tägliche Änderung der Rotationsgeschwindigkeit nur 0.00025^s betragen würde (etwa im Juli 1934), so summieren sich doch diese Gangänderungen zu Standfehlern von 0.2^s bis 0.3^s auf. — Es sei noch kurz darauf hingewiesen, daß die wegen der Polhöhenschwankungen anzubringenden Stand- bzw. Gangkorrektionen bei weitem nicht ausreichen, um den gefundenen Effekt zu erklären.

Es kann jedenfalls als sicher gelten, daß die Gangleistungen der Quarzuhren Effekte aufzufinden gestatten, die bisher durch die Gangschwankungen auch der besten Pendeluhren fast stets verdeckt worden sind. Damit ist ein ganz wesentlicher Fortschritt in der Zeitmessung erzielt worden. der z. B. schon den praktischen Nutzen gebracht hat, daß die Beobachtungszeit für die Pendelmessungen zur geophysikalischen Reichsaufnahme ohne Einbuße an Genauigkeit wesentlich verkürzt werden konnte. — Wegen Einzelheiten muß auf einen ausführlichen in den Astronomischen Nachrichten Nr. 6167/68 soeben erschienenen Aufsatz von Pavel und Uhink verwiesen werden.

Potsdam, den 20. Dezember 1935.

Die potentialtheoretischen Grundlagen der Lehre von der Isostasie

Von **F. Hopfner**, Wien

Bemerkungen zu einigen in letzter Zeit erhobenen Einwänden und Schlüsse auf die Massenkompensation in der Erdkruste auf Grund der Verteilung der Undulationen nach Ackerl und Hirvonen.

1. Ackerls Darstellung der Schwerkraftwerte durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe ist allgemein bekannt. Meines Wissens ist gegen die Existenz dieser Entwicklung keinerlei Einwand erhoben worden, obwohl Ackerl mit dieser Entwicklung eine nichtharmonische Funktion durch eine Reihe von harmonischen Funktionen darstellte. Vergegenwärtigen wir uns die Entstehung der Entwicklung. Ihr liegen die Randwerte der Schwerkraftbeschleunigung am Geoid zugrunde, also die Werte einer Funktion, die als Ortsfunktion am Geoid nicht harmonisch ist. Von diesen Randwerten kann vorausgesetzt werden, daß sie jene Bedingungen erfüllen, die zur Darstellung der Funktionswerte durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe hinreichen. Was leistet die Reihe? Sie stellt die Schwerkraftwerte am Geoid interpolatorisch dar; niemand wird von dieser Darstellung fordern, daß sie auch die Poissonsche Gleichung erfülle, obzwar wir wissen, daß die Schwerkraftbeschleunigung als Ortsfunktion am Geoid jene Gleichung überall im Erdinnern — von den Unstetigkeitsstellen der Dichte abgesehen — befriedigt.

Es kann kein Zweifel bestehen, daß auch gegen eine solche interpolatorische Darstellung jener Randwerte kein Einwand erhoben werden könnte, die die

Potentialfunktion der Erde am Geoid annimmt. Ich kann daher jenen Einwand nicht gelten lassen, der der Entwicklung der Potentialfunktion der Erde in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe die Existenz am Geoid absprechen will*). In der Tat geht nämlich die im Außenraum der Erdmasse bestehende Darstellung der Potentialfunktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe am Geoid in eine interpolatorische Darstellung der Randwerte dieser Funktion über. Diese Erkenntnis kann einem in dieser Zeitschrift von mir veröffentlichten Artikel entnommen werden**).

Die Beantwortung der Frage nach der Figur des Geoids wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{a} T + g - \gamma = 0$$

vermittelt, bei deren Ableitung Größen von der Ordnung des Quadrats der Abplattung vernachlässigt worden sind.

Wir denken uns um den Erdschwerpunkt eine Kugel vom Radius a_1 derart beschrieben, daß sie in keinem ihrer Punkte die Erdmasse schneidet. Von dem partikulären Integral T_1 der Differentialgleichung wird man alsdann fordern, daß es auf der Kugel und in ihrem Außenraum eine endliche und stetige Funktion des Ortes sei, die die Laplacesche Gleichung $\Delta T_1 = 0$ erfülle und im Unendlichen verschwinde; die Ordnung des Verschwindens wird durch die Wahl der Funktion U in der Kräftefunktion $W = U + T$ bedingt. Ich habe daher der Lösung der Aufgabe a. a. O.***) die Form

$$\frac{T}{a_1} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n^{(1)}}{n-1} \left(\frac{a_1}{r}\right)^{n+1}$$

erteilt; die allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n^{(1)}$ werden von der Reihe

$$g - \gamma = \sum_{n=3}^{n=\infty} Y_n^{(1)}$$

geliefert; sie ist die Entwicklung der scheinbaren Schwerkraftstörung $g - \gamma$ auf der Kugel vom Radius a_1.

Wir denken uns sodann um den Erdschwerpunkt eine Kugel mit dem Radius $a_2 < a_1$ beschrieben; deren Punkte teilweise im Außenraum der Erdmasse, teilweise in ihrem Innern liegen; die Kugel schneidet somit die Erdmasse. Die an das partikuläre Integral T_2 der Differentialgleichung zu erhebenden Forderungen unterscheiden sich von den an die Funktion T_1 gestellten Forderungen nur dadurch,

---

*) L. Grabowski: Kann die Laplacesche Differentialgleichung für das Schwerkraftpotential auch innerhalb der Erdkruste als erfüllt angesehen werden? Zeitschr. f. Geophys. **10**, 322 (1934).

) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9, 277 (1933).

***) F. Hopfner: Die praktische Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 277 (1933).

daß T_2 im Außenraum der Erdmasse die Laplacesche Gleichung $\Delta T_2 = 0$ und im Masseninnern — von den Unstetigkeitsstellen der Dichte abgesehen — die Poissonsche Gleichung $\Delta T_2 = -4\pi f \varrho$ zu erfüllen haben wird.

Ich setze die rechte Seite der Poissonschen Gleichung zunächst ohne Bedachtnahme auf ihre Größenordnung gleich Null. Hierdurch wird T_2 eine harmonische Funktion und ich erhalte hierdurch als Lösung der Aufgabe

$$\frac{T_2}{a_2} = \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{Y_n^{(2)}}{n-1} \left(\frac{a_2}{r}\right)^{n+1}$$

mit

$$g - \gamma = \sum_{n=3}^{n=\infty} Y_n^{(2)},$$

worin $Y_n^{(2)}$ die allgemeine Kugelfunktion in der Entwicklung der scheinbaren Schwerkraftstörung auf der Kugel vom Radius a_2 bedeutet.

Auch dieses partikuläre Integral befriedigt die partielle Differentialgleichung. Was bedeutet es aber? Die Antwort liegt auf der Hand. Es ist eine interpolatorische Darstellung der Funktion T_2; es liefert nämlich die Werte von T_2 in den Punkten der Kugel vom Radius a_2, erfüllt aber nicht die Poissonsche Gleichung. Mit anderen Worten, das partikuläre Integral (2) ist jene Entwicklung von T_2 nach Kugelfunktionen, die sich bei vorgegebenen Werten von T_2 in den Punkten der Kugel vom Radius a_2 herstellen ließe und über deren Existenz kein Zweifel bestehen kann.

Wir kennen das unterscheidende Merkmal zwischen den Funktionen T_1 und T_2; die Funktion T_1 ist auf der Kugel vom Radius a_1 und in ihrem Außenraum harmonisch; dagegen ist T_2 auf der Kugel vom Radius a_2 und in ihrem Außenraum nur in jenen Punkten harmonisch, die nicht Punkte der Erdmasse sind. Es ist also die Poissonsche Gleichung $\Delta T_2 = -4\pi f \varrho$, wodurch die Scheidung zwischen den Funktionen T_1 und T_2 herbeigeführt wird.

Glücklicherweise ist in den Punkten der Erdkruste die Ordnung der Zahl $4\pi f \varrho$ höher als die Ordnung des Quadrates der Abplattung; Größen solcher Ordnung sind schon in der partiellen Differentialgleichung vernachlässigt. Man kann daher auch in den Bedingungen, die T_2 erfüllen soll, solche Größen vernachlässigen, also in den Punkten der Erdkruste $\Delta T_2 = 0$ setzen, und infolgedessen sagen, daß bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung des Quadrats der Abplattung die Funktion T_2 mit der Funktion T_1 identisch ist. Mit dieser Annahme werden auch die partikulären Integrale (1) und (2) für $a_1 = a_2$ miteinander identisch, d. h. es ist in den Punkten der Erdkruste praktisch $Y_n^{(1)} = Y_n^{(2)}$; denn sowohl die Funktion T_1 als auch die Funktion T_2 läßt sich in einer und nur einer Weise in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln; wenn daher das die beiden Funktionen unterscheidende Merkmal vernachlässigt werden kann, sind auch die beiden Entwicklungen miteinander identisch.

Wir tragen in die Kräftefunktion $W = U + T$ der Erde das partikuläre Integral (2) ein; wir erhalten hierdurch eine Darstellung der Funktion W, die in den Punkten der Erdkruste eine interpolatorische Darstellung jener Funktion ist. In diesen Punkten besitzt nämlich die gewählte Darstellung von W keine zweite Ableitung. Hiermit erledigt sich der Einwand jener Kritiker, die für solche Punkte die Poissonsche Gleichung der Funktion W aufstellten und hieraus Widersprüche in der gewählten partikulären Lösung ableiteten. Dagegen möchte ich den Hinweis nicht unterlassen, daß die gewählte Darstellung für W in jedem Punkt des Geoids die erste Ableitung nach der Flächennormalen besitzt.

Schließlich soll noch auf den Einwand zurückgekommen werden, daß die rechte Seite der Poissonschen Gleichung, d. i. $-4\pi f \varrho$, eine Dimension besitze und daher mit der reinen Zahl α^2 (Quadrat der Abplattung) nicht verglichen werden könne. Dieser Einwand dürfte nur durch die von mir gewählte Ausdrucksweise hervorgerufen worden sein. Zur Klarstellung weise ich zunächst darauf hin, daß in der partiellen Differentialgleichung genau genommen Größen von der Ordnung $\alpha^2\gamma \sim 10^{-2}$ cm sec^{-2}, somit Größen der Ordnung von rund 10 Milligal vernachlässigt sind.

Um $4\pi f \varrho$, das die Dimension sec^{-2} besitzt, in Milligal ausgedrückt zu erhalten, bilden wir das Produkt von T_2 in den Kugelradius a_2; alsdann besitzt nämlich $\Delta(a_2 T_2)$ die Dimension cm sec^{-2}; wir dividieren sodann $\Delta(a_2 T_2)$ durch die Maßzahl des Radius; setzt man diese Maßzahl mit rund 6.4×10^8 an, so ergibt sich zunächst

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta(a_2 T_2)}{6.4\times 10^8} = -\frac{4\pi f a_2 \varrho}{6.4\times 10^8}.$$

Für die Punkte der Erdkruste ist in runden Zahlen $a_2 = 6.4\times 10^8$ cm, $\varrho = 3$ cm^{-3}g: da noch $f = 6.6\times 10^{-8}$ cm^3 sec^{-2} g^{-1} gesetzt werden kann, erhält man aus der vorangehenden Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta T_2 &= -4\times 3.1\times 6.6\times 3\times 10^{-8} \text{ cm sec}^{-2}\\ &= -2.5\times 10^{-6} \text{ cm sec}^{-2} = -0.0025 \text{ Milligal.}\end{aligned}$$

Es ist somit $4\pi f \varrho$ — ausgedrückt in Milligal — von höherer Ordnung als $\alpha^2\gamma$. Dieses Ergebnis habe ich a. a. O.[2]) — allzukurz, wie ich zugebe — durch die Ungleichung $4\pi f \varrho < \alpha^2$ ausdrücken wollen.

2. Nach diesen Bemerkungen möchte ich zu jenen Deutungsversuchen Stellung nehmen, die aus den Senkungen des Geoids über den Kontinenten und seinen Hebungen über den Ozeanen — ich generalisiere in diesem Abschnitte, wie es in der Lehre von der Isostasie schon einmal üblich ist — auf eine isostatische Massenlagerung in der Erdkruste schließen. Es ist gewiß eine auffällige Tatsache, daß sowohl Ackerl als auch Hirvonen auf verschiedenen Rechengrundlagen zu qualitativ fast identischen Bildern über die Verteilung der Undulationen gelangt sind. Natürlich sind Hirvonens Undulationen sehr klein, da er durch Anwendung der Freiluftformel auf die Beobachtungswerte bereits im Vorhinein für kleine Werte der Undulationen vorgesorgt hatte.

Bei Besprechung der potentialtheoretischen Grundlagen der Lehre von der Isostasie in einer vor mehreren Jahren veröffentlichten Abhandlung*) hatte ich — wie damals allgemein üblich — angenommen, daß die Hebungen des Geoids über den Kontinenten und seine Senkungen über den Ozeanen zu vermuten seien und hieraus geschlossen, daß das Schweredefizit über den Festländern und der geringe Schwereüberschuß über den Weltmeeren möglicherweise nur eine Folge des bei der Diskussion der scheinbaren Schwerkraftstörungen übersehenen Terms von **Bruns** sein könnte. Eine Revision der damaligen Besprechung auf Grundlage der neuen Ergebnisse **Ackerls** und **Hirvonens** scheint mir daher am Platz zu sein.

Wir gehen von der Gleichung

$$g-\gamma = g-\gamma' - \frac{\partial \gamma}{\partial n}\zeta$$

aus, die die scheinbare Schwerkraftstörung $g-\gamma$ mit der wahren Schwerkraftstörung $g-\gamma'$ verbindet. Wenn ζ — die Undulation — sehr klein ist, haben beide Schwerkraftstörungen einerlei Vorzeichen; die an das Vorzeichen der scheinbaren Schwerkraftstörung geknüpften Schlüsse behalten alsdann auch für die wahre Schwerkraftstörung ihre Gültigkeit.

Dieses gleiche Vorzeichen besitzen die beiden Schwerkraftstörungen nach den neuen Ergebnissen über die Verteilung der Undulationen aber im allgemeinen auch dann, wenn wir für ζ so große Werte zulassen, daß der Term von **Bruns** gegenüber der wahren Schwerkraftstörung $g-\gamma'$ nicht vernachlässigt werden darf. Da nämlich der Term von **Bruns**

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n}\zeta, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} < 0,$$

für Senkungen ($\zeta > 0$) negativ und für Hebungen ($\zeta < 0$) positiv ist, kann für die scheinbare Schwerkraftstörung $g-\gamma$ auf einer Senkung nur dann die Ungleichung $g-\gamma < 0$ gelten, wenn die wahre Schwerkraftstörung die Ungleichung

$$g-\gamma' < -\frac{\partial \gamma}{\partial n}\zeta$$

befriedigt, also auch negativ ist. Auf einer Hebung kann die Ungleichung $g-\gamma > 0$ nur dann bestehen, wenn die wahre Schwerkraftstörung

$$g-\gamma' > \frac{\partial \gamma}{\partial n}\zeta,$$

also positiv ist.

Nach **Ackerl** erreichen die Undulationen des Geoids vielfach Beträge von $\pm$ 400 m und darüber. Seine größten Senkungen liegen in Tibet und im Himalaya, in Zentralafrika und über den Rocky Mountains, hingegen seine größten Hebungen über den Weltmeeren.

*) F. **Hopfner**, Zur Begründung der Lehre von der Isostasie, Gerlands Beitr. z. Geophys. **22**, 115 (1929).

Da die Beobachtungen für die scheinbare Schwerkraftstörung $g - \gamma$ negative Werte hauptsächlich über den Kontinenten und positive Werte über den Ozeanen ergeben haben, dürfen wir auf Grund der vorangehenden Überlegungen schließen, daß auch die wahre Schwerkraftstörung $g - \gamma'$ daselbst im großen und ganzen negativ bzw. positiv ist. Hierdurch gewinnen die Schlüsse, die man an die regionale Vorzeichenverteilung der scheinbaren Schwerkraftstörung $g - \gamma$ geknüpft hat, an Wahrscheinlichkeit.

Indessen kommt diesen Schlüssen dennoch keinerlei Beweiskraft für das Bestehen einer isostatischen Massenanordnung in der Erdkruste zu. Denn wie ich in einer kürzlich erschienenen Abhandlung*) gezeigt habe, läßt sich durch eine andere Wahl des Niveausphäroids unschwer ein Vorzeichenwechsel in den Undulationen herbeiführen. Es liegt an der Vieldeutigkeit des Umkehrproblems der Potentialtheorie, daß aus den Erscheinungen im Schwerefelde der Erde allein keinerlei Beweismittel für die Lehre von der Isostasie beigebracht werden können.

Es ist nur eine einzige Tatsache, die nicht leicht anders als im Sinne der Lehre von der Isostasie gedeutet werden kann, nämlich die Tatsache, daß auch nach den Ergebnissen Ackerls die Undulationen des Geoids verhältnismäßig recht klein sind. Geht man nämlich bei synthetischen Untersuchungen über die Größe der Undulationen von der Annahme aus, daß die dem Niveausphäroid aufgesetzten Massen nicht kompensiert sind, so erhält man, wie die Arbeiten Maders und vor ihm die Untersuchungen Bruns erkennen lassen, Werte für die Undulationen, die die von Ackerl berechneten Werte beträchtlich überschreiten. Aber natürlich können nur Erfahrungstatsachen, die nicht dem Schwerefelde der Erde entnommen sind, die Vermutung über eine vielleicht vorhandene Massenkompensation zur vollen Gewißheit erheben, zumal da auch für die Kleinheit der Undulationen andere Erklärungsmöglichkeiten zweifellos in Frage kommen.

Ein Hilfsapparat zur harmonischen Analyse

Von **F. Reuter**, Obersuhl — (Mit 1 Abbildung.)

Bei der harmonischen Analyse leisten gute Dienste die bekannten „Rechentafeln zur harmonischen Analyse“ und der „Handweiser zur harmonischen Analyse“ von L. W. Pollak. Die Bestimmung zahlreicher Amplituden und Phasen einer meteorologischen Welle (Luftdruck) aus den berechneten Komponenten (p, q) der Schwingungsvektoren kann man aber, um Zeit zu sparen, auf graphischem Wege durch vektorielle Addition vornehmen. Aus diesem Grunde wurde der in Fig. 1 dargestellte Apparat konstruiert und gebaut.

*) F. Hopfner: Die Relativität der Undulationen, Zeitschr. f. Geophys. **10**, 279 (1934).