SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

## Werk

**Jahr:** 1935
**Kollektion:** fid.geo
**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:11
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN101433392X_0011
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0011

**LOG Id:** LOG_0060
**LOG Titel:** Beitrag zur Theorie und Konstruktion von statischen Schweremessern
**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

# Beitrag zur Theorie und Konstruktion von statischen Schweremessern*)

Von **O. Meisser**, Jena — (Mit 11 Abbildungen)

Es werden allgemein die Beziehungen für die Empfindlichkeit und die Schwingungsdauer bei Vertikalseismometer und statischem Schweremesser aufgestellt. Unter der Forderung einer besonderen Charakteristik wird allgemein die Federwaage mit einer Astasierungseinstellung *ohne Störung* des Waagegleichgewichts und bei Berücksichtigung eines großen Stabilitätsbereiches behandelt. Der konstruktive Vorteil liegt in der Vorspannung der Feder, wodurch einfache theoretische Verhältnisse erreicht werden. Eine ebenfalls günstige Charakteristik weisen auf elastische Knickung beanspruchte Stäbe auf. Für die Materialauswahl wird eine Übersicht über die Methoden zur Bestimmung der thermoelastischen Koeffizienten und ihre Größe bei verschiedenen Materialien gegeben, so daß eine Beseitigung des Temperatureinflusses praktisch möglich ist.

*Inhalt:*

*A. Statischer Schweremesser und Vertikalseismometer.*
*B. Die Astasierung.*
*C. Charakteristik.*
*D. Die Federwaage (Galitzinvertikalseismometer, statischer Schweremesser).*
*E. Gravimeter mit auf elastische Knickung beanspruchten Stäben.*
*F. Der Temperaturkoeffizient.*

*A. Statischer Schweremesser und Vertikalseismometer.* Jedes Seismometer läßt sich im Prinzip auf ein einfaches Pendel zurückführen. Für die Aufzeichnung der horizontalen Bodenbewegungskomponenten muß man stets berücksichtigen, daß außer der entsprechenden Bodenbewegung bei einem Instrument allein gleichzeitig mit die Neigungen des Bodens und außerdem bei genügender Empfindlichkeit die Richtungsänderungen der Schwerkraft aufgezeichnet werden. Diese Vereinigung Bodenbewegung, Neigung und Richtungsänderung der Schwerkraft tritt theoretisch bei jedem Horizontalseismometertyp auf.

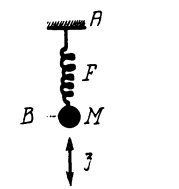

Fig. 1 Federpendel

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei dem Vertikalseismometer. Jedes Instrument zur Aufzeichnung der vertikalen Bodenkomponente läßt sich im Prinzip auf eine an einer Feder $F$ hängende Masse $M$ (s. Fig. 1) zurückführen, die sich nur in Richtung ($z$) der Federachse $AB$ bewegen soll. Die Ruhelage der Masse $M$ wird durch die Erdschwere $g$ und die entsprechenden vertikalen Bodenbewegungen bestimmt. Es geht auch hier wie bei Seismometern für die horizontale Bodenbewegung die Schwereänderung und die vertikale Bodenbewegung gleichzeitig in die Registrierung ein.

*) Gekürzte Wiedergabe eines Vortrages, gehalten im Physikal. Kolloquium der Universität Jena, S.-S. 1935.

Bezeichnet $z$ (s. Fig. 1) die vertikale Koordinate (Ruhelage $z = 0$), $g$ die Schwerkraft, $M$ die Gesamtmasse des schwingenden Systems, so gilt bei einem ungedämpften System für die Schwingungsdauer

$$T = 2T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{g}\cdot\frac{dz}{dm}}\ ^{*)\,**)}, \quad \ldots \quad (1)$$

wenn $f$ die Federkonstante, $L$ die „reduzierte Pendellänge" und $dz$ die einem Zusatzgewicht $dm$ entsprechende Längenänderung entspricht. Da meistens $dm/M \sim dg/g$ ist, hat man die für die Empfindlichkeitsbestimmung wichtige Beziehung

$$\boxed{\frac{dz}{L} = \frac{dg}{g}}, \quad \ldots \quad (2)$$

wobei

$$L = \frac{T'^2}{\pi^2}\cdot g \sim T'^2_{\text{sec}}\, m.$$

Formel (2) besagt z. B., daß ein statischer Schweremesser mit $T' = 1$ sec eine Ablesegenauigkeit von 1 $\mu$ für 1 mgal in $dz$ erfordert.

Die Konstruktion von Vertikalseismometern stellt meistens jedoch eine Massenkombination dar, die um eine Achse ($C$) (s. Fig. 2) mit dem Winkel $\varphi$ drehbar gelagert ist. Bezeichnet $K$ das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment, $s$ den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse, $q$ den Trägheitsradius, so gilt für das Drehmoment $\mathfrak{M}$ aller am System angreifenden Kräfte für ein ungedämpftes System

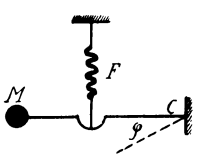


Fig. 2
Vertikalseismometer
mit Astasierung

$$\mathfrak{M}(\varphi_0, g) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

beim statischen Schweremesser (Ruhelage $\varphi = 0$) bzw.

$$K\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mathfrak{M}(\varphi, g) = -Ms\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots \quad (4)$$

beim Vertikalseismometer, wenn $t$ die Zeit bedeutet.

Für den Ausschlag $\varphi$ wird***)

$$\mathfrak{M}(\varphi, g) = \mathfrak{M}(\varphi_0, g) + \varphi\cdot\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\varphi}(\varphi_0, g) \pm \cdots,$$

---

*) $T'$ Halbschwingung.

**) Siehe auch Y. Dammann: Contribution à l'étude des propriétés élastiques de l'élinvar. Son utilisation dans les séismographes. Union Géodésique et Géophysique intern. Sect. Séismologie Ser. A, Fasc. No. 5, A. Paris 1927. S. 122—156.

***) Siehe H. P. Berlage in Gutenbergs Handb. d. Geophys. IV, Seismometer. Berlin 1930. S. 379ff.

man erhält

$$2\,T' = T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0}}}\ ^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Bedeutet (2) $A$ die Hebel-(Lichtzeiger-)länge, dann ist die „Vergrößerung" $V$ des Seismometers

$$V = (2)\,A\,\frac{s\,.\,M}{K} = (2)\,A\,\frac{s}{q^2} \approx (2)\,\frac{A}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\,a)$$

Die Empfindlichkeit $dg/d\varphi$**) folgt aus (3) unter Berücksichtigung des Momentes der Schwere $Mgs$ in der Ruhelage zu

$$d\varphi = -\frac{dg}{g}\cdot\frac{L}{q}\cdot\frac{s}{q} \approx -\frac{dg}{g}\cdot\frac{L}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wird andererseits der Endausschlag $da = d\varphi\,(2)\cdot A$ angenommen, so ist mit (6 a)

$$\boxed{\begin{aligned} da &= V\cdot L\cdot\frac{dg}{g} \\ &= V\cdot dz \end{aligned}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die Formel (8) gibt ganz allgemein den Zusammenhang zwischen einem Vertikalseismometer und einem statischen Schweremesser. Bei Seismometern wird das

Tabelle 1

| Name des Erfinders | Jahr | Technische Daten d. Seism. Periode $T_0$ sec | Vergr. fach | Red. Pendel $L$ m | Ausschlag für $dg/g = 10^6$ in mm | Ausschlag für $^1/_{10}$ mm in $dg/g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Schlüter***) | 1900 | 16 | 46 | 64 | 2.9 | $3\cdot10^{-7}$ |
| | | 40 | 46 | 400 | 18.4 | $6\cdot10^{-8}$ |
| Vicentini***) | 1900 | 1.5 | 100 | 0.5 | 0.05 | $5\cdot10^{-6}$ |
| Straubel***) | 1906 | 6.6 | 4000 | 10 | 40 | $2.5\cdot10^{-9}$ |
| Wiechert***) | 1909 | 5 | 200 | 6.3 | 1.3 | $8\cdot10^{-8}$ |
| | | 4 | 80 | 4 | 0.3 | $3\cdot10^{-7}$ |
| Galitzin***) | 1910 | 12 | | 36 | | |
| de Quervain-Piccard***) | 1927 | 1.2 | 1800 | 0.4 | 0.7 | $1.5\cdot10^{-7}$ |
| Schweydar†) | 1913 | | | | 2.6 | $4\cdot10^{-8}$ |
| Tomaschek††) | 1932 | 100 | 80 | 2500 | 200 | $5\cdot10^{-10}$ |
| | | 40 | 80 | 400 | 32 | $5\cdot10^{-9}$ |

*) Die reduzierte Pendellänge $L = g\cdot\dfrac{Mq^2}{\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0}}$.

**) $\dfrac{dg}{d\varphi} = -\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi} : \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g}$.

***) Siehe H. P. Berlage: S. 222 dieser Arbeit.

†) Siehe Handb. d. Experimental-Physik XXV, 2, S. 337.

††) R. Tomaschek u. W. Schaffernicht: Untersuchungen über die zeitlichen Änderungen der Schwerkraft. I. Ann. d. Phys. (5) **15**, 787–824 (1932). Die in der Arbeit gemachten seismischen Vergrößerungsangaben decken sich nicht mit den obigen Zahlen für unendlich schnelle Bodenschwingungen.

größte Gewicht auf Steigerung von $V$ in (8) und (6a) gelegt, während ein statischer Schweremesser seine Empfindlichkeit nach (8) und (2) über eine möglichst große reduzierte Pendellänge ($L$) zu erreichen sucht. Nach Gleichung (8) ist für beide Arten ein Überschneiden möglich. In Tabelle 1 sind die gebräuchlichen Vertikalseismometer einmal als statische Schweremesser betrachtet. Es ist der Ausschlag für $dg/g = 10^{-6}$ in mm angegeben und außerdem rein rechnerisch die $^1/_{10}$ mm entsprechende Empfindlichkeit in $dg/g$ berechnet. Man sieht, daß das Vertikalseismometer nach Straubel bereits empfindlicher ist als das Trifilargravimeter von Schweydar, das natürlich wie dasjenige von Tomaschek seismisch einen ruhigeren Nullpunkt aufzuweisen hat.

*B. Die Astasierung.* Bei jedem statischen Schweremesser hält in seiner Nullage das Moment einer Federkraft ($\mathfrak{M}_f$) dem Moment einer schweren Masse ($\mathfrak{M}_g$) das Gleichgewicht. In Fig. 3 sind die beiden Momente $\mathfrak{M}_f$ und $\mathfrak{M}_g$ in ihrer Abhängigkeit von der Ruhelageentfernung ($\varphi, z$) dargestellt. Für

$$\mathfrak{M}_f - \mathfrak{M}_g = \mathfrak{M}(\varphi_0, g) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

hat man die Gleichgewichtslage, die den Nullpunkt bestimmt. Die Schwingungsdauer des Systems ist bestimmt durch den Verlauf von $(\partial \mathfrak{M}/\partial \varphi)_{\varphi=0}$, d. h. von den Tangenten der beiden Momente $\mathfrak{M}_f$ und $\mathfrak{M}_g$ in $D$. Je kleiner der schraffierte Raum in Fig. 3 ist, um so größer wird die Schwingungsdauer und somit die Empfindlichkeit in $dg/g$. Das Streben wird für eine „Astasierung" darauf hinauslaufen, den Verlauf von $\mathfrak{M}_f$ und $\mathfrak{M}_g$ in $D$ möglichst weitgehend einander anzugleichen und geradlinig zu gestalten, so daß die höheren Ableitungen von $\mathfrak{M}$ nach $\varphi$ für $\varphi = 0$ sehr klein sind; denn für nur $(\partial \mathfrak{M}/\partial \varphi)_{\varphi=0} = 0$ wird die Empfindlichkeit sehr stark vom Ausschlag abhängig und das System kann zur Unstabilität neigen. Die Einzelheiten werden an einem besonderen Fall (Federwaage) gezeigt werden.

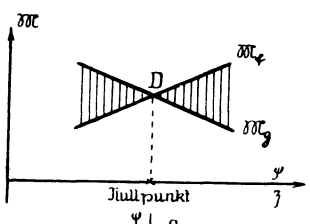

Fig. 3
Schwere- und Federmoment

*C. Charakteristik.* Als weitere Forderung für einen statischen Schweremesser ist anzustreben, daß die Federanordnungen bis zu einem festen Betrag der belastenden Masse $M_0 - dm$ (s. Fig. 4) keinen oder nur einen konstanten Ausschlag zeigen und daß erst in dem Meßbereich $M_0 \pm dm$ eine sehr empfindliche Indikation vorhanden ist. Durch dieses Ziel bleibt die Federanordnung vor großen Überbeanspruchungen, die die elastische Nachwirkung leicht erhöhen, bewahrt. Sowohl vorgespannte Federn wie die Anordnung der elastischen „Knickstäbe" erfüllen diese Bedingung.

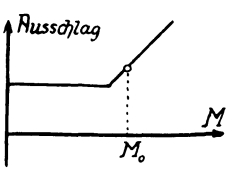

Fig. 4
Ausschlagcharakteristik

*D. Die Federwaage.* Die einfachste Anordnung außer einer gewöhnlichen Spiralfeder (s. Fig. 1) ist die sogenannte Federwaage. Man hat im Prinzip eine

gewöhnliche Waage, von der ein Gewicht durch eine Feder ersetzt ist. Die Theorie einer solchen Federwaage ist ähnlich der des „Galitzin"*)-Vertikalseismometers.

a) Galitzinvertikalseismometer. In Fig. 5a, b sind zwei gleichwertige Galitzinpendel*) schematisch dargestellt. Das Moment $\mathfrak{M}_g$ der Masse $M$ ist für den Winkelausschlag $\varphi$

$$\mathfrak{M}_g = a\,M g\,.\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und das der Feder $\mathfrak{M}_f$, *deren Zugkraft direkt proportional der geometrischen Länge A B* ist**),

$$\mathfrak{M}_f = f\,c\,\dot{g}\,\sin(\gamma + \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Da für $Mga = fc\dot{g}$ das System in jeder Lage ($\varphi$) im Gleichgewicht sein soll, hat man für $\gamma = \pi/2$ in den Anordnungen der Fig. 5a, b eine Konstruktion**), die auch für einen statischen Schweremesser wohl geeignet ist. Die praktische Ausführung hat den Nachteil, daß eine Astasierung stets mit einer Neuausbalancierung verbunden ist. Für einen statischen Schweremesser braucht die Bedingung, daß das System auf horizontale Bodenbewegung nicht ansprechen darf, keineswegs eingehalten zu werden und man kommt so durch die vertikale Verschiebung der Masse $M$ senkrecht zu $OM$ zu einer wesentlich bequemeren Konstruktionsmöglichkeit.

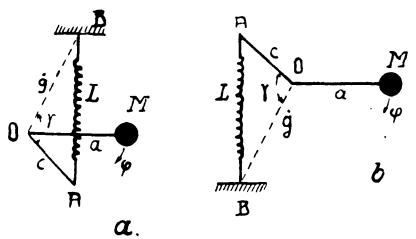


Fig. 5. Galitzinseismometer

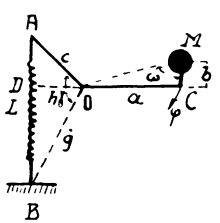


Fig. 6
Allgemeine Federwaage

b) Statischer Schweremesser auf dem Prinzip der Federwaage. Da das Moment der Schwere $\mathfrak{M}_g = Mga\cos\varphi$ in der Ruhelage ($\varphi = 0$) seinen größten Wert hat, so wird man eine Anpassung an den Verlauf des Federmomentes $\mathfrak{M}_f$ sofort erreichen, wenn der Schwerpunkt des Massensystems über den Drehpunkt 0 zu liegen kommt. Gleichzeitig ist zu fordern, daß die Schwere $g$ möglichst günstig an der Gesamtmasse $M$ des Systems angreift und eine Änderung von $g$ durch keine „Totmasse" über 0 direkt oder auf der Federseite (s. Fig. 5b) in ihrer Wirkung vermindert wird. Diese Überlegungen führen zu der Anordnung in Fig. 6, wo bei $C$

*) Siehe auch Berlage: S. 222 dieser Arbeit.

**) Durch entsprechendes Wickeln kann man Spiralfedern vorspannen und die Länge durch Zusatzabstimmung auf den gewünschten geometrischen Wert bringen. Es ist das Verdienst von Lucien J. B. La Coste, jr.: A new type long period vertical seismograph, Physics 1934, S. 178—180, diese wichtige Eigenschaft als erster praktisch verwertet zu haben.

das Gewicht um die Strecke $b$ senkrecht zu $OC$ verschoben werden kann, *ohne daß man die Gleichgewichtslage stört.*

Der Arm $OA$ ist, um die Untersuchung allgemeiner zu gestalten, gegen $OC$ geneigt. Es brauchen die Punkte $C, O$ und $A$ nicht in einer Geraden zu liegen. Das Lot von $O$ auf $AB$ ist $h = (OA \cdot OB/AB) \sin B\hat{O}A$. Die übrigen Bezeichnungen ergeben sich aus der Fig. 6. Für die Ruhelage ist

$$\varphi = 0 : \mathfrak{M}_g = M g a$$
$$\mathfrak{M}_f = f c \dot{g} \sin\gamma \left(1 - \frac{L_0}{L}\right)$$

mithin

$$f c \dot{g} \left(1 - \frac{L_0}{L}\right) \sin\gamma = M g a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Es soll, wie es in der Praxis vorkommt, die nicht ganz beseitigte Anfangslänge $L_0 (\pm)$ mit berücksichtigt werden, jedoch ist stets $|L_0| \ll L$*).
Für den Ausschlag $\varphi$ ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_g &= M g a \left(\cos\varphi + \frac{b}{a}\sin\varphi\right) \\ \mathfrak{M}_f &= f c \dot{g} \left(1 - \frac{L_0}{L_\varphi}\right) \sin(\gamma + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{aligned} L^2 &= c^2 + g^2 - 2 c \dot{g} \cos\gamma \\ L_\varphi^2 &= c^2 + g^2 - 2 c \dot{g} \cos(\gamma + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Das resultierende Moment ergibt sich zu

$$\mathfrak{M}(\varphi, g) = M g a \left\{\frac{\sin(\gamma + \varphi)}{\sin\gamma} \cdot \frac{1 - L_0/L_\varphi}{1 - L_0/L} - \cos\varphi - \frac{b}{a}\sin\varphi\right\} = 0 \quad . \quad (14)$$

Für $L_0 = 0$ ist eine vollständige Astasierung ($T = \infty$) für $\cot\gamma = b/a$ erreicht. Berücksichtigt man durch Entwicklung von $\mathfrak{M}(\varphi, g) = 0$ nach $\varphi$ auch die höheren Differentialquotienten in (5), so wird ($K \sim a^2 M$)**)

$$T_\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{1}{\sqrt{\left\{\cot\gamma - \frac{b}{a} + \frac{L_0}{L} \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{1}{1 - L_0/L} + \frac{3}{2}\varphi \frac{L_0}{L} \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{\cot\gamma - h/L}{1 - L_0/L} \pm \ldots\right\}}} \quad (15)$$

Man sieht sofort den großen theoretischen Vorteil der vorgespannten Feder, denn für $L_0 = 0$ hängt die Größe der Schwingungsdauer (15) nur von dem Parameter $b$ ab, ohne daß die Gleichgewichtslage gestört wird, und die Stabilität ist über einen

---

*) Die Größe $L_0$ ergibt sich als Differenz der geometrischen Länge $AB$ gegenüber $L$ nach Formel (1). Die Bestimmung von $L$ aus Schwingungsdauerbeobachtungen ist am einfachsten.

**) Als Hilfsrechnung diene:

$$\left(\frac{\partial L_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{c\dot{g}}{L}\sin\gamma = h \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} = a M g \left\{\cot\gamma - \frac{b}{a} + \frac{L_0}{L} \cdot \frac{h}{L} \frac{1}{1 - L_0/L}\right\}$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = h\cot\gamma - \frac{h^2}{L} \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = 3 a M g \cdot \frac{L_0}{L} \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{\cot\gamma - h/L}{1 - L_0/L} \cdot$$

großen Amplitudenbereich mit annähernd konstanter Empfindlichkeit gewährleistet*). Die Astasierungsbedingung $\cot\gamma = b/a$ heißt geometrisch, daß der Winkel $\gamma = B\hat{O}A$ gleich dem Winkel $\omega = CMO$ sein muß. Für den Sonderfall, daß die Punkte $C$, $O$ und $A$ in einer Geraden liegen ($c = h$), ist $c : L = b : a$.

Ist die Größe $L_0$ nicht genau auf Null kompensiert, so kann ebenfalls durch alleinige Veränderung von $b$ die Astasierung bewerkstelligt werden. Damit die Schwingungsdauer (15) kein Glied in $\varphi$ mehr enthält, empfiehlt es sich, die Punkte $C, O$ und $A$ ($\cot\gamma = h/L$) in eine Gerade zu legen. Man kann so auch, ohne zu einer zweiten Feder greifen zu müssen**), mit einer Feder allein, wie LaCoste bereits gezeigt hat, auch langperiodige Vertikalseismometer mit Schwingungsdauern, die über einen gewissen Amplitudenbereich konstant sind, bauen. Es wurde an einer Federwaage nach Fig. 6 die Empfindlichkeitsbestimmung auch bei verschiedenen Schwingungsdauern vorgenommen. In Fig. 7 sind in Abhängigkeit von den Halbschwingungen $T'$ die Winkelausschläge $d\varphi$ für eine Überbelastung $dm$ von 100 mg ($dm/M = 2.5 \cdot 10^{-4}$) aufgetragen. Da die Abszisse eine quadratische Skala in Fig. 7 hat, müssen die Werte $d\varphi$ nach (7) innerhalb der Fehlergrenze auf einer Geraden liegen, was auch erfüllt ist. Selbstverständlich eignet sich diese Federwaage auch als Doppelinstrument für große ($10^{-9}$) Empfindlichkeit in $dg/g$, um entsprechende von der Bodenneigung unabhängige Angaben zu geben.

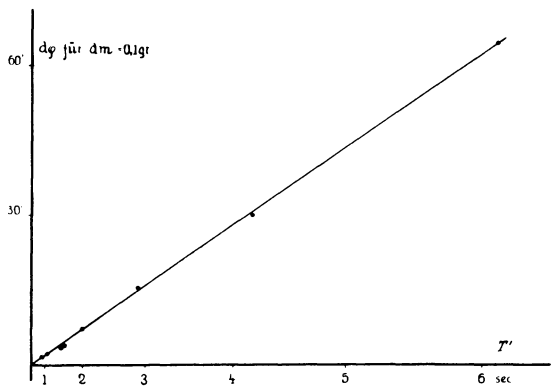


Fig. 7. Schwingungsdauer und Empfindlichkeit einer Federwaage

Die Vorteile der im Vorstehendem beschriebenen Federwaage sind die bequeme Astasierung ohne Störung des Gleichgewichtes, die Konstanz der Empfindlichkeit über einen weiten Amplitudenbereich und mithin große Stabilität, die z. B. bei einem Bi- bzw. Trifilargravimeter nicht in diesem Ausmaße zu erreichen sind. Dazu kommen noch bequeme Kompensationsmöglichkeiten der Temperatur.

*E. Gravimeter mit auf elastische Knickung beanspruchten Stäben.* Wählt man eine Spiralfeder als elastische Gegenkraft, so läßt sich die unter $C$ aufgeführte Charakteristik aus praktischen Gründen nicht beliebig weit treiben. Die Konstanz der

*) Bei einem Versuch waren für $T = 12$ sec in dem Bereich $\varphi = \pm 1^1/_2{}^0$ die Abweichungen von $T$ kleiner als 1%.

**) Vgl. J. Wilip: Zur Theorie und Konstruktion von Vertikalseismographen. Gerlands Beitr. z. Geophys. **14**, 387—401 (1928).

Federlänge (Ruhelage) ist bis auf $10^{-7}$ zu fordern für einen statischen Schweremesser. Im Gegensatz dazu ist die elastische Ausbiegung beim Knicken*) im Verhältnis zu der geforderten Genauigkeit ($10^{-6}$) relativ zur Stablänge klein ($10^{-4}$), da bis zur kritischen her Eulerlast praktisch kein Ausschlag erfolgt. Die Größe der Ausbiegung eines Stabes beim Überschreiten der kritischen Last ist relativ wenig und in den Lehrbüchern zum Teil recht oberflächlich behandelt, da für diesen Bereich technisch kein Interesse vorlag.

Hat man einen bei $A$ eingespannten Stab, der bei $B$ in Richtung seiner Schwereachse $CA$ belastet ist, dann wird theoretisch bis zur Erreichung der Eulerschen Knicklast $P_K$ der Stab keine Ausbiegung erleiden. Bezeichnet

$l$ Länge des Stabes $AB$,
$E$ Youngscher Elastizitätsmodul,
$J$ kleinstes Trägheitsmoment des Stabquerschnittes,
$P$ Druckkraft,
$P_K = 4\,\pi^2 EJ/l^2$,

so wird unter Berücksichtigung des strengen Wertes für den Krümmungsradius

$$\varrho = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} : \frac{d^2y}{dx^2}$$

die Ausbiegung $y_1$ bei $B$ (s. Fig. 8) unter der Last $P$**) bei „schlanken" Stäben***) (Schlankheitsgrad $> 100$)

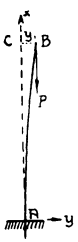

Fig. 8
Belasteter „schlanker" Stab

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{\pi}\, l \cdot \sqrt{\frac{P_K}{P}}\, \sin\vartheta \\ \sqrt{\frac{P}{P_K}} &= \frac{2}{\pi} F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi}} \;\dagger) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

wobei $\vartheta$ ein Parameter ist. In der Nähe der kritischen Stelle $P = P_K$ lautet die von Mises††) angegebene Näherungslösung

$$y_1 = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\, l \sqrt{\frac{P}{P_K} - 1}\left\{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{P}{P_K} - 1\right) \cdots\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Nach den Formeln (17) bzw. (16) müßte man in unmittelbarer Nachbarschaft der kritischen Last die größte Empfindlichkeit erhalten. Die in Fig. 9 wiedergegebene theoretische Kurve ($a$ - - -) läßt sich jedoch auch bei den saubersten Versuchs-

*) Den Hinweis auf diese Konstruktionsmöglichkeit verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bauersfeld, Jena.

**) Strenge Lösung bei L. Saalschütz: Der belastete Stab. Leipzig 1880; J. Malkin: Formveränderung eines axial gedrückten dünnen Stabes. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **6**, 73—76 (1926).

***) Vgl. Auerbach-Hort: Handb. d. techn. Mechanik **4**, Artikel Timoschenko; „Hütte" des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. I.

†) $F(\vartheta, \pi/2) = K$. Vollständiges elliptisches Integral erster Gattung.

††) v. Mises: Zeitschr. f. angew. Math. **4**, 435 (1924).

bedingungen mit der zu fordernden Genauigkeit nicht verwirklichen*). Die Gründe dafür sind: exzentrische Belastung (Hebelarm der Last $e$), Ungleichmäßigkeiten im Material, Abweichung der Stabachse von einer vollkommenen Geraden. Nimmt man die Bogenkrümmung des Stabes mit $a$ (Maximalpfeilhöhe einer Sinuslinie) und mit $e$ den exzentrischen Angriff der Last $P$ in $B$ (Fig. 8) an, so ist für kleine Durchbiegungen ($P < P_K$) näherungsweise

$$y = \frac{a}{\frac{P}{P_K} - 1} + e \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}} \qquad (18)$$

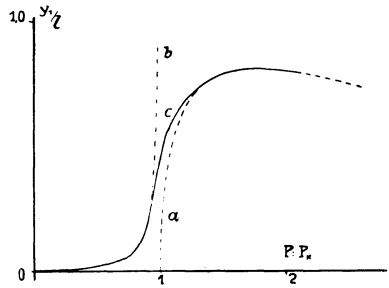


Fig. 9. Theoretische Ausbiegung belasteter schlanker Stäbe

Die Formel (18) zeigt, daß bereits für $P < P_K$ Durchbiegungen auftreten (s. Fig. 9, Kurve $b$ — · — · —). Beide Formeln verlieren in der Nähe von $P_K$ ihre Gültigkeit, weil die Werte für $y$ dann relativ groß im Verhältnis zu $e$ werden. Diese Tatsache wird in den üblichen Darstellungen meistens nicht angeführt. In Fig. 9 ist für exzentrischen Kraft-

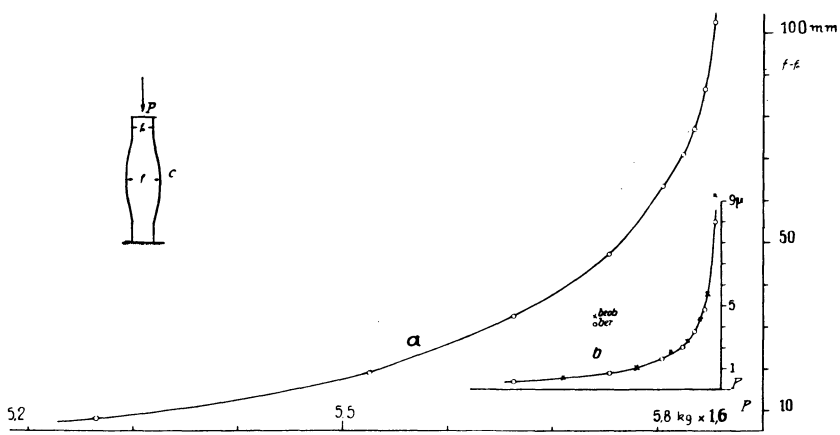


Fig. 10. Experimentelle Ausbiegung zweier Stäbe

angriff die strenge Lösung (Kurve $c$ —) schematisch eingezeichnet. Hat man Stäbe, die verschieden gelagert sind: oben und unten auf Schneiden gelagert oder oben und unten eingespannt, so ist für $l$ ein entsprechender Bruch-

*) W. Rein: Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Ber. d. Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B, Heft 4, Berlin 1930.

teil der Stablänge in $P_K$ einzusetzen. In Fig. 10 ist die Ausbiegung zweier parallel (s. Fig. 10c) eingespannter Stäbe von 1 m Länge in Abhängigkeit von der Belastung $P$ aufgezeichnet (Fig. 10a). Die relative Empfindlichkeit in $\mu$ ($10^{-3}$ mm) für eine Gewichtszunahme von $10^{-6}$ wurde sowohl aus der Kurve $a$ wie aus der Schwingungsdauer $T$ des Gesamtsystems nach (2) ermittelt und die berechneten ($\times$) und gefundenen ($o$, $T$) Werte in Fig. 10 als Kurve (10b) dargestellt. Auch hier zeigt sich trotz der sehr starken Vereinfachungen [Formel (1)] eine befriedigende Übereinstimmung der vorläufig gemessenen Werte.

Aus der Kurve in Fig. 10b ersieht man, daß die Anordnung von solchen auf elastische Knickung beanspruchten Stäben eine ideale Anordnung für ein transportables Gravimeter bietet. Obwohl die Skale keine konstante Empfindlichkeit aufzuweisen hat, lassen sich bei geeigneter Wahl des Materials und der Dimensionen die Beanspruchungen durch Druck und Biegung in erträglichen Grenzen halten, so daß die elastischen Nachwirkungen gering bleiben. Zudem kommt als weiterer Vorteil hinzu, daß die Belastungscharakteristik (s. Fig. 9) weitgehend die unter $C$ gestellte Forderung erfüllt und die Empfindlichkeit aus der Schwingungsdauer bestimmt werden kann.

*F. Der Temperaturkoeffizient.* Von einer Federanordnung wird wegen der Beziehung $[\mathfrak{M}(\varphi, g)]_{\varphi=0} = 0$ [Nullage (3)] stets verlangt, daß die resultierende Federkraft in derselben Größenordnung konstant bleibt, wie $dg/g$ gemessen werden soll. Abgesehen von elastischen Nachwirkungen ist von vornherein auf einen möglichst geringen Temperatureinfluß größter Wert zu legen. Man muß daher sowohl den thermischen Längenausdehnungskoeffizient wie die entsprechenden thermoelastischen Koeffizienten kennen, um geeignete kleine Werte bzw. entsprechende Kompensationsmöglichkeiten zum Einjustieren eines resultierenden Temperaturkoeffizienten Null wählen zu können.

Der Temperaturkoeffizient ($\varepsilon$) des Youngschen Elastizitätsmoduls $E$ und der meistens etwas größere ($\varepsilon'$) des Gleitmoduls $G$ lassen sich nur in Verbindung mit dem linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten ($\beta$) bestimmen. Jeder statische Schweremesser ist gleichzeitig ein Instrument zur Bestimmung des thermoelastischen Koeffizienten, wenn der Längenausdehnungskoeffizient anderweitig bekannt ist. Im folgenden sollen kurz einige der gebräuchlichsten bzw. einfachsten Meßmethoden angeführt werden.

*a) Stimmgabelschwingungen.* Die gebräuchlichste und mit genaueste Methode besteht in der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten von Stimmgabelschwingungen. Die Frequenz $N$ eines eingespannten Stabes lautet

$$N = \frac{m^2}{4\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

wobei

$m$ Zahlenfaktor, für den Grundton $1{,}875_1$,

$a$ Dimension des Stabquerschnittes in der Schwingungsebene,

$l$ Länge des Stabes,

$\varrho$ Dichte des Stabmaterials,

$E$ Elastizitätsmodul des Stabmaterials.

Unter Berücksichtigung der einzelnen Dimensionen in (19) erhält man für die Temperatur $t$ eine Frequenz

$$n_t = n_{t=0}\left(1 + \frac{\varepsilon + \beta}{2}\, t\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Für temperaturunabhängige Stimmgabeln lautet die notwendige Forderung

$$\varepsilon + \beta = 0. \quad (21)$$

*b) Uhrunruhe.* Eine weitere Zeitmeßmethode stellt die Schwingungsdauer einer Uhrunruhe dar. Man hat eine gewundene Biegungsfeder mit einer Masse vom Trägheitsmoment $K\,(\beta_2)$. Die Schwingungsdauer $T$ ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K \,.\, l}{E \,.\, J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

wobei

$J$ Trägheitsmoment des Federquerschnittes für die waagerechte Schwereachse $(\beta_1)$,

$l$ die Länge der Feder $(\beta_1)$

ist. Für die Temperatur $t$ beträgt dann die Schwingungsdauer

$$T_t = T_{t=0}\left(1 - \frac{3\beta_1 - 2\beta_2 + \varepsilon}{2}\, t\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die Forderung für Kompensation der linearen Glieder in $t$ lautet

$$3\beta_1 - 2\beta_2 + \varepsilon = 0 \qquad \text{und für} \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta\colon\ \varepsilon + \beta = 0 \quad (24)$$

*c) Durchbiegung eines Stabes.* Eine einseitig eingespannte Rechteckfeder hat die Durchbiegung $f$ unter der Last $P$

$$f = \frac{4\,P \,.\, l^3}{b \,.\, h^3} \cdot \frac{1}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

wenn $h$ die Dicke $(\beta)$ der Feder und $b$ deren Breite $(\beta)$ ist. Für die Temperatur $t$ hat man

$$f_t = f_{t=0}\,(1 - (\beta + \varepsilon)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

mithin ist die Kompensationsbedingung

$$\beta + \varepsilon = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

*d) Elastische Ausbiegung von auf Knickung beanspruchten Stäben.* In den „Knickformeln" [s. Formel (16) ... (18)] kommt für die Durchbiegung der Ausdruck $P : P_k$ vor, wobei die Eulersche Knicklast

$$P_K = n \cdot \pi^2 \frac{E J}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$l$ Stablänge, $J$ kleinstes äquatoriales Trägheitsmoment,

$n$ Zahlenfaktor.

Für die Temperatur $t$ hat man

$$P_{kt} = P_{kt=0}\,(1 + (2\beta + \varepsilon)t), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

wozu noch eine Bedingung aus der Längenausdehnung je nach der Kombination mit $l$ kommt.

*e) Torsionsschwingungen.* Läßt man an einem Draht von der Länge $l$ ($\beta_1$), dem Durchmesser $2r$ ($\beta_1$) und dem Gleitmodul $G$ ($\varepsilon'$) eine Scheibe von dem Trägheitsmoment $K$ ($\beta_2$) schwingen, so beträgt die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K \cdot 2l}{\pi r^4 G}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Die Temperaturabhängigkeit lautet

$$T_t = T_{t=0}\left(1 + \frac{\varepsilon' + 3\beta_1 - 2\beta_2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Für $\beta_1 = \beta_2$ muß bei einer Kompensation sein $\varepsilon' + \beta = 0$; die Formel (24) ähnelt derjenigen für $\varepsilon$ in (23).

*f) Spiralfeder.* Die Längung $f$ einer Spiralfeder unter der Last $P$ ist

$$f = \frac{32P}{\pi} \cdot \frac{l R^2}{d^4} \left(\frac{2\sin^2\alpha}{E} + \frac{\cos^2\alpha}{G}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$l$ gesamte Drahtlänge der Feder,

$R$ mittlerer Federradius,

$d$ Drahtdurchmesser,

$\alpha$ Neigungswinkel der Schraubenlinie.

Für $\alpha \approx 0$ hat man für die Temperatur $t$

$$f_t = f_{t=0}\,\{1 - (\varepsilon' + \beta)t\}.$$

Auch hier erfordert eine Kompensation

$$\varepsilon' + \beta = 0.$$

In der Tabelle 2 sind die einzelnen Methoden unter a) bis f) nochmals zusammengestellt, um zu zeigen, daß die Bestimmung der thermoelastischen Koeffizienten $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ eine Kenntnis von $\beta$ erfordert.

Tabelle 2

| Nr. | Methode | Scheinbarer Temperaturkoeffizient |
|---|---|---|
| a) | Stimmgabelschwingungen, Schwingungsdauer | $-(\varepsilon + \beta)$ |
| b) | Chronometerunruhe | $-(\varepsilon + 3\beta_1 - 2\beta_2)/2$ |
| c) | Durchbiegung eines Stabes | $-(\varepsilon + \beta)$ |
| d) | Elastische Knickung | $+(\varepsilon + 2\beta)$ |
| e) | Torsionsschwingungen, Schwingungsdauer | $-(\varepsilon' + 3\beta_1 - 2\beta_2)/2$ |
| f) | Spiralfeder | $-(\varepsilon' + \beta)$. |

Will man für einen statischen Schweremesser oder ein Vertikalseismometer einen Nullpunkt haben, der weitgehend von der Temperatur unabhängig ist, so muß man entweder $\varepsilon$ bzw. $\varepsilon' \approx 0$ und $\beta_i \approx 0$ für das betreffende Material voraussetzen oder eine solche Kombination von $\varepsilon$ bzw. $\varepsilon'$ und $\beta_i$ wählen, daß der lineare Temperaturkoeffizient Null wird. Beide Wege sind gangbar.

Tabelle 3

| Stoff | Linearer Ausdehnungskoeffizient $\beta \cdot 10^5$ | $E$ kg/mm² | Thermoelastische Koeffizienten $\varepsilon \cdot 10^4$ | $\varepsilon' \cdot 10^4$ |
|---|---|---|---|---|
| Aluminium*) | 2.4 | 6300—7500 | — 20 | — 25 |
| Eisen, Stahl*) | 1.2 | 18—20000 | — 2 ... — 5 | — 2 ... — 5 |
| Messing*) | 1.9 | 8000—10000 | — 4 | — 5 |
| Quarzglas**) | 0.04 | 7200 | + 1***) | |
| Indilatans Ni, Fe†) | 0.1 | 14000 | + 2.4 | |
| Elinvar Ni, Cr, Fe††) | 0.6 ... 0.65 | 18—19000 | ± 0.5 | ± 0.5 |
| Nivarox 33% Ni, 67% †††) | 1.6 ... 1.7 | | ± 0.2 | |
| Fe + 36% Ni†) | 0.16 | 14000 | + 7 (!) | |
| Fe + 36% Ni, 7% Cr†) | 0.64 | 16000 | + 0.94 | |
| Fe + 36% Ni, 9% Cr†) | 0.71 | 17000 | + 0.39 | $WT$ 10 |
| Fe + 35.6% Ni, 10.1% Cr | 1.05 | 18500 | — 0.27 | |
| Fe + 36% Ni, 12% Cr†) | 0.88 | 18000 | — 1.1 | |
| Bleitonerdeboratsilikatglas §) | < 1 | 5470 | < 0.01 | |

*) Siehe F. Kohlrausch: Lehrbuch der praktischen Physik.

**) Hütte.

***) E. A. Harrington: Journ. of Opt. Soc. America **18**, 89 (1929). Some properties of a fused silica tuning fork.

†) Hensel: Untersuchungen über die Konstanz elektrisch erregter mechanischer Schwingungen. Dissertation Leipzig, 1928.

††) Y. Dammann: siehe S. 222 dieser Arbeit; A. Jacquerod u. H. Mügeli: Variation du premier module d'élasticité avec la temperature Acier-Palladium-Elinvar. Helvetica physica acta **1**, 139—164 (1928).

†††) R. Straumann: Über Legierungen für Federn mit kleinem Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls, Heräus-Vakuumschmelze, S. 408—423 (1923—1933). Hanau 1933.

§) Landolt-Börnstein: Physikalisch-chemische Tabellen, Bd. I (1923).

Die thermoelastischen Koeffizienten der für den Bau von Apparaten gebräuchlichen Metalle sind meistens negativ und liegen in der Größenordnung von $10^{-4}$, d. h. sie sind wesentlich größer als die zugehörigen Längenausdehnungskoeffizienten, wie die Tabelle 3 zeigt.

Die Werte von Aluminium für $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ betragen sogar einige Einheiten von $10^{-3}$. Will man kleine negative Werte von $\varepsilon$ bzw. $\varepsilon'$ haben, so stehen nur einige Nickeleisenlegierungen zur Verfügung. Von den Nickeleisenlegierungen ist bereits bekannt, daß bei 36% Nickelgehalt der Wärmeausdehnungskoeffizient $\beta$ sehr gering ist. In Fig. 11 ist der thermoelastische Koeffizient $\varepsilon$ für Nickeleisen in Abhängigkeit von Nickelgehalt mit und ohne Chromzusatz wiedergegeben*). Die einzelnen Werte sind für besonders bezeichnete Legierungen auch aus der Tabelle 3 zu ersehen. Man sieht, daß man durch Veränderung des Nickelgehaltes bei 29,5 und 45% Ni den thermoelastischen Koeffizienten Null erhalten kann. Um jedoch eine Zusammensetzung zu besitzen, die nicht so stark wie die Kurve *a* in Fig. 11 von dem Ni-Gehalt abhängt, wird ein Gehalt von 10 bis 12% Cr zulegiert und man erhält so prinzipiell die handelsüblichen Legierungen Elinvar bzw. WT 10; etwas abweichend davon ist die Legierung Nivarox**) aufgebaut. Man ist durch die meistens für Zeitmeßgeräte (Chronometer, Stimmgabel) verwandten Legierungen in der Lage, den Temperaturkoeffizient eines statischen Schweremessers in der Größenordnung von $10^{-5}$ vorauszuberechnen und es läßt sich dann immer eine zusätzliche Kompensation mit einem anderen Material (Al, Fe-Legierungen, Rost) so anbringen, daß für $1^0$ ein linearer Temperaturkoeffizient in der Größenordnung von $10^{-6}$ möglich ist, da man z. B. Spiralfedern herstellen kann, die sich bei der Erwärmung verkürzen (Indilatans) oder längen. Wesentliche Erfahrungen setzt jedoch ein schnelles künstliches Altern und damit die systematische Beherrschung der elastischen Konstanz voraus.

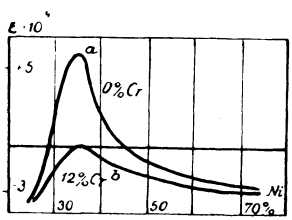


Fig. 11
Thermoelastischer Koeffizient bei Nickeleisenlegierungen

*Jena*, Reichsanstalt für Erdbebenforschung, Juli 1935.

---

*) Y. Dammann, nach P. Chevenard, siehe S. 222 dieser Arbeit; vgl. auch Nickelhandbuch: Nickel—Eisen, Nickel-Informations-Büro Frankfurt a. M.

**) Straumann: siehe S. 233 dieser Arbeit.