{\gamma} (13a)$$

Der Exponent  $\beta$  sei so gewählt, daß die beiden Profile (12) und (12a) gleichen Inhalt haben; dann muß gelten:

$$\int_a^{\delta+a} U \frac{\ln \frac{z-a+z_0}{z_0}}{\ln \frac{\delta+z_0}{z_0}} dz = \int_a^{\delta+a} U \left( \frac{z-a}{\delta} \right)^{\beta} dz, \dots \dots (14)$$

daraus:

$$\beta = \frac{\frac{\delta}{z_0} - \ln \left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right)}{\left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) \ln \left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) - \frac{\delta}{z_0}} \dots \dots (15)$$

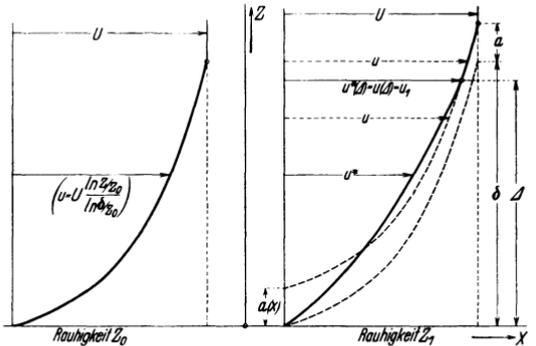


Fig. 5

Es sei  $\delta/z_0 = \text{konstant} \sim 60000$  gewählt, so daß sich  $\beta = 1/10$  ergibt. Einem beträchtlichen Rauigkeitsverhältnis  $z_1/z_0$  entsprechend wollen wir  $\gamma = 1/5$  setzen.

Die Profile (12a) und (13a) erfüllen die Übergangsbedingung (11b), während sich aus Gleichung (11a) eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Größe  $a(x)$  ergibt:

$$a(x) = \Delta(x) \frac{\gamma - \beta}{\gamma + 1} \dots \dots \dots (16)$$

Mit  $\tau_1$  für die Schubspannung bei  $z = \Delta$  nimmt der Impulssatz (3) jetzt die Form an:

$$\left. \begin{aligned} u_1 \int_0^{\Delta} \frac{\partial u^*}{\partial x} dz - 2 \int_0^{\Delta} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} dz &= \frac{1}{\rho} (\tau_0^* - \tau_1), \\ u_1 \int_a^{\Delta} \frac{\partial u}{\partial x} dz - 2 \int_a^{\Delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \frac{1}{\rho} (\tau_0 - \tau_1) \end{aligned} \right\}, \dots \dots (17)$$

aus der man durch Kombination und Berücksichtigung von Gleichung (11a) erhält:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_a^{\Delta} u^2 dz - \int_0^{\Delta} u^{*2} dz \right\} = \frac{1}{\rho} (\tau_0^* - \tau_0) \dots \dots \dots (18)$$

Für  $\tau_0^*$  wäre bei logarithmischem Profilansatz zu setzen:

$$\tau_0^* = 0.16 \rho u_1^2 \frac{1}{\ln^2 \left( \frac{\Delta}{z_1} + 1 \right)} \dots \dots \dots (19)$$

Bei gleichem Inhalt des logarithmischen Profils (13) und des Potenzprofils (13a) ergibt sich für  $1/\ln(\Delta/z_1 + 1)$ :

$$\frac{1}{\ln \left( \frac{\Delta}{z_1} + 1 \right)} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{1}{\Delta/z_1}, \dots \dots \dots (20)$$

also für  $\tau_0^*$ :

$$\tau_0^* = 0.16 \rho u_1^2 \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{1}{\Delta/z_1} \right)^2 \dots \dots \dots (19a)$$

Für die konstante Schubspannung  $\tau_0$  erhält man aus Form (5) mit  $\delta/z_0 = \text{konstant}$ :

$$\tau_0 = 0.16 \rho u_1^2 \frac{1}{\ln^2 \left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right)} \dots \dots \dots (21)$$

Mit den Gleichungen (12a), (13a), (19a) und (21) liefert Gleichung (18):

$$\frac{d\left(\frac{\Delta}{z_1}\right)}{d\left(\frac{x}{z_1}\right)} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2\gamma + 1} - \frac{2\beta(\gamma + 1)}{(2\gamma + 1)(\beta + 1)} \right\} = 0.16 \left\{ \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{1}{\Delta/z_1} \right)^2 - \frac{1}{\ln^2 \left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right)} \right\} \dots \dots (22)$$

Die Integration ergibt mit den Anfangswerten  $\Delta/z_1 = 0$  bei  $x/z_1 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\Delta/z_1}{A-B} - \frac{A}{(A-B)^2} \ln \left[ \left( \frac{\Delta}{z_1} \right)^2 (A-B) + 2A \cdot \frac{\Delta}{z_1} + 1 \right] \\ & - \frac{1 - \frac{2A^2}{A-B}}{(A-B)\sqrt{A-B-A^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{(A-B)\frac{\Delta}{z_1} + A}{\sqrt{A-B-A^2}} - \operatorname{arctg} \frac{A}{\sqrt{A-B-A^2}} \right] \end{aligned} \right\} (23)$$

$$= C \cdot \frac{x}{z_1}$$

mit

$$A = \frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad B = \frac{1}{\ln^2 \left( \frac{\delta}{z_0} + 1 \right)}, \quad C = \frac{0.16}{1 - \frac{1}{2\gamma + 1} - \frac{2\beta(\gamma + 1)}{(2\gamma + 1)(\beta + 1)}}$$

Fig. 6 gibt das Verhalten der neuen Turbulenzhöhe  $\frac{\Delta}{z_1} \left( \frac{x}{z_1} \right)$  an; sie verläuft steiler als die Turbulenzhöhe bei der kleineren Rauigkeit  $z_0$ .

2. Die Turbulenzhöhe beim Vordringen eines Kaltluftkeils. Es kommt in der Meteorologie nicht selten vor, daß durch den Gang der Bodentemperatur, des Barometers und durch das Auftreten eines sogenannten Windsprunges das Vordringen eines Kaltluftkeils beobachtet wird. Ein solcher Keil schiebt sich aus Stabilitäts-

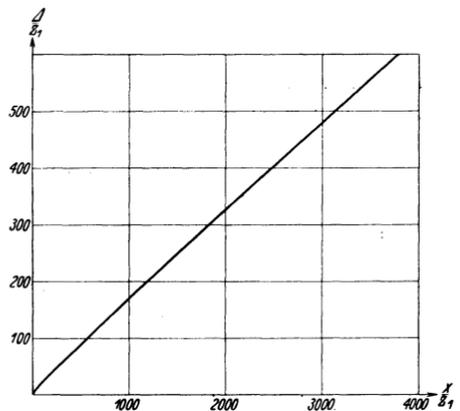


Fig. 6

gründen unter die wärmere Luftmasse, ist also stets mit dem Erdboden in Berührung. Durch die Reibung am Boden wird sich eine Turbulenzschicht entwickeln, deren Höhe wir berechnen wollen. Der Keil wird als möglichst flach angenommen, so daß der waagerechte Druckgradient in ihm vernachlässigt werden darf; er soll sich mit konstanter Geschwindigkeit über die Erdoberfläche hinweg-

bewegen. Die Aufgleitbewegung der wärmeren Luftschicht an der Frontfläche des Keiles gehe ohne Rückwirkung auf die Kaltluftmasse vor sich.

Zur Festlegung eines im Keil ruhenden Koordinatensystems wollen wir annehmen, daß die Erde sich mit konstanter Geschwindigkeit  $U$  unter dem ruhenden Keil hinwegbewegt.

Für das Geschwindigkeitsprofil gilt dann folgender Ansatz:

$$u = U \left( 1 - \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \right) \dots \dots \dots (24)$$

Darin soll  $z_1$  die Höhe bedeuten, in der die Geschwindigkeit null ist. Sie wird so bestimmt, daß die Kontinuität gewahrt bleibt, d. h. daß die nach links und

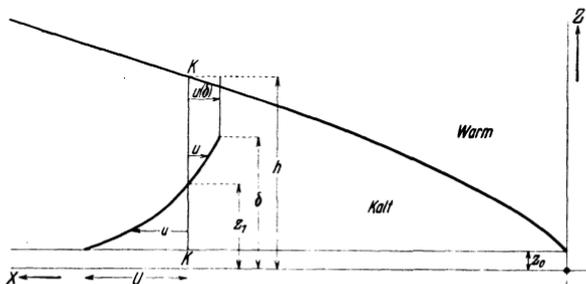


Fig. 7

rechts durch die Kontrolllinie  $KK$  durchströmende Luftmenge gleich groß ist. Dazu muß gelten:

$$\int_{z_0}^{z_1} u \, dz = - \int_{z_1}^{\delta} u \, dz - u(\delta)(h - \delta) \dots \dots \dots (25)$$

mit  $h =$  Höhe des Keiles und

$$- u(\delta) = U \left( \frac{\ln \frac{\delta}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}} - 1 \right).$$

Daraus ergibt sich für  $z_1$  die Beziehung:

$$\ln \frac{z_1}{z_0} = \frac{\frac{h}{z_0} \ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{\delta}{z_0} + 1}{\frac{h}{z_0} - 1} \dots \dots \dots (26)$$

Bei  $h \rightarrow \infty$  wird  $z_1 = \delta$ , wie es ja auch sein muß.

Zur Berechnung der Höhe  $\delta(x)$  setzen wir den Impulssatz (3) an; hier muß sich jetzt die Integration von  $z_0$  bis  $h$  erstrecken. Da der Temperatursprung bei  $z = h$  ein Gleiten der beiden Luftmassen aufeinander ohne Reibung bewirkt, und horizontale Druckunterschiede nach Voraussetzung nicht auftreten, kann

wegen  $\int_{z_0}^h u dz = 0$  der Impulssatz (3) umgeformt werden in:

$$\frac{d}{dx} \rho \int_{z_0}^h u^2 dz = \frac{0.16 \rho U^2}{\ln^2 \frac{z_1}{z_0}} \dots \dots \dots (27)$$

Die Höhe  $h$  des Kaltluftkeils wollen wir nicht von vornherein als Funktion von  $x$  festlegen, sondern wir setzen sie proportional der Turbulenzhöhe, so daß wir die Höhe des Keils erst nachträglich bestimmen können, wenn die Turbulenzhöhe bekannt ist:

$$h = c \delta, \quad c = \text{konst.}, \geq 1 \dots \dots \dots (28)$$

Setzt man nun die vorliegenden Daten in Gleichung (27) ein, so ergibt sich für die Turbulenzhöhe eine gewöhnliche Differentialgleichung, die sich nur numerisch integrieren läßt:

$$\frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{x}{z_0}\right)} = \frac{0.16 \left(c \frac{\delta}{z_0} - 1\right)^2}{B - 2 \frac{c \ln \frac{\delta}{z_0} + c - 1}{c \frac{\delta}{z_0} \ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{\delta}{z_0} + 1} \cdot A \dots \dots \dots (29)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 2c \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2 \left\{ (1-c) \ln \frac{\delta}{z_0} + \frac{1}{2c} - c - 1 \right\} + \frac{\delta}{z_0} \left\{ 3c - 2(1-c) \ln \frac{\delta}{z_0} \right\} \\ &\quad + c(2c-1) \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^3 - c \left(\frac{z_0}{\delta} - c\right) \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2 \ln^2 \frac{\delta}{z_0} - 1, \\ B &= 2c \frac{\delta}{z_0} \left\{ (2-3c) \ln \frac{\delta}{z_0} + \frac{1}{c} - 1 - 3c \right\} + c \left( 1 - 2c \frac{\delta}{z_0} \right) \ln^2 \frac{\delta}{z_0} \\ &\quad + 2(2c-1) \ln \frac{\delta}{z_0} + 3c(2c-1) \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^3 + (5c-2). \end{aligned}$$

Den Verlauf der Kurve in der Nähe von  $\delta/z_0 = 1$ ,  $x/z_0 = 0$  gibt die Anfangslösung, die man durch Entwicklung der Differentialgleichung nach kleinen Werten von  $(\delta/z_0 - 1)$  erhält:

$$\frac{\delta}{z_0} = 1 + \sqrt[3]{1.44 \frac{x}{z_0}} \dots \dots \dots (30)$$

Fig. 8 gibt die  $x$ -Abhängigkeit der Turbulenzhöhe im Keil wieder ( $c = 2$ , Integrationsschritte von 0.1 bis 100, Tangentenmethode).

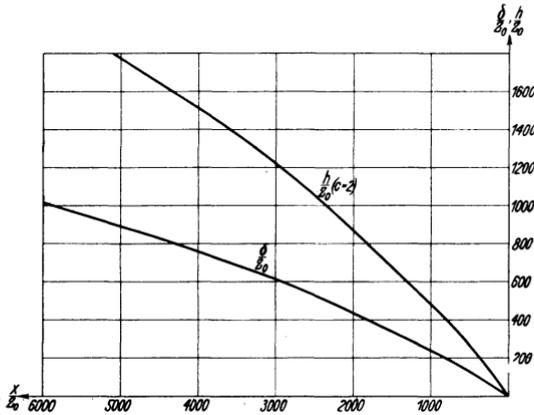


Fig. 8

In Fig. 9 ist der zeitliche Verlauf der Reibungskraft an einem Punkt des Erdbodens beim Darüberhinweggehen des Kaltluftvorstoßes wiedergegeben.

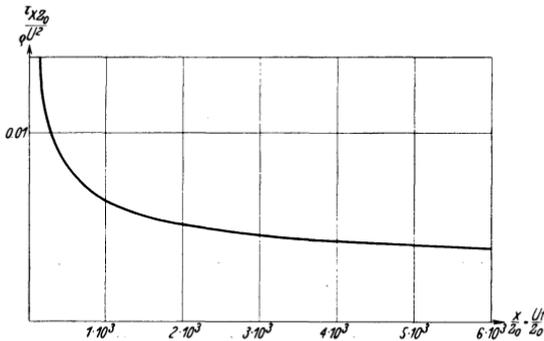


Fig. 9

Das Unendlichwerden der Reibungskraft am Anfang kommt daher, daß der Keil plötzlich mit der Geschwindigkeit  $U$  ankommt; in Wirklichkeit erfolgt der Geschwindigkeitsübergang allmählich.

## II. Nichtstationäre Strömungsvorgänge

Wir kommen nun zur Behandlung einiger nichtstationärer Strömungsvorgänge. Hier ist es unsere Aufgabe, die Zeitabhängigkeit der Bewegung neben der Ortsabhängigkeit festzulegen, wobei vor allem die Erddrehung zu berücksichtigen ist.

1. Die Richtung des Bodenwindes und die Turbulenzhöhe eines bei  $t = 0$  mit dem Erdboden in Berührung kommenden Gradientwindes. Bildet sich in einer Luftmasse ein konstanter Druckgradient  $-\partial p/\partial y$  so allmählich aus, daß keine Schwingungen nach Art von Gleichung (55), S. 186 entstehen, so hat die Strömung in einiger Höhe über dem Erdboden ( $z > \delta$ ) eine Richtung senkrecht zum Gradienten  $G$ , und ihre Geschwindigkeit ist:

$$\frac{G}{2\omega'} = \frac{1}{2\omega \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial y} = U \dots \dots \dots (31)$$

( $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit der Erde,  $\varphi$  = geographische Breite).  $U$  ist der sogenannte Gradientwind. — Eine solche Windströmung soll zunächst reibungslos über eine am Boden befindliche dünne Kaltluftschicht hinweggehen. Zur Zeit  $t = 0$  soll die Kaltluftschicht zur Seite wegfließen oder durch Erwärmung beseitigt werden. Infolge der dann auftretenden Bodenreibung ist jetzt das Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten und der Corioliskraft des Gradientwindes  $U$  gestört. Die Folge davon ist, daß sich vom Erdboden bis zur Höhe  $\delta$  eine Geschwindigkeitsverteilung einstellt, die mit einiger Annäherung durch Fig. 10 wiedergegeben werden kann (die Höhe  $z$  ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet). Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  sind hierbei nach folgendem Ansatz berechnet worden:

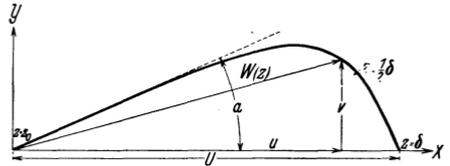


Fig. 10

$$u = U \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}}, \dots \dots \dots (32 a)$$

$$v = u \operatorname{tg} \alpha \left( 1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0} \right) \dots \dots \dots (32 b)$$

Die  $z$ -Abhängigkeit des Verhältnisses  $v/u$  (der Faktor  $1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}$ ) ist zunächst willkürlich gewählt worden, und zwar linear der bequemerer Rechnung wegen. Die daraus berechnete Geschwindigkeitsverteilung (Fig. 10) stimmt aber einigermaßen gut mit der von Ekman für Meeresströmungen\*) berechneten überein, die wir auch auf die Windströmungen übertragen können.

Den zeitlichen Verlauf der Turbulenzhöhe erhalten wir nun durch Ansetzen des Impulssatzes für die Turbulenzschicht. Die Berechnung der Ortsabhängigkeit

\*) W. Ekman: On the influence of the Earth's rotation on Ocean currents. Arkiv f. math. astr. och fysik 2, Nr. 11, 1905.

lassen wir hier wegen zu großer rechnerischer Schwierigkeiten weg. Dafür bestimmen wir aber noch die zeitliche Änderung des Winkels  $\alpha$ , den der Bodenwind mit dem Gradientwind  $U$  bildet. Unter Berücksichtigung der Erdrotation erhält man den Impulssatz in analoger Weise wie die Gleichung (3) durch Integration der Bewegungsgleichungen in der Turbulenzschicht ( $\omega' = \omega \sin \varphi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + 2\omega' v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - 2\omega' u + G \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3\beta)$$

von  $z_0$  bis  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho \int_{z_0}^{\delta} (U - u) dz + 2\omega' \rho \int_{z_0}^{\delta} v dz &= \tau_{xz_0} \\ - \frac{d}{dt} \rho \int_{z_0}^{\delta} v dz + 2\omega' \rho \int_{z_0}^{\delta} (U - u) dz &= \tau_{yz_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33a)$$

Für die Schubspannung am Boden  $\tau_{z_0}$  in Richtung des Bodenwindes gilt allgemein die Beziehung:

$$\tau_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{0.16 \rho (u^2 + v^2)}{\ln^2 \frac{z}{z_0}}, \dots \dots \dots (34)$$

die durch die Gleichung (32) übergeht in:

$$\tau_{z_0} = \frac{0.16 \rho U^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\ln^2 \frac{\delta}{z_0}} \dots \dots \dots (34a)$$

Die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Schubspannung lautet dann:

$$\tau_{xz_0} = \tau_{z_0} \cdot \cos \alpha, \quad \tau_{yz_0} = \tau_{z_0} \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (34b)$$

Bei der Auswertung der beiden Gleichungen (33a) erhalten wir zwei simultane Differentialgleichungen für die Turbulenzhöhe  $\delta/z_0$  und den Ablenkungswinkel  $\alpha$  als Funktionen der Zeit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} &= \frac{0.92 \left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right) \frac{1}{\cos \alpha} - \Omega \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{\delta}{z_0} \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2 \left(2 \ln \frac{\delta}{z_0} - 3\right) - \left(1 - 4 \frac{\delta}{z_0}\right) \right\}}{2 \left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right) \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{\delta}\right)} \\ 2 \sin 2 \alpha f\left(\frac{\delta}{z_0}\right) \frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} + 0.64 \left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right)^3 \sin \alpha - 8 \Omega \cos^2 \alpha g\left(\frac{\delta}{z_0}\right) \\ \frac{d\alpha}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} &= \frac{\left(1 - \frac{z_0}{\delta}\right) \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2 \left(2 \ln \frac{\delta}{z_0} - 3\right) - \left(1 - 4 \frac{\delta}{z_0}\right) \right\} \ln \frac{\delta}{z_0}}{\dots} \end{aligned} \right\} (35)$$

Dabei bedeutet:

$$\Omega = \frac{z_0 \cdot \omega'}{U},$$

$$f\left(\frac{\delta}{z_0}\right) = \left(1 - \ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{z_0}{\delta}\right) \left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right)^2 + \left(1 + \ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{z_0}{\delta}\right) \cdot A,$$

$$A = \frac{\left(\frac{\delta}{z_0}\right)^2}{2} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{\delta}{z_0} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1\right) - 1,$$

$$g\left(\frac{\delta}{z_0}\right) = \left(\frac{\delta}{z_0} - 1 - \ln \frac{\delta}{z_0}\right) \left(\frac{\delta}{z_0} - 1\right)^2 \ln \frac{\delta}{z_0}.$$

Die Anfangslösungen, die man zur numerischen Integration der beiden Gleichungen (35) braucht, erhält man wiederum durch Entwicklung nach kleinen Größen von  $(\delta/z_0 - 1)$  und  $\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{z_0} &= 1 + \sqrt[3]{0.96 \frac{U t}{z_0}} \\ \alpha &= 1.057 \Omega \frac{U t}{z_0} = 1.057 \omega t \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

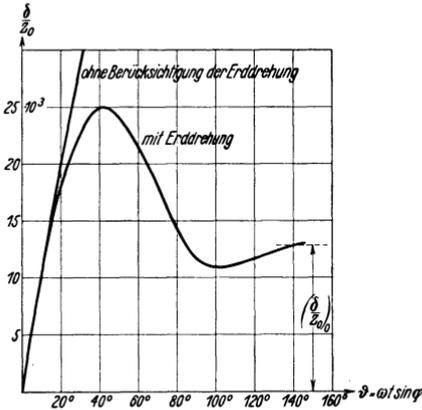


Fig. 11 a

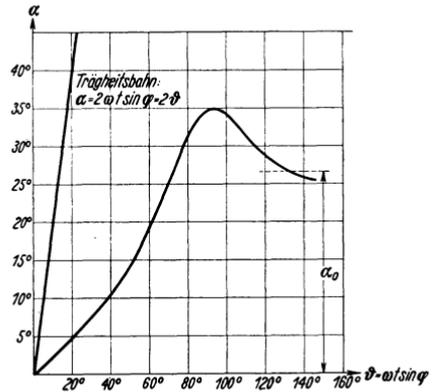


Fig. 11 b

Zur Bestimmung der Größenordnungen von  $\Omega$  setzen wir folgende Zahlenwerte ein:

$$\Omega = \frac{z_0 \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{U} = \frac{0.1 \cdot \frac{2 \pi}{86164} \cdot \frac{1}{2}}{10} = 3.65 \cdot 10^{-7} \dots \dots (37)$$

Das Resultat der numerischen Integration der Gleichung (35) gibt Fig. 11 wieder (mit  $\Omega = 3.65 \cdot 10^{-7}$ ; Integrationsschritte von 5 bis 30000). In Fig. 11 ist anstatt

$Ut/z_0$  der „Pendelwinkel“  $\vartheta$  (Winkeldrehung des Foucaultschen Pendels) in Graden aufgetragen:

$$\vartheta = \omega t \sin \varphi = \frac{\Omega Ut}{z_0} \dots \dots \dots (38)$$

$\alpha$  ändert sich bei kleinen Zeiten nur langsam mit  $t$ . Deshalb verläuft die Turbulenzhöhe  $\delta/z_0$  in den Anfangszeiten wie die Größe  $h/z_0$  bei Prandtl\*) und weicht erst später von dieser ab (wird nicht unendlich wie diese).

Wir wollen weiter untersuchen, ob die Turbulenzhöhe  $\delta/z_0$  und der Ablenkungswinkel  $\alpha$  im Laufe der Zeit einem Grenzwert zustreben. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} = 0, \quad \frac{d\alpha}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} = 0 \dots \dots \dots (39)$$

Die Gleichung (35) liefern damit zwei Bestimmungsgleichungen für die Grenzwerte  $(\delta/z_0)_0$  und  $\alpha_0$ :

$$0.64 \cdot 0.32 \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 1 \right\} = \frac{8 \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 1 - \ln \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \right\} \cdot F \left( \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \right)}{\left(\frac{\delta}{z_0}_0\right)^2 \left( 2 \ln \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) + 4 \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 4 \right)} \dots (40 a)$$

mit

$$F \left( \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \right) = \Omega^2 \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right)^2 \ln^2 \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \left\{ 2 \ln \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) + 4 \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 4 \right\} - \left\{ 0.32 \left[ \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 1 \right] \right\}^2,$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{0.32 \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 1 \right\}}{\Omega \ln \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \cdot \left\{ \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right)^2 \left( 2 \ln \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) - 3 \right) - \left( 1 - 4 \left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) \right) \right\}} \dots (40 b)$$

Man erhält für die Grenzwerte, die vom Parameter  $\Omega$  abhängen:

bei  $\Omega = 3.65 \cdot 10^{-7}$ :  $\left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) = 12978.8$ ;  $\alpha_0 = 26^\circ 35' 31''$ ,

bei  $\Omega = 3.65 \cdot 10^{-8}$ :  $\left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) = 94080.0$ ;  $\alpha_0 = 24^\circ 8' 52''$ .

Prandtl hat in der Bjerknes-Festschrift für die Größe  $\left(\frac{\delta}{z_0}_0\right) = \frac{h}{z_0}$  eine Abschätzungsformel gegeben\*\*):

$$\frac{h}{z_0} \ln^2 \frac{h}{z_0} = 0,4 \cdot \frac{1}{\Omega} \dots \dots \dots (41)$$

\*) Bjerknes-Festschrift, l. c., S. 195.

\*\*\*) l. c. S. 195.

Schreibt man die Formel in der Gestalt:

$$\frac{h}{z_0} \Omega \ln^2 \frac{h}{z_0} = c = 0.4, \dots \dots \dots (41 a)$$

so ergibt sich bei den oben angegebenen Werten von  $\Omega$  für die Konstante  $c$  nach unserer Rechnung:

$$\begin{aligned} \Omega = 3.65 \cdot 10^{-7} & & c = 0.425, \\ \Omega = 3.65 \cdot 10^{-8} & & c = 0.45. \end{aligned}$$

Zum Vergleich von  $\alpha_0$  mit experimentell gefundenen Werten dient folgende Tabelle von G. I. Taylor\*):

Windstärke $U$ (in 600 m Höhe):	$U < 4.5$ m/sec	$U > 4.5$ m/sec	$U > 13$ m/sec
$\alpha_0$ (beobachtet von Dobson):	13°	21.5°	20°
$\alpha_0$ (berechnet von Taylor):	14°	18°	20°

Taylor erhält bei wachsendem  $U$  ein Ansteigen des Winkels  $\alpha_0$ , während bei uns  $\alpha_0$  mit  $U$  abnimmt, was ja Dobson auch einmal gemessen hat (21.5° → 20°). Dobson hat seine Werte aus Messungen über der See gewonnen, wo also  $z_0$  sehr gering ist. Unser Winkel  $\alpha_0$  würde in diesem Falle in der Nähe von 22° liegen, da  $\Omega$  wegen der geringen Rauigkeitshöhe  $z_0$  noch kleiner als die oben angegebenen Werte sein müßte. Tollmien\*\*) erhielt (allerdings bei etwas anderer Problemstellung) einen Winkel von 12.5°.

Der Verlauf von  $\delta/z_0$  und  $\alpha$  in der Nähe von  $(\delta/z_0)_0$  und  $\alpha_0$  läßt sich leicht feststellen. Dazu setzt man:

$$\frac{\delta}{z_0} = \left(\frac{\delta}{z_0}\right)_0 + \xi, \quad \alpha = \alpha_0 + \eta, \dots \dots \dots (42)$$

wobei  $\xi$  und  $\eta$  so klein sein sollen, daß alle Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Die Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} = \dot{\xi} &= m \left(\left(\frac{\delta}{z_0}\right)_0, \alpha_0\right) \cdot \xi + n \left(\left(\frac{\delta}{z_0}\right)_0, \alpha_0\right) \cdot \eta \\ \frac{d\eta}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} = \dot{\eta} &= p \left(\left(\frac{\delta}{z_0}\right)_0, \alpha_0\right) \cdot \xi + q \left(\left(\frac{\delta}{z_0}\right)_0, \alpha_0\right) \cdot \eta \end{aligned} \right\}, \dots \dots (43)$$

woraus man für  $\xi$  bzw.  $\eta$  folgende Differentialgleichung erhält:

$$\ddot{\xi} - (m + q) \dot{\xi} + (mq - np) \xi = 0 \dots \dots \dots (43a)$$

\*) G. I. Taylor: Phil. Trans. R. S. London, Ser. A, 215 (1915).

\*\*\*) L. Prandtl u. W. Tollmien: Zeitschr. f. Geophysik 1, 47ff. (1924/25).

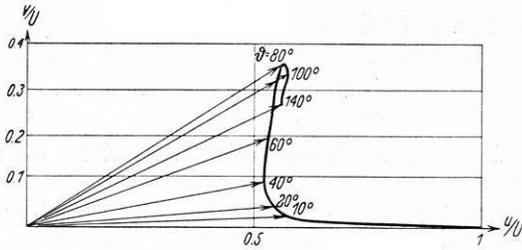


Fig. 12 a  
Zeitlicher Verlauf des Windvektors in 20 m Höhe

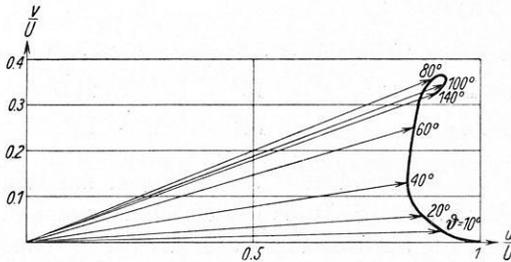


Fig. 12 b  
Zeitlicher Verlauf des Windvektors in 500 m Höhe

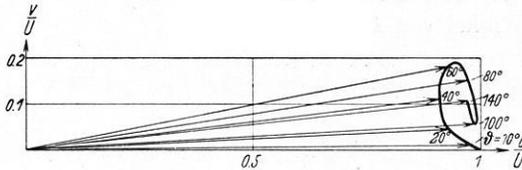


Fig. 12 c  
Zeitlicher Verlauf des Windvektors in 1000 m Höhe

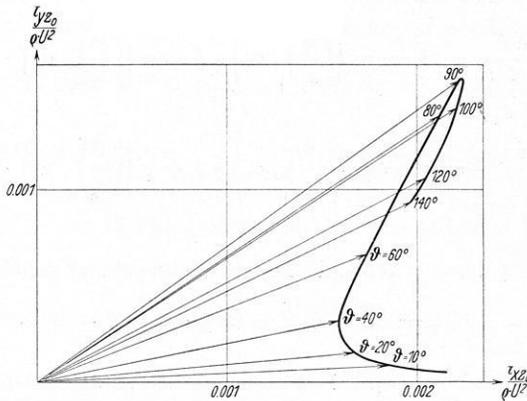


Fig. 13. Zeitlicher Verlauf der Reibungskraft

Mit dem Lösungsansatz  $\xi = e^{\lambda \cdot \frac{U t}{z_0}}$  ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{z_0} &= \left( \frac{\delta}{z_0} \right)_0 + A e^{\Re(\lambda) \frac{U t}{z_0}} \cos \left( J(\lambda) \frac{U t}{z_0} + \psi_1 \right) \\ \alpha &= \alpha_0 + B e^{\Re(\lambda) \frac{U t}{z_0}} \cos \left( J(\lambda) \frac{U t}{z_0} + \psi_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda &= -6.78 \cdot 10^{-7} \pm i \cdot 9.7 \cdot 10^{-7} \quad \text{bei } \Omega = 3.65 \cdot 10^{-7}, \\ \lambda &= -4.98 \cdot 10^{-8} \pm i \cdot 13.5 \cdot 10^{-8} \quad \text{bei } \Omega = 3.65 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Der Einschwingungsvorgang in die Grenzwerte  $\alpha_0$  und  $(\delta/z_0)_0$  hängt, abgesehen vom Dämpfungsfaktor  $e^{\Re(\lambda) \frac{U t}{z_0}}$ , nur wenig vom Verhältnis  $U/z_0$  bzw. von  $\Omega$  ab. Um dies einzusehen, führen wir den Pendelwinkel  $\vartheta$  in Gleichung (44) ein. Für das Argument der trigonometrischen Funktionen ergibt sich jeweils:

$$\begin{aligned} 2.663 \vartheta + \psi_1 & \quad \text{bei } \Omega = 3.65 \cdot 10^{-7}, \\ 3.697 \vartheta + \psi_1 & \quad \text{bei } \Omega = 3.65 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Auch der Windvektor  $W(t)$  in einer bestimmten Höhe sowie die Reibungskraft am Erdboden schwingt im Laufe der Zeit in den stationären Wert ein. Man bestimmt dieses Verhalten mit Hilfe der Gleichung (32) bzw. (34a) und der Kurven in Fig. 11; das Resultat zeigen die Fig. 12 und 13.

2. Die Turbulenzhöhe und die Richtung des Bodenwindes beim Vordringen eines Kaltluftkeils aus der Ruhe heraus. In I, 2 hatten wir die Turbulenzhöhe eines auf Grund von zuvor erlangter kinetischer Energie sich stationär bewegenden Kaltluftkeils berechnet. Jetzt wollen wir annehmen, daß ein zunächst in Ruhe befindlicher Kaltluftkeil durch seinen Dichteunterschied gegenüber der darüberlagernden Warmluft in Bewegung gerät. In der Warmluft sei der Druckgradient null; dann herrscht im Kaltluftkeil ein horizontales Druckgefälle nach der warmen Luftmasse hin vom Betrag\*):

$$-\frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{tg} \Theta = G, \dots \dots \dots (45)$$

wobei unter  $\varrho_1$  ( $\varrho_2$ ) die mittlere Dichte des Keils (der Warmluft) zu verstehen ist und unter  $\Theta$  der Neigungswinkel der Diskontinuitätsfläche gegen die Horizontale.

Diesmal sei angenommen, daß der Keil bei  $t = 0$  eine feste, ebene Begrenzungsfläche hat. Da wir in der folgenden Rechnung die Kontinuität nicht berücksichtigen, wird sich die Form des Keils im Laufe der Zeit ändern, vor allem an der Spitze. Davon sei in der Rechnung abgesehen.

\*) Siehe V. Bjerknes: Physikalische Hydrodynamik, S. 479. Springer 1933.

Fall A: Ohne Erdrotation. Der konstante Druckgradient falle in die  $y$ -Richtung:  $-\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial y} = G$ . Ohne Bodenreibung würde sich im Kaltluftkeil das Geschwindigkeitsprofil

$$v = G \cdot t \quad (v = 0 \text{ für } t = 0) \dots \dots \dots (46)$$

entwickeln, welches in jeder Höhe über dem Erdboden dasselbe ist. Infolge der Bodenreibung wird sich jedoch das Geschwindigkeitsprofil bis zur Turbulenzhöhe  $\delta$  ändern:

$$v = G \cdot t \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}}; \dots \dots \dots (47)$$

bei  $z = \delta$  geht das Profil in das reibungslose über. Die zeitliche und örtliche Änderung der Turbulenzhöhe wollen wir bestimmen.

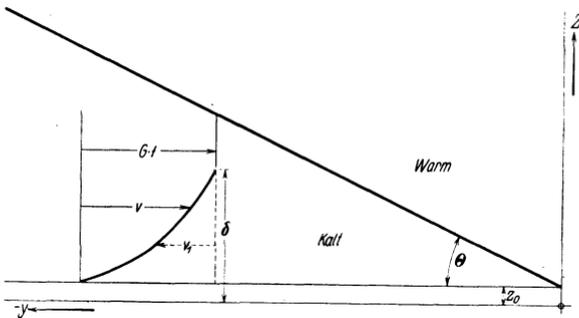


Fig. 14

Bei Festlegung eines relativ zum Keil ruhenden Koordinatensystems nimmt der Impulssatz (3) durch einfache Transformation die Form:

$$\int_{z_0}^{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial t} dz + 2 \int_{z_0}^{\delta} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} dz = \frac{0.16 G^2 t^2}{\ln^2 \frac{\delta}{z_0}} \dots \dots \dots (48)$$

an, wobei für  $v_1$  zu setzen ist (s. Fig. 14):

$$v_1 = G t \left( 1 - \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}} \right) \dots \dots \dots (47a)$$

Es ergibt sich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für den zeitlichen und örtlichen Verlauf von  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{\delta}{z_0} \right)}{\partial \left( \sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t \right)} \cdot \sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t \ln \frac{\delta}{z_0} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{\delta} \right) \\ + \frac{\partial \left( \frac{\delta}{z_0} \right)}{\partial \left( \frac{y}{z_0} \right)} \cdot 2 \frac{G}{z_0} t^2 \left( \ln \frac{\delta}{z_0} + 2 \frac{z_0}{\delta} + \frac{\ln \frac{\delta}{z_0}}{\frac{\delta}{z_0}} - 2 \right) \\ = \ln \frac{\delta}{z_0} \left( 0.16 \frac{G}{z_0} t^2 + \ln^2 \frac{\delta}{z_0} - \left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) \ln \frac{\delta}{z_0} \right) \end{aligned} \right\} (49)$$

mit den Anfangsbedingungen:

1.  $\frac{\delta}{z_0} = 1$  für alle  $y = y_1 \geq 0$  zur Zeit  $t = 0$ ,
2.  $\frac{\delta}{z_0} = 1$  für  $y = 0$  für alle  $t = t_1 \geq 0$ .

Die Lösung erfolgt nach der Charakteristikentheorie durch numerische Integration des äquivalenten Systems totaler Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left( \sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t \right)}{d \left( \frac{y}{z_0} \right)} &= \frac{\ln \frac{\delta}{z_0} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{\delta} \right)}{2 \sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t \left( \ln \frac{\delta}{z_0} + \frac{2 z_0}{\delta} + \frac{\ln \frac{\delta}{z_0}}{\frac{\delta}{z_0}} - 2 \right)} \\ \frac{d \left( \frac{\delta}{z_0} \right)}{d \left( \frac{y}{z_0} \right)} &= \frac{\ln \frac{\delta}{z_0} \left( 0.16 \frac{G}{z_0} t^2 + \ln^2 \frac{\delta}{z_0} - \left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) \ln \frac{\delta}{z_0} \right)}{2 \frac{G}{z_0} t^2 \left( \ln \frac{\delta}{z_0} + \frac{2 z_0}{\delta} + \frac{\ln \frac{\delta}{z_0}}{\frac{\delta}{z_0}} - 2 \right)} \end{aligned} \right\} \dots (49a)$$

Die zugehörigen Anfangslösungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t = \tau = \sqrt[3]{3 \left( \frac{y}{z_0} - C_1 \right)} \\ \frac{\delta}{z_0} = 1 + \sqrt[3]{1.44 \left( \frac{y}{z_0} - C_2 \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Auf dem ersten Rand [Anfangsbedingung (1)] gilt für die Konstanten die Beziehung

$$C_1 = C_2 = \frac{y_1}{z_0},$$

auf dem zweiten Rand dagegen

$$C_1 = -\frac{1}{3} \frac{G}{z_0} t_1^2, \quad C_2 = 0.$$

Die charakteristischen Kurven sind, soweit nötig, in Fig. 15a und b wiedergegeben (numerische Integration mit Integrationsschritten von 0.05 bis 1000 in  $y/z_0$ ). Da die Konstante  $C_2$  bei der zweiten Anfangsbedingung stets null ist, stellt die Kurve *a* in Fig. 15b den örtlichen und zeitlichen Verlauf der Turbulenzhöhe im Keil dar. Die Kurve ist so zu lesen, daß sie vom Nullpunkt bis zu den Punkten  $\tau = 100, 200$  usw. den örtlichen Verlauf der Turbulenzhöhe zu diesen

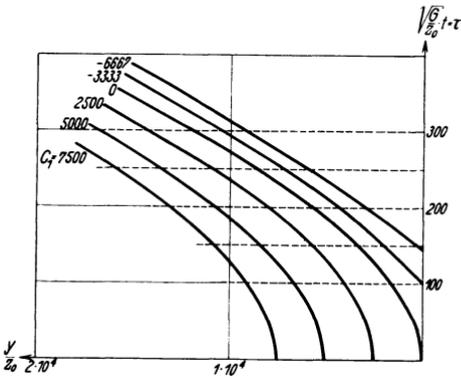


Fig. 15 a

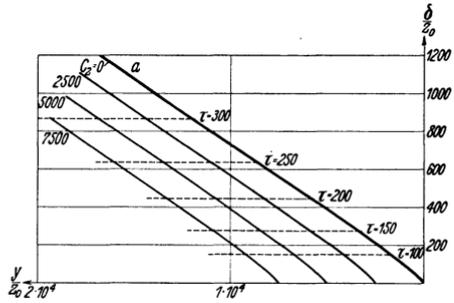


Fig. 15 b

Zeiten wiedergibt. Für größere  $y/z_0$ , als dem jeweiligen Endpunkt entspricht, ist die Turbulenzhöhe gleich der des Endpunktes, vgl. die gestrichelten Linien in Fig. 15b.

Um zu zeigen, wie bei einem praktischen Beispiel die Kurve zu verwenden ist, seien einige Zahlenwerte eingesetzt:

$z_0 = 1$  m, Endgeschwindigkeit nach 2 Stunden  $v = Gt = 5$  m/sec. Daraus folgt:

$$\frac{G}{z_0} \cdot t^2 = 5 \cdot t = 5 \cdot 7200$$

$$\sqrt{\frac{G}{z_0}} \cdot t = \tau = \sqrt{10 \cdot 3600} \sim 200,$$

die Kurve *a* ist also bis  $y/z_0 \sim 6000$  zu verwenden. Nach 2 Stunden befindet sich der Keil

$$y = \frac{1}{2} G t^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot t = 18000 \text{ m}$$

von seinem Ort entfernt, den er zur Zeit  $t = 0$  innehatte.  $\delta$  steigt auf den ersten 5800 m, von der Keilspitze aus gerechnet, von 0 auf 445 m an und ist dann für die weiteren Werte von  $y$  konstant.

*Fall B: Mit Erdrotation.* Hier müssen wir uns mit der Bestimmung der zeitlichen Abhängigkeit von  $\delta/z_0$  in dem Gebiet, das von Anfang an von der Kaltluftzunge bedeckt war, begnügen. Dafür bestimmen wir außerdem den Winkel  $\alpha$ , den der Bodenwind mit dem Wind in der Höhe bildet (s. Fig. 17).

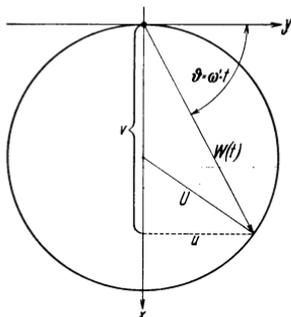


Fig. 16

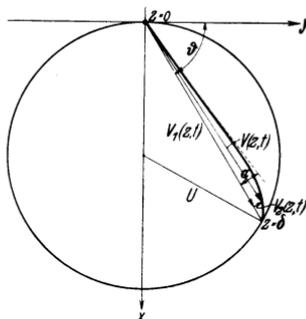


Fig. 17

Jetzt müssen die Bewegungsgleichungen durch die Corioliskraft erweitert werden. Ohne Reibungseinfluß lauten die Bewegungsgleichungen ( $\omega' = \omega \sin \varphi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2\omega'v \\ \frac{dv}{dt} &= G - 2\omega'u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Durch Differentiation und Kombination erhält man für  $v$  die Differentialgleichung

$$\ddot{v} + 4\omega'^2 v = 0, \dots \dots \dots (51a)$$

deren Lösung bei der Anfangsbedingung  $u = v = 0$  für  $t = 0$  die Form hat:

$$v = \frac{G}{2\omega'} (1 - \cos 2\omega' t), \dots \dots \dots (52a)$$

daraus:

$$u = \frac{G}{2\omega'} \sin 2\omega' t \dots \dots \dots (52b)$$

Mit  $G/2\omega' = U$  [s. Gleichung (31)] erhält man durch Kombination:

$$(U - u)^2 + v^2 = U^2 \dots \dots \dots (53)$$

Auf Grund dieser Relation läßt sich

$$W(t) = \sqrt{u^2 + v^2} = 2U \sin 2\omega' t, \dots (54)$$

wie in Fig. 16 angegeben ist, konstruieren. Bei  $\vartheta = 90^\circ$  erreicht  $W(t)$  sein Maximum  $= 2U$ .

Infolge der Bodenreibung wird der Windvektor  $V(z, t)$  innerhalb der Turbulenzschicht hinter dem Wind über der Schicht  $[W(t)]$  zurückbleiben (s. Fig. 17). Für die Geschwindigkeitsverteilung zur Zeit  $t = 0$  wollen wir setzen [analog zu dem Ansatz (32)]:

$$\left. \begin{aligned} V_1(z, t) &= 2U \sin \omega' t \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{\delta}{z_0}} \\ V_2(z, t) &= V_1(z, t) \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(1 - \frac{z - z_0}{\delta - z_0}\right) \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

Im Koordinatensystem  $(x, y)$  lauten die Komponenten des Vektors  $V(z, t)$ :

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= V_1(z, t) \sin \omega' t - V_2(z, t) \cos \omega' t \\ v(z, t) &= V_1(z, t) \cos \omega' t + V_2(z, t) \sin \omega' t \end{aligned} \right\} \dots (55a)$$

Da wir hier nur den zeitlichen Verlauf von  $\delta/z_0$  und  $\alpha$  bestimmen wollen, brauchen wir das Koordinatensystem nicht im Keil festzulegen. So liefert der Impulssatz (93a) mit Gleichung (55a) und

$$\left. \begin{aligned} \tau_{z_0} &= \frac{0,64 \rho U^2 \sin^2 \omega' t (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\ln^2 \frac{\delta}{z_0}}, & \tau_{xz_0} &= \tau_{z_0} \sin(\omega' t - \alpha) \\ & & \tau_{yz_0} &= \tau_{z_0} \cos(\omega' t - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

[s. Gleichung (34)] zwei simultane Differentialgleichungen für  $\delta/z_0$  und  $\alpha$  als Funktionen der Zeit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} &= \Omega \frac{\frac{\delta}{z_0} \ln \frac{\delta}{z_0}}{\sin \Omega \frac{Ut}{z_0}} \cdot C + \frac{0,92 \frac{\delta}{z_0} \sin \omega' t}{A \cdot \cos \alpha} \\ \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} &= \frac{1}{D} \left\{ \Omega \left( \ln \frac{\delta}{z_0} + 1 - \frac{z_0}{\delta} \right) + \frac{0,92 \sin^2 \omega' t \cos(\omega' t - \alpha)}{\cos \alpha \ln \frac{\delta}{z_0}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin \omega' t}{\cos \alpha} \cdot E \cdot \frac{d\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}{d\left(\frac{Ut}{z_0}\right)} \right\} \dots (57) \end{aligned} \right\}$$

Dabei bedeutet:

$$\Omega = \frac{z_0 \cdot \omega'}{U}, \quad A = \frac{\delta}{z_0} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + 1,$$

$$B = \frac{1}{4} \left( \frac{\delta}{z_0} \right)^2 \left( 2 \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) - \frac{\delta}{z_0} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) - \frac{3}{4},$$

$$C = \operatorname{tg} \alpha \sin \omega' t (1 - 4 \sin^2 \omega' t) + \cos \omega' t$$

$$+ \sin \omega' t \operatorname{tg} \alpha \frac{B}{A \left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right)} - \frac{\left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) \cos \omega' t \ln \frac{\delta}{z_0}}{A},$$

$$D = \left( \frac{B}{\frac{\delta}{z_0} - 1} - A \right) \sin^2 \omega' t,$$

$$E = \frac{\cos(\omega' t - \alpha)}{\frac{\delta}{z_0} \ln \frac{\delta}{z_0}} \cdot A - \sin \omega' t \sin \alpha \left[ \frac{1}{\left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right)^2} + \frac{1}{\frac{\delta}{z_0} \left( \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) \ln \frac{\delta}{z_0}} \right] \cdot B.$$

Die Anfangslösungen erhält man in analoger Weise wie Gleichung (36):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{z_0} &= 1 + \sqrt[3]{0.384 \Omega \left( \frac{Ut}{z_0} \right)^2} \\ \alpha &= 0.248 \Omega \frac{Ut}{z_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Aus der Fig. 18 (Integrations Schritte in  $Ut/z_0$  von 50 allmählich wachsend bis 200000) und der Rechnung ergibt sich, daß  $\delta/z_0$  bei  $\vartheta = 180^\circ$  unendlich groß wird. Das liegt an dem Geschwindigkeitsansatz (55), demzufolge die Schubspannung  $\tau_{z_0}$  bei  $\vartheta = 180^\circ$  null

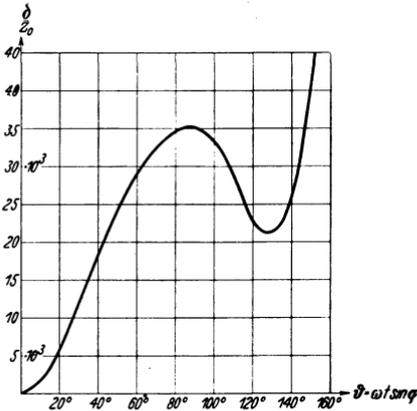


Fig. 18 a

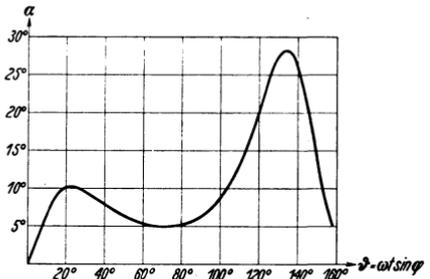


Fig. 18 b

wird [s. Gleichung (56)]. Zu einer weiteren Berechnung über  $\vartheta = 180^\circ$  hinaus müßte der Geschwindigkeitsansatz in geeigneter Weise erweitert werden.