

Werk

Jahr: 1935

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:11

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0011

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0011

LOG Id: LOG_0054

LOG Titel: Einige Zahlen über Normalschwere und Abplattung

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Einige Zahlen über Normalschwere und Abplattung

Von **Karl Jung**, Potsdam

Aus den in Freiluftwerte umgerechneten Werten des Ackerlischen Schwereverzeichnisses erhält man durch Ausgleichung der Seitenmittel die Abplattung 1:293.

I. Ausgehend von den nach Prey reduzierten Schwerewerten des Ackerlischen Verzeichnisses¹⁾ hat kürzlich K. Ledersteger eine Schwereformel berechnet und aus dieser nach dem einfachen Clairautschen Theorem die Abplattung 1:296 gefunden²⁾. Diese Zahl stimmt mit den als zuverlässig angesehenen, aus Freiluftwerten berechneten Abplattungen gut überein.

Aus potentialtheoretischen Gründen ist es jedoch nicht zulässig, die nach Prey reduzierte Schwerkraft ohne weiteres in das Clairautsche Theorem einzusetzen, da das Clairautsche Theorem eine Verlegung der äußeren Massen in das Innere des Geoids verlangt. Zur Berücksichtigung der bei der Reduktion nach Prey unverändert außerhalb des Geoids lieengebliebenen Massen kann man eine Ergänzung des Clairautschen Theorems einführen³⁾. Sie führt aber nur auf brauchbare Ergebnisse, wenn die der Ausgleichung unterworfenen Schwerestationen hinreichend gleichmäßig über die ganze Erde verteilt sind.

Tabelle 1

Nr.	γ	Nr.	γ	Nr.	γ	Nr.	γ
1	0.008 ₇	20	0.075 ₆	39	0.213 ₇	58	0.052 ₄
2	13 ₇	21	76 ₃	40	126 ₆	59	82 ₃
3	18 ₄	22	73 ₃	41	216 ₈	60	179 ₉
4	14 ₂	23	65 ₀	42	60 ₆	61	160 ₄
5	11 ₉	24	87 ₅	43	30 ₇	62	77 ₉
6	20 ₅	25	55 ₅	44	74 ₇	63	89 ₁
7	10 ₅	26	62 ₉	45	58 ₄	64	25 ₃
8	6 ₅	27	80 ₃	46	52 ₄	65	71 ₆
9	10 ₀	28	91 ₉	47	76 ₆	66	14 ₅
10	8 ₃	29	85 ₆	48	166 ₉	67	61 ₈
11	11 ₁	30	90 ₄	49	76 ₈	68	86 ₀
12	17 ₀	31	82 ₉	50	99 ₇	69	174 ₉
13	36 ₇	32	120 ₁	51	93 ₆	70	24 ₄
14	39 ₉	33	170 ₈	52	115 ₆	71	22 ₀
15	39 ₁	34	123 ₉	53	159 ₅	72	33 ₉
16	76 ₇	35	128 ₉	54	110 ₈	73	1 ₇
17	76 ₄	36	151 ₃	55	153 ₄	74	146 ₃
18	73 ₇	37	149 ₃	56	83 ₇	75	46 ₉
19	0.078 ₆	38	0.230 ₂	57	0.080 ₄	76	0.024 ₂

Dies ist vorläufig noch nicht der Fall. Daher ist es besser, die Schwerewerte von vornherein so zu reduzieren, daß der Reduktion eine Verlagerung der äußeren Massen ins Innere entspricht, wobei die Niveaufläche sich möglichst wenig verschieben soll. Am besten ist die Reduktion von Rudzki, bei der die Niveau-

Tabelle 2

	G_0		$\gamma_{\text{äqu}}$	
	Potsdamer System	Wiener System	Potsdamer System	Wiener System
Ledersteger, nach Prey reduziert	*	979.7124	*	977.9898
β_4 durch Ausgleichung, Freiluftwerte	979.7843 ± 35	979.8003 ± 35	978.0810 ± 79	978.0970 ± 79
$\beta_4 = -0.000\,007\,0$ gesetzt, Freiluftwerte	979.7827 ± 27	979.7987 ± 27	978.0771 ± 58	978.0931 ± 58
$\beta_4 = 0$ gesetzt, Freiluftwerte	979.7813 ± 28	979.7973 ± 28	978.0738 ± 59	978.0898 ± 59
($\beta_4 = 0$ gesetzt, nach Prey reduziert)	(979.6964) ± 87	(979.7124) ± 87	(977.9740) ± 186	(977.9900) ± 186
Internationale Formel	979.770	*	978.049	*

	G_2	b_2		β_2	
		Potsdamer System	Wiener System	Potsdamer System	Wiener System
Ledersteger, nach Prey reduziert	3.4451	*	0.005 284	*	0.005 284
β_4 durch Ausgleichung, Freiluftwerte	3.4169 ± 78	0.005 1880 ± 380	0.005 1879 ± 380	0 005 2489 ± 145	0.005 2488 ± 145
$\beta_4 = -0.000\,007\,0$ gesetzt, Freiluftwerte	3.4159 ± 76	0.005 2147 ± 117	0.005 2146 ± 117	0.005 2427 ± 117	0.005 2426 ± 117
$\beta_4 = 0$ gesetzt, Freiluftwerte	3.4151 ± 77	0.005 2375 ± 118	0.005 2374 ± 118	0.005 2375 ± 118	0.005 2374 ± 118
($\beta_4 = 0$ gesetzt, nach Prey reduziert)	(3.4449) ± 244	(0.005 2837) ± 375	(0.005 2836) ± 375	(0.005 2837) ± 375	(0.005 2836) ± 375
Internationale Formel	3.4460	0.005 2648	*	0.005 2884	*

	G_4	b_4	β_4	Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit	1/a
Ledersteger, nach Prey reduziert	*	*	*	*	296
β_4 durch Ausgleichung, Freiluftwerte	0.0136 ± 100	0.000 0610 ± 446	-0.000 0152 ± 111	± 0.0198	293.3 ± 1.1
$\beta_4 = -0.000\,007\,0$ gesetzt, Freiluftwerte	0.0063	0.000 0286	-0.000 0070	± 0.0197	293.0 ± 1.0
$\beta_4 = 0$ gesetzt, Freiluftwerte	0	0	0	± 0.0199	292.8 ± 1.0
($\beta_4 = 0$ gesetzt, nach Prey reduziert)	(0)	(0)	(0)	(± 0.0630)	(296.7) (± 3.3)
Internationale Formel	0.0053	0.000 0236	-0.000 0059	*	297.0

flächen (mit größter Annäherung) unverändert bleiben. Mit ausreichender Genauigkeit genügt es, Freiluftwerte zu benutzen⁴⁾.

Den Berechnungen, deren Ergebnis im folgenden mitgeteilt wird, liegen wie bei Ledersteger die Seitenmittelwerte des Ackerlischen Verzeichnisses zugrunde⁵⁾. Um sie in Freiluftwerte umzurechnen, wurden jeweils die in Tabelle 1 angegebenen Seitenmittel der mit 2 multiplizierten B-Spalten des Ackerlischen Verzeichnisses addiert.

Durch Ausgleichung unter Annahme gleicher Gewichte wurden Schwereformeln von der bekannten Gestalt berechnet. Die Abplattung wurde nach dem erweiterten Clairautschen Theorem⁶⁾ bestimmt.

$$\begin{aligned} \gamma &= G_0 + G_2 \cdot P_2 + G_4 \cdot P_4 \\ &= \gamma_{\text{äqu}} (1 + b_2 \sin^2 \varphi + b_4 \sin^4 \varphi) \\ &= \gamma_{\text{äqu}} (1 + \beta_2 \sin^2 \varphi + \beta_4 \sin^2 2 \varphi), \\ P_2 &= \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}, \quad P_4 = \frac{35}{8} \sin^4 \varphi - \frac{15}{4} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8}. \\ a &= \frac{5}{2} c - b + \frac{2}{21} b_4 + \frac{1}{21} b^2 - \frac{10}{3} c^2 + \frac{17}{14} b c, \\ & \quad b = b_2 + b_4 = \beta_2. \end{aligned}$$

Eine vollständige Darstellung der Ergebnisse gibt Tabelle 2.

Hiernach beträgt die aus dem neuesten Material unter gleichmäßiger Behandlung aller Werte berechnete Abplattung etwa 1 : 293, sie ist also größer als der im allgemeinen angenommene Wert 1 : 297. Im Vergleich zu dem Abplattungswert, der auf nach Prey reduzierten Schwerewerten beruht, hat sich der Nenner um knapp 4 Einheiten, also etwa 1.3%, verkleinert.

II. Trotz der verhältnismäßig kleinen mittleren Fehler darf man diesem Ergebnis keine zu große Bedeutung beimessen. Es ist anzunehmen, daß die ungünstige Verteilung der Schwerestationen auf der Erde die Ergebnisse erheblich beeinflußt, und es ist zur Zeit nicht zu übersehen, in welcher Richtung dieser Einfluß wirkt. Folgende Überlegung soll zur Vorsicht mahnen.

Man kann theoretisch berechnen, um welchen Betrag sich die aus Freiluftwerten und aus den nach Prey reduzierten Werten berechneten Abplattungen unterscheiden sollen. Das Glied mit der Kugelfunktion P_{20} der von Prey berechneten Entwicklung der Erdoberfläche nach Kugelfunktionen beträgt⁷⁾:

$$\text{Lithosphäre—Hydrosphäre} = 1133.8 - 1037.2 = 96.6 \text{ m.}$$

Die Bouguersche Massenreduktion beträgt

$$\begin{aligned} B &= 2 \pi \kappa \sigma H, \quad \kappa = \text{Gravitationskonstante,} \\ & \quad \sigma = \text{Dichte,} \\ & \quad H = \text{Höhe,} \end{aligned}$$

ihr Glied mit P_{20} ist

$$B = 2 \pi \kappa \sigma \cdot 96.6 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right),$$

in Zahlen für $\sigma = 2.39$:

$$B = 9.66 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \text{mgal,}$$

$$2B = 19.32 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \text{mgal.}$$

Dieses Glied, der Schwereformel zugefügt, ändert den Koeffizienten b_2 um

$$\frac{3}{2G_0} \cdot 19.32 \cdot 10^{-3}$$

und nach dem einfachen Clairautschen Theorem die Abplattung um etwa

$$- 0.0000295,$$

ihren reziproken Wert um

$$+ 2.6.$$

In der Zahlenrechnung dagegen betrug diese Änderung etwa -4 , die Ausgleichung führte also nicht zu den für die Erde als Ganzes geltenden Werten.

III. Um ein Urteil zu gewinnen, wie weit man der wirklichen Abplattung nahe gekommen ist, muß man Vergleiche mit Abplattungswerten anstellen, die auf andersartigen Beobachtungen beruhen.

Gradmessungen sind hierzu nicht geeignet. Sie liegen etwa in den Gebieten der dichtesten Schweremessungen. Daher ist die gute Übereinstimmung zwischen den aus Schweremessungen und Gradmessungen abgeleiteten Abplattungen höchstens ein Beweis für die Zuverlässigkeit der Methoden, nicht aber der Ergebnisse.

Anders verhält es sich mit astronomischen Bestimmungen. Präzession, Nutation und verschiedene Störungen der Mondbewegung sind abhängig von dem Unterschied der Hauptträgheitsmomente C und A der Erde, und es ist möglich, aus ihnen Abplattungswerte abzuleiten, die für die ganze Erde gültig sind.

Störungen der Mondbahn führen auf $C-A/MR^2$, wobei M und R Masse und Äquatorradius der Erde bedeuten. Weiter gilt die Beziehung⁸⁾

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{C-A}{MR^2} \left(1 + 2\alpha + \frac{c}{2} \right) + \frac{c}{2} - \frac{1}{21} b_4 - \frac{32}{21} \alpha^2 + \frac{10}{21} \alpha c - \frac{c^2}{2},$$

bei der sich die den Schwereformeln zu entnehmenden Größen nur in kleinen Gliedern zweiter Ordnung befinden. Aus⁹⁾

$$\frac{C-A}{MR^2} = 0.001070, \text{ period. Mondst. in Breite, Hansen-Helmert,}$$

0.001108, „ „ „ Länge, „ „

0.001117, „ „ „ Breite, Newcomb,

0.001117, säk. Störung d. Länge d. Mondperigäums, Newcomb,

0.001121, „ „ „ „ „ Knotens d. Mondbahn, Newcomb

findet man im Mittel $C - A/MR^2 = 0.0011056 \pm 94$ und berechnet:

$$1/\alpha = \begin{cases} 295.4 \pm 1.4 (\beta_4 \text{ durch Ausgl.}) \\ 295.2 \pm 1.2 (\beta_4 = -0.000\,0070) \\ 295.1 \pm 1.2 (\beta_4 = 0). \end{cases}$$

E. W. Brown findet aus Störungen der Länge des Mondperigäums und des Knotens $1/\alpha = 293.7^{13}$.

Aus Präzession und Nutation findet man¹¹⁾ $C - A/C \approx 1 : 306.1$. Die Theorie Wiecherts¹²⁾ gibt hiermit $\alpha \approx 1 : 297.7$. Allerdings enthält die Theorie einige Annahmen über den Massenaufbau des Erdinnern.

Die Abplattung der Erde dürfte rund $1 : 295$ betragen, wobei der Nenner um einige Einheiten unsicher sein kann. Wenn auch ihr Wert nicht so sicher bekannt ist, wie man im allgemeinen annahm, so liegt kein zwingender Grund vor, den Bezugswert $1 : 297$ aufzugeben. Vorerst dürfte es zweckmäßig sein, abzuwarten, bis ein Netz von besser verteilten Schwerestationen vorliegt.

Literatur

- 1) F. Ackerl: Die Schwerkraft am Geoid. Akad. Wien. Sitzungsber. d. math.-nat. Kl. (IIa) **141** (1932).
- 2) K. Ledersteger: Über die Minimumeigenschaft der Schwerestörungen. Zeitschr. f. Geophys. **11**, 23—29 (1935).
- 3) Karl Jung: Zur Abschätzung von Geoidundulationen und Abplattung. Gerlands Beitr. z. Geophys. **31**, 212—239 (1932).
- 4) Harold Jeffreys: An application of free air reduction of gravity. Ebenda **31**, 378—386 (1931).
- 5) K. Ledersteger: Zeitschr. f. Geophys. **11**, 28 (1935), Tabelle 2.
- 6) Helmert: Höhere Geodäsie II.
- 7) A. Prey: Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Abhandl. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, N. F., **11**, 1 (1922).
- 8) Berechnet aus Helmert: Höhere Geodäsie II, S. 77, Formel (2), S. 78, Formel (6), S. 82, Formel (9).
- 9) Enzykl. d. math. Wiss. VI, 2¹, S. 862.
- 10) Monthly Not. R. A. S. **75**, 508 (1915).
- 11) Enzykl. d. math. Wiss. VI, 2², S. 101.
- 12) E. Wiechert: Über die Massenverteilung im Innern der Erde. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1897, S. 221—243.

Potsdam, Geodätisches Institut, Juni 1935.