

Werk

Jahr: 1936

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:12

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0012

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0012

LOG Id: LOG_0042

LOG Titel: Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Instituts in Göttingen. XXV. Theorie der Schwebungen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Instituts in Göttingen

XXV. Theorie der Schwebungen

Von **Rolf Bungers**, Göttingen — (Mit 7 Abbildungen)

Die theoretische Untersuchung der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen benachbarter Frequenz erfordert zunächst eine genaue Definition des Begriffes „veränderliche Frequenz“. Die möglichen entstehenden Schwebungsbilder werden diskutiert, und es werden Beispiele für die einzelnen Fälle angeführt. Im Schwebungsminimum können bisher nicht behandelte, anormale Verhältnisse auftreten. Im zweiten Kapitel werden Schwebungsbilder diskutiert, die in der neueren angewandten Geophysik auftreten, wo die Teilschwingungen nur noch angenähert harmonisch sind. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf Überlagerung von Wellen übertragen und die mathematische Analogie zwischen Interferenzerscheinungen und Schwebungserscheinungen festgestellt.

Einleitung

Das Problem der Schwebungen ist früher einmal der Gegenstand einer erregten Diskussion gewesen, die zwischen Waetzmann und Budde in der physikalischen Zeitschrift 1917 und 1918 geführt wurde¹⁾ bis ⁴⁾. Es handelte sich dabei um ein akustisches Problem, nämlich um die Frage, ob eine aus zwei Tönen von benachbarter Frequenz zusammengesetzte Luftschwingung noch als „Ton“ anzusprechen sei oder nicht. In anderen Gebieten der Physik war wohl damals das Auftreten von Schwebungserscheinungen nur wenig bekannt. Heute aber läßt die moderne Entwicklung der angewandten Geophysik das Problem der Schwebungen wieder auftauchen, und zwar wegen der äußerst genauen optischen Aufzeichnungsmethoden in einer Form, die eine erneute und viel genauere mathematische Diskussion der Schwebungsbilder verlangt, als das bei den früheren Untersuchungen akustischer Probleme nötig war. Zwar ist auch früher bezüglich der Diskussion von Schwebungskurven schon vieles geschehen; jedoch sind noch nicht alle möglichen Fälle so erschöpfend behandelt und alle Begriffe so streng gefaßt, wie das heute als notwendig erscheint.

Es handelt sich in der angewandten Geophysik in erster Linie um Untersuchungen von Boden- und Gebäudeschwingungen, wo Schwebungen auftreten. Die experimentellen Arbeiten von G.-A. Schulze⁵⁾ und R. Köhler⁶⁾ (Geophysikalisches Institut Göttingen) regen zu einer mathematischen Behandlung an, um geeignete Auswertungsmethoden zu schaffen und die Brauchbarkeit und Entwicklungsfähigkeit der experimentellen Methoden zu prüfen. Auf Anregung von Herrn Prof. Angenheister beschäftigte sich daher der Verfasser mit diesem Problemkreis. Schwebungen treten aber auch in der reinen Geophysik auf, vor allem in der

Erdbebenseismik. Bekanntlich enthält fast jedes größere Erdbeben im Zuge der langen Wellen einige Schwebungsbilder, die freilich bis heute noch nicht einwandfrei gedeutet worden sind. Auch hierbei kann vielleicht eine recht genaue mathematische Diskussion der Schwebungen weiterführen.

In dieser Arbeit wollen wir in der Hauptsache nur „synthetisch“ vorgehen; d. h. wir wollen die möglichen Fälle von gewöhnlichen Schwebungsbildern (mit stationären Teilschwingungen) vollständig diskutieren und dann noch einige Fälle von nichtstationären Teilschwingungen behandeln, so, wie sie gerade in den genannten Gebieten der Praxis auftreten. Wenn wir uns hierbei mit diesen zwei Fällen begnügen, so geschieht dies deshalb, weil es uns wesentlich darauf ankommt, die Methoden der Diskussion klarzustellen, um dem Experimentator die Möglichkeit zu geben, in ähnlichen Fällen in gleicher Weise vorzugehen. Wie wir sehen werden, lassen sich solche Fälle großenteils auf den Fall stationärer Teilschwingungen zurückführen, weshalb wir letzteren so ausführlich behandeln.

In einer weiteren Arbeit soll dann diese Arbeit ihre analytische Ergänzung finden. Es sollen dort Auswertmethoden angegeben und deren Brauchbarkeit und Genauigkeit untersucht werden.

Am Schlusse dieser Arbeit (§ 6) gehen wir noch kurz auf die Übertragung der Schwebungserscheinungen auf Wellen ein.

I. Gewöhnliche Schwebungen

Bei der mathematischen Behandlung der gewöhnlichen Schwebungen handelt es sich um die Diskussion der Funktion

$$y(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cdot \sin \omega_2 t \quad \dots \dots \dots (1)$$

Das ist der allgemeinste Fall der Überlagerung zweier reiner Sinusschwingungen mit den Amplituden A_1 und A_2 und den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 . Ihre Phasenverschiebung zur Zeit $t = 0$ ist φ ; es darf $0 \leq \varphi < 2\pi$ gesetzt werden. Diese Funktion ist schon vielfach diskutiert worden; jedoch wollen wir dies hier noch eingehender tun, als es bisher geschehen ist, vor allem die Begriffe scharf und unmißverständlich fassen (z. B. den Begriff der „Frequenz“), und sämtliche Sonderfälle berücksichtigen. Freilich haben die hiermit zusammenhängenden Probleme in dem bisherigen Hauptanwendungsgebiet, der Akustik, nicht die hervorragende Bedeutung wie bei den modernen Boden- und Bauuntersuchungen. Wegen der letzteren ist es aber um so mehr notwendig, sich über die mathematischen Gesetze äußerste Klarheit zu verschaffen; denn nur so ist eine Verwertung derselben in der Praxis und eine Weiterentwicklung der Methoden möglich, und unklare mathematische Formulierung hat oft fehlerhafte physikalische Schlüsse zur Folge.

§ 1. Frequenz und Schwebungskurve. Wir wollen im folgenden allgemein Bekanntes nur kurz streifen und dafür Neues ausführlicher behandeln und die An-

schauung durch Figuren und Zahlenbeispiele zu unterstützen suchen. Mit unsern Bezeichnungen und Ausdrücken schließen wir uns dabei möglichst eng an H. Martin⁷⁾ an.

Die Frequenzen in (1) bezeichnen wir mit ν_1 und ν_2 , so daß

$$2 \pi \nu_1 = \omega_1; \quad 2 \pi \nu_2 = \omega_2$$

ist. Wir können nun ν_1 und ν_2 als ganze Zahlen voraussetzen, ohne der Allgemeingültigkeit bei den Anwendungen Abbruch zu tun. Denn da wir in der Praxis doch nur die Frequenzen bis auf eine bestimmte Dezimale angeben können, so können wir zunächst das Verhältnis ν_1/ν_2 als rational voraussetzen, und wenn wir uns noch für die Rechnung nicht gerade auf die Sekunde als Zeiteinheit festlegen wollen, so können wir ν_1 und ν_2 als ganze Zahlen wählen bei geeigneter Wahl der Zeiteinheit.

Weiter wollen wir die Voraussetzung machen

$$1 < \frac{\nu_1}{\nu_2} \ll 2 \quad \left(\text{d. h. } \frac{\nu_1}{\nu_2} \text{ nur wenig } > 1 \right): \dots \dots \dots (2)$$

denn nur unter dieser Bedingung können wir von „Schwebungen“ reden: auch können wir ν_1 immer als die größere Frequenz beibehalten.

Der Fall gleicher Amplituden

$$A_1 = A_2$$

(„reine Schwebung“) ist häufig diskutiert [vgl. z. B. ⁸⁾], so daß wir ihn hier übergehen wollen. Wir setzen also in Zukunft immer $A_1 \neq A_2$ voraus.

Die Gleichung (1) geht durch trigonometrische (oder auch geometrische) Umformung über in

$$y(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos(\Delta \omega t + \varphi)} \left\{ \begin{array}{l} \cdot \sin \left[\omega t + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \operatorname{tg} \frac{\Delta \omega t + \varphi}{2} \right) \right], \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. (3)$$

worin zur Abkürzung

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \quad \text{und} \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta \omega$$

gesetzt ist. Diese Umformung ist aber noch nicht vollständig; denn (1) ist eine eindeutige stetige Funktion, während (3) mehrdeutig ist, einmal wegen der Wurzel, dann wegen des arctg. Nun sieht man aber, daß beides auf dasselbe, nämlich auf die Vorzeichenbestimmung von $y(t)$ hinauskommt; denn vermehren wir den arctg etwa um π , so wechselt der sin sein Vorzeichen. Wir können daher die Wurzel immer als positiv annehmen und nun nach dem richtigen Zweig des arctg fragen. Den erhalten wir aber sofort aus der Forderung der Stetigkeit: beim Übergang von

$$\Delta \omega t + \varphi < (2z + 1) \cdot \pi \quad \text{zu} \quad \Delta \omega t + \varphi > (2z + 1) \cdot \pi. \quad z \text{ ganze Zahl.}$$

haben wir zu dem nächsthöheren (bzw. nächsttieferen, je nachdem $A_1 \geq A_2$ ist) Zweig des \arctg überzugehen, also das Argument des \sin um π zu erhöhen (bzw. zu erniedrigen), wobei nunmehr der \arctg auf *einen* Zweig beschränkt bleibt, d. h. wir haben das Vorzeichen von $y(t)$ an den Zeitpunkten t , für die

$$\Delta \omega t + \varphi = (2\kappa + 1) \cdot \pi$$

ist, umzukehren. Zu einer Anfangszeit t erhalten wir das richtige Vorzeichen, d. h. den richtigen Zweig des \arctg durch direkten Vergleich mit (1)*).

Die Größe

$$s(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\Delta \omega t + \varphi)}$$

in (3) bezeichnet man als — veränderliche — Amplitude von $y(t)$. Als Funktion von t nennt man sie „Schwebungskurve“. Sie berührt die Kurve $y(t)$ an den Punkten, wo der \sin in (3) gleich $+1$ ist. Die Berührungspunkte fallen nicht mit den Maxima der Funktion $y(t)$ zusammen, liegen aber im allgemeinen nicht weit von ihnen entfernt.

Unter der „Kreisfrequenz“ von $y(t)$ versteht man allgemein die zeitliche Ableitung des Arguments des \sin *). Hierbei ist aber auf folgendes zu achten. Physikalisch ist ja die Frequenz (gleich Kreisfrequenz durch 2π) eigentlich die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit. Wenn diese mit der Zeit veränderlich ist, muß man sie mit Hilfe der zeitlichen Ableitung definieren. Wir können, indem wir nötigenfalls das Vorzeichen der Phase umkehren und π hinzufügen, immer erreichen, daß diese Ableitung zum Anfang des betrachteten Zeitintervalls nicht negativ ist. Nun kann es aber vorkommen, daß diese Ableitung ihr Vorzeichen wechselt. Wir können dann zwar bei der mathematischen Diskussion den Ausdruck „Frequenz“ beibehalten, physikalisch hat aber eine „negative Frequenz“ keinen Sinn mehr. Wir wollen daher sagen, daß einer \sin -Funktion in Gebieten, in denen die Ableitung des Arguments durch Vorzeichenwechsel negativ wird, physikalisch keine Frequenz zukommt. Dies ist, wie sich zeigen wird, für die Auswertung aufgezeichneter Schwebungskurven äußerst wichtig. Es besteht zwar bei dieser Definition der Frequenz noch eine gewisse Willkür wegen der Wahl des Anfangs des Zeitintervalls, doch werden, wie in dem hier behandelten Falle, die Forderungen des speziellen physikalischen Problems immer eine Willkür ausschließen.

Die Schwebungskurve schwankt periodisch zwischen den Werten $A_1 + A_2$ und $|A_1 - A_2|$. Die Dauer einer Schwebung (die „Schwebungsperiode“ oder auch kurz „Schwebung“) ist, wenn wir $\nu_1 - \nu_2$ gleich der ganzen Zahl k setzen, gleich $1/k$, [nicht, wie bei Martin ⁷⁾, nur bei reinen Schwebungen]. $y(t)$ ist eine periodische Funktion; ihre Periode ist, wenn d der größte gemeinsame Teiler von ν_1 und ν_2 ist, gleich $1/d$. In die Periode fallen also k/d Schwebungen.

*) Die Wahl des Zweiges des \arctg ist natürlich bis auf ein Vielfaches von 2π willkürlich; man wählt ihn beim Zeichnen der Phase $\Phi(t)$ von y daher praktisch so, daß $\Phi(t)$ nicht unnötig groß wird, am Anfang z. B. zwischen 0 und 2π liegt. In Fig. 2 ist für den Anfang $\Delta \omega t + \varphi = 0$ der \arctg 0 gleich -5π gesetzt.

§ 2. Die Anzahl der Nullstellen. Wir wollen nun die Anzahl der Nullstellen der Funktion $y(t)$ innerhalb ihrer Periode bestimmen. Dazu brauchen wir offenbar nur die Anzahl der Nullstellen des sin in (3) zu bestimmen, dessen Argument wir zur Abkürzung mit $\Phi(t)$ bezeichnen wollen. Wir bilden zunächst die Kreisfrequenz $\Phi'(t)$. Es ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\Phi'(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{(A_1^2 - A_2^2) \cdot (\omega_1 - \omega_2)}{2[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\Delta\omega t + \varphi)]}$$

Diese Funktion ist wegen $A_1 \neq A_2$ überall stetig und periodisch mit der Periode der Schwebung. Sie hat innerhalb einer Schwebung, z. B. für

$$-\frac{\varphi}{\Delta\omega} \leq t < \frac{2\pi - \varphi}{\Delta\omega},$$

zwei Extremwerte, nämlich für

$$\Delta\omega t_1 + \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\omega t_2 + \varphi = \pi,$$

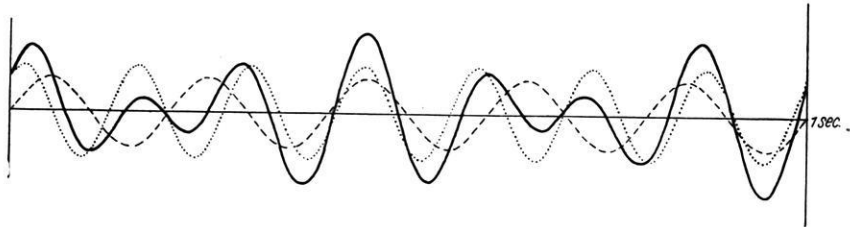


Fig. 1. Überlagerung zweier Sinusschwingungen mit den Frequenzen 7 und 5 und dem Amplitudenverhältnis 4:3 zu einem Schwebungsbild. Gleichung desselben:

$$y(t) = \sqrt{25 + 24 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sin\left[12\pi t + \frac{\pi}{8} + \arctg\left(\frac{1}{7} \operatorname{tg}\left\{2\pi t + \frac{\pi}{8}\right\}\right)\right].$$

d. h. im Maximum und Minimum der Schwebungskurve. Die zugehörigen Werte der Kreisfrequenz sind

$$\Phi'(t_1) = \frac{A_1\omega_1 + A_2\omega_2}{A_1 + A_2} \quad \text{und} \quad \Phi'(t_2) = \frac{A_1\omega_1 - A_2\omega_2}{A_1 - A_2} \dots (4)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $A_1 > A_2$.

In diesem Falle ist $\Phi'(t_2)$ Maximum und $\Phi'(t_1)$ Minimum. Weiter ist

$$\Phi'(t_1) > 0 \quad \text{und} \quad \Phi'(t_2) > 0,$$

weil ja auch nach (2) $\omega_1 > \omega_2$ vorausgesetzt ist. Aus der Stetigkeit und der Periodizität folgt daher, daß überall

$$\Phi'(t) > 0$$

ist. Da bei t_1 auch das Maximum und bei t_2 das Minimum der Schwebungskurve liegt, so können wir sagen, daß im Falle $A_1 > A_2$ die Frequenz von $y(t)$ periodisch

mit der Schwebungskurve von ihrem größten Wert im Schwebungsminimum zu ihrem kleinsten Wert im Schwebungsmaximum absinkt. Das ist, wie aus der

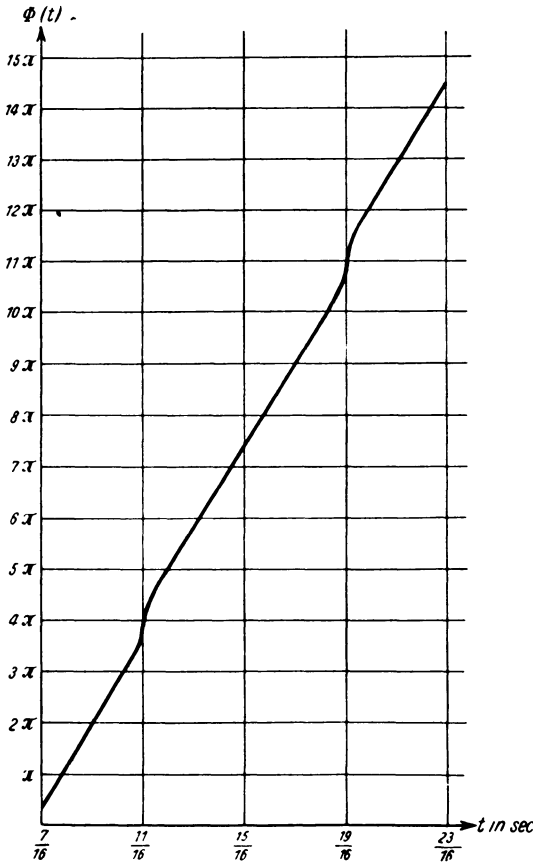


Fig. 2. Der Verlauf der Phase $\Phi(t)$ des Schwebungsbildes in Fig. 1:

$$\Phi(t) = 12\pi t + \frac{\pi}{8} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7} \operatorname{tg}\left\{2\pi t + \frac{\pi}{8}\right\}\right).$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot \alpha &= \omega t + \frac{\omega}{d} + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta\omega t + \varphi}{2}\right) + \frac{k}{d} \cdot \pi \\ &- \left\{ \omega t + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta\omega t + \varphi}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Denn $\Delta\omega \cdot t$ nimmt wegen $\Delta\omega = 2\pi k$ während einer Periode um $2\pi k/d$ zu, überschreitet also k/d -mal einen Wert $(2z + 1) \cdot \pi$. Es folgt

$$\alpha = \frac{\nu_1 + \nu_2}{d} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{d}, \quad \alpha = \frac{2\nu_1}{d}.$$

Fig. 1 ersichtlich, auch physikalisch sinnvoll; die Abstände der Nullstellen nehmen nämlich vom Schwebungsmaximum bis zum Minimum ab, umgekehrt wieder zu.

Um nun die Anzahl der Nullstellen von $y(t)$ innerhalb einer Periode der Länge $1/d$ zu finden, brauchen wir nur zu fragen, wie oft $\Phi(t)$ einen Wert $z \cdot \pi$, $z = 0, 1, 2, \dots$, annimmt. Wir denken uns dazu $\Phi = \Phi(t)$ gezeichnet (Fig. 2) und außerdem die Geraden $\Phi = z \cdot \pi$. Jede Gerade schneidet nun die Kurve $\Phi(t)$ wegen $\Phi'(t) > 0$ nur einmal, so daß uns der Ausdruck

$$\alpha = \frac{\Phi\left(t + \frac{1}{d}\right) - \Phi(t)}{\pi}$$

die gesuchte Anzahl liefert. Nun ist unter Beachtung der oben diskutierten Vieldeutigkeit des arctg

Das ist aber auch die Anzahl der Nullstellen der Funktion $A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ im Intervall $1/d$; d. h.:

Falls die Teilschwingung mit größerer Frequenz die größere Amplitude hat, ist die Anzahl der Nullstellen der zusammengesetzten Schwingung in einer Periode gleich der Anzahl der Nullstellen der Teilschwingung mit größerer Frequenz.

Wir haben diese bekannte Tatsache so ausführlich begründet, weil, wie sich zeigen wird, die Verhältnisse im zweiten Fall zum Teil erheblich anders liegen, was bisher noch nie erwähnt worden ist.

2. $A_1 < A_2$.

Man sieht hier zunächst, daß in diesem Falle von den beiden Größen (4) $\Phi'(t_1)$ Maximum und $\Phi'(t_2)$ Minimum ist. Zwar ist auch hier

$$\Phi'(t_1) > 0;$$

aber $\Phi'(t_2)$ ist nicht mehr für jedes Amplitudenverhältnis positiv. Wenn nämlich

$$1 > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

ist, dann ergibt sich

$$\Phi'(t_2) < 0,$$

d. h. die Frequenz wird für ein gewisses Intervall um t_2 negativ, so daß hier der Begriff seinen physikalischen Sinn verliert. Wir unterscheiden demnach zwei Unterfälle:

a) $\frac{\omega_2}{\omega_1} \geq \frac{A_1}{A_2}$.

Hier liegen die Verhältnisse ähnlich wie im Falle 1. Es ergibt sich entsprechend:

Falls die Teilschwingung mit kleinerer Frequenz die größere Amplitude hat und falls die obige Ungleichung erfüllt ist, ist die Anzahl der Nullstellen der zusammengesetzten Schwingung in einer Periode gleich der Anzahl der Nullstellen der Teilschwingung mit kleinerer Frequenz.

Wie sich die Änderung des Arguments $\Phi(t)$ auf die Schwebungsperiode verteilt, ist bei Martin⁷⁾ ausführlich behandelt, so daß wir hier nicht darauf einzugehen brauchen.

b) $1 > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Wegen

$$\Phi'(t_1) > 0 \quad \text{und} \quad \Phi'(t_2) < 0$$

ergibt sich hier, daß innerhalb einer Schwebungsperiode $\Phi(t)$ ein Maximum und ein Minimum hat. Die Methode zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen wie im ersten Falle ist daher hier nicht anwendbar. Vielmehr kann es vorkommen, daß

die Kurve $\Phi(t)$ von einer Geraden $\Phi = z \cdot \pi$ einmal berührt und einmal geschnitten oder dreimal geschnitten wird, so daß $y(t)$ eine oder zwei Nullstellen pro Schwe-

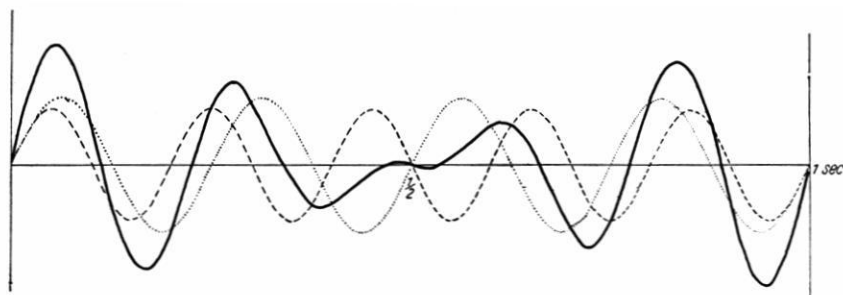


Fig. 3. Überlagerung zweier Sinusschwingungen mit den Frequenzen 5 und 4 und dem Amplitudenverhältnis 5:6 zu einem Schwebungsbild. Gleichung desselben:

$$y(t) = \sqrt{61 + 60 \cos 2\pi t} \cdot \sin \left[9\pi t - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{11} \operatorname{tg} \pi t \right) \right].$$

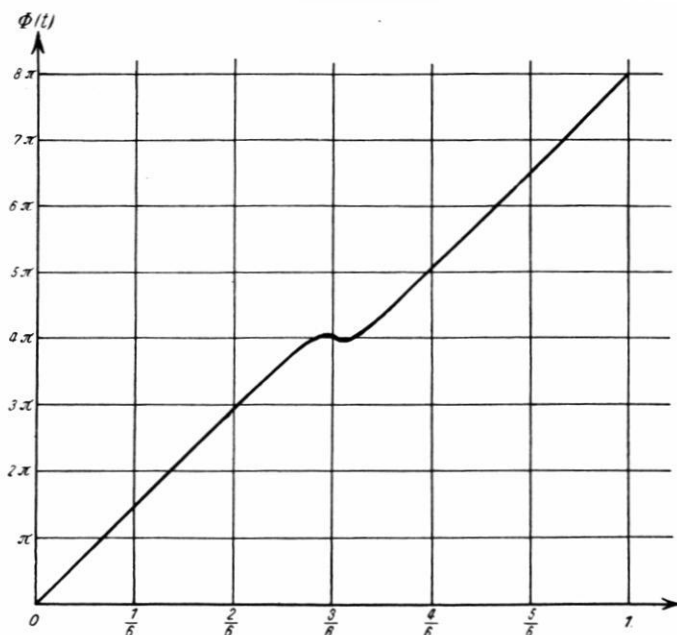


Fig. 4. Der Verlauf der Phase $\Phi(t)$ des Schwebungsbildes in Fig. 3:

$$\Phi(t) = 9\pi t - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{11} \operatorname{tg} \pi t \right). \quad \text{Beispiel für „negative“ Frequenz}$$

gungsperiode mehr enthält. Diese kritische Stelle liegt also immer in der Nähe des Minimums der Schwebungskurve. In den Fig. 3 und 4 ist ein solcher Fall dargestellt.

Aus Fig. 4 ist auch ersichtlich, daß das auftretende Maximum und Minimum nicht immer die Nullstellenzahl zu erhöhen braucht (vgl. Fig. 5). Es ist aber fraglich, ob ein solches Maximum und Minimum in der Funktion $\Phi(t)$ auch immer einem Maximum und Minimum bei $y(t)$ entsprechen. Dies ist tatsächlich der Fall.

Um speziell das zu beweisen und um allgemein weitere Aussagen über die Gestalt der Schwebungsbilder zu gewinnen, wollen wir in gleicher Weise wie die Nullstellen von $y(t)$ auch ihre Extremwerte diskutieren.

§ 3. *Gestalt und Anzahl der Extremwerte.* Wir fragen also nach den Nullstellen von $y'(t)$. Es ist nach (1)

$$y'(t) = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t.$$

Das schreiben wir

$$y'(t) = A_1 \omega_1 \sin(\pi/2 + \omega_1 t + \varphi) + A_2 \omega_2 \sin(\pi/2 + \omega_2 t).$$

Dies stimmt mit (1) formal genau überein. Also liefert die zu (3) analoge Umformung

$$y'(t) = \sqrt{A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2 + 2 A_1 A_2 \omega_1 \omega_2 \cdot \cos(\Delta \omega t + \varphi)} \cdot \sin \left[\omega t + \frac{\varphi + \pi}{2} + \arctg \left(\frac{A_1 \omega_1 - A_2 \omega_2}{A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta \omega t + \varphi}{2} \right) \right].$$

Wir diskutieren diese Funktion in gleicher Weise wie $y(t)$. Der Charakter von $y'(t)$ als Schwebung ist erhalten geblieben, da die Frequenzen der Teilschwingungen die gleichen sind wie bei $y(t)$. Auch die Schwebungsperiode ist hier die gleiche wie dort. Die Extremwerte der Kreisfrequenz innerhalb einer Schwebung sind hier entsprechend, wenn wir zunächst den Fall $A_1 \omega_1 = A_2 \omega_2$ ausschließen,

$$\frac{A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2}{A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2} \quad \text{und} \quad \frac{A_1 \omega_1^2 - A_2 \omega_2^2}{A_1 \omega_1 - A_2 \omega_2}.$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

1. $\frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$. (Für $A_1 = A_2$ auch gültig.)

Das entspricht also den früheren Fällen 1 und 2b. Wir erhalten das Gesetz:

Falls die obige Ungleichung erfüllt ist, ist die Anzahl der Extrema der zusammengesetzten Schwingung in einer Periode gleich der Anzahl der Extrema der Teilschwingung mit größerer Frequenz.

Es ist leicht einzusehen, daß es sich bei den Extrema nur um Maxima und Minima handelt, die abwechselnd aufeinander folgen und durch Nullstellen getrennt sind, abgesehen von dem möglichen oben unter 2b behandelten Ausnahmefall im Schwebungsminimum. Ein solcher Ausnahmefall ist in Fig. 5 dargestellt. Ihm entspricht eine Kurve $\Phi(t)$, die zwar ein Maximum und ein Minimum hat, aber von keiner Geraden $\Phi = \nu \cdot \pi$ mehr als einmal geschnitten wird.

Der angekündigte Beweis ist damit schon erbracht.

$$2a. \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3} \geq \frac{A_1}{A_2}.$$

In diesem Falle verhalten sich die Extrema wie im früheren Fall 2a die Nullstellen. Es gilt entsprechend:

Falls die obige Ungleichung erfüllt ist, ist die Anzahl der Extrema der zusammengesetzten Schwingung in einer Periode gleich der Anzahl der Extrema der Teilschwingung mit kleinerer Frequenz.

Wieder handelt es sich nur um Maxima und Minima, die hier stets durch Nullstellen getrennt sind.

$$2b. \frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3}.$$

Das dem früheren entsprechende Ergebnis ist hier: Es kann vorkommen, daß $y(t)$ die gleiche Anzahl Maxima und Minima hat wie die Teilschwingung mit

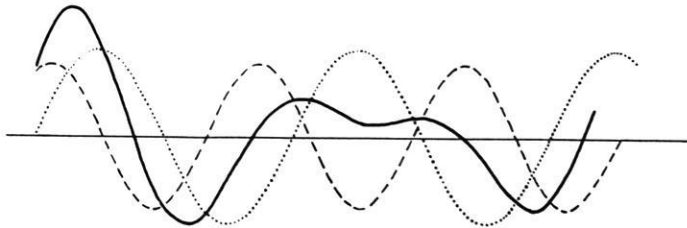


Fig. 5. Schwebungsbild aus den gleichen Teilschwingungen wie in Fig. 3, nur mit der Phasenverschiebung $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (Ausschnitt beim Schwebungsminimum.)

kleinerer Frequenz; es kann aber auch eintreten, daß $y(t)$ einen Wendepunkt oder ein Maximum und Minimum pro Schwebungsperiode mehr hat.

Im Falle $A_1\omega_1 = A_2\omega_2$ ist die Ableitung

$$y'(t) = 2A_1\omega_1 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos \frac{\Delta\omega t + \varphi}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Die Anzahl der Extrema von $y(t)$ ist hier höchstens gleich der Anzahl der Extrema von der Teilschwingung mit größerer Frequenz. Sie kann aber auch kleiner werden, wenn nämlich die beiden \cos in (5) für das gleiche t Null werden. Hier treten Wendepunkte auf, die durch Zusammenfallen von einem Maximum und einem Minimum entstanden zu denken sind.

Ebenso wie die erste könnte man nun natürlich auch noch die zweite und die höheren Ableitungen von $y(t)$ untersuchen; doch würde das hier zu weit führen. Wir sehen jedenfalls schon hieraus, wie mannigfaltig Schwebungsbilder gestaltet sein können. Wir haben hier hauptsächlich auf qualitative Aussagen Wert gelegt; quantitative Aussagen über Schwebungsbilder, vor allem bezüglich der Auswertung von experimentell gewonnenen Schwebungsdiagrammen, sollen der weiteren Arbeit vorbehalten werden.

Übersicht

	Amplituden- verhältnis A_1/A_2	Nullstellenanzahl a pro Periode $1/d$ von $y(t)$	Anzahl der Extrema b pro Periode $1/d$ von $y(t)$
1.	$\frac{A_1}{A_2} > 1$	$\frac{2\nu_1}{d}$	$\frac{2\nu_1}{d}$
2.	$\frac{A_1}{A_2} = 1$	$\frac{2\nu_1}{d} \geq a \geq \frac{2\nu_1}{d} - 2^*)$	$\frac{2\nu_1}{d}$
3.	$1 > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{2\nu_1}{d} \geq a \geq \frac{2\nu_2}{d}$	$\frac{2\nu_1}{d}$
4.	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{2\nu_2}{d}$	$\frac{2\nu_1}{d} \geq b \geq \frac{2\nu_1}{d} - 2^*)$
5.	$\frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$	$\frac{2\nu_2}{d}$	$\frac{2\nu_1}{d} \geq b \geq \frac{2\nu_2}{d}$
6.	$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \geq \frac{A_1}{A_2}$	$\frac{2\nu_2}{d}$	$\frac{2\nu_2}{d}$

II. Nichtstationäre Teilschwingungen

§ 4. *Teilschwingungen mit veränderlicher Frequenz.* Bei Bodenuntersuchungen durch Maschinenschwingungen ergeben sich Schwebungsbilder, die von G.-A. Schulze⁵⁾ untersucht worden sind. Eine Schwingmaschine mit Exzenter führt dem Boden elastische Energie zu, die sich in Form von sinusförmigen elastischen Wellen allseitig ausbreitet. Je nach den durchlaufenen Schichten ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit verschieden. Haben wir z. B. ein zweigeschichtetes Medium, eine Deckschicht und eine tiefere Schicht mit größerer Geschwindigkeit, so überlagern sich am Beobachtungsort die beiden durch die verschiedenen Schichten gelaufenen Wellenzüge. In bestimmten Entfernungen Maschinenstandort-Beobachtungsort entstehen Amplitudenmaxima und -minima, aus deren Lage man auf den Aufbau des Untergrundes schließen kann¹⁰⁾. Hierauf kommen wir noch in anderem Zusammenhang in § 6 zurück.

Ändert man jetzt die Frequenz der Maschine, z. B. indem man sie auslaufen läßt, dann kommt eine bestimmte Frequenz an einem festen Beobachtungsort wegen der verschiedenen Geschwindigkeiten auf den beiden Wegen zu verschiedenen Zeiten an; d. h. zu bestimmter Zeit kommen auf den beiden Wegen Schwingungen mit wenig verschiedener Frequenz an, die sich zu Schwebungsbildern überlagern.

Der Begriff „Frequenz“ ist dabei entsprechend den Ausführungen in § 1 zu verstehen.

Die hier entstehenden Schwebungsbilder unterscheiden sich von den in Kap. I behandelten „gewöhnlichen Schwebungen“ durch zweierlei: 1. Die Frequenz der Teilschwingungen ist nicht mehr konstant. 2. Die Amplituden der Teilschwingungen sind nicht mehr konstant.

*) Der Beweis dieser Ungleichungen ist einfach.

Die Phase der Maschine bezeichnen wir allgemein mit $\varphi(t)$. Die an der Maschine entstehenden Bodenamplituden sind proportional der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t)$$

(gleich Kreisfrequenz) der Maschine:

$$A = C \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Die am Beobachtungsort auftretenden Amplituden sind wiederum proportional A zu setzen, also in den beiden Schichten:

$$A_1 = C_1 \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad A_2 = C_2 \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Die Größen C_1 und C_2 hängen dabei von der Entfernung und von der Absorption in den beiden Schichten ab.

Sind die Laufzeiten der Wellen von der Maschine zum Beobachtungsort in den beiden Schichten t_1 und t_2 , dann haben wir also, mathematisch gesprochen, die Funktion

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 \cdot \sin[\varphi(t-t_1)] + A_2 \cdot \sin[\varphi(t-t_2)] \\ &= C_1 f(t-t_1) \sin[\varphi(t-t_1)] + C_2 f(t-t_2) \sin[\varphi(t-t_2)] \end{aligned}$$

zu diskutieren. Wir setzen dabei immer $f(t) > 0$ voraus und nehmen weiterhin an, daß $f'(t)$ sehr klein ist. Die letztere Voraussetzung werden wir unten noch näher umreißen.

Der Umformung (3) entspricht hier

$$\cdot \sin \left[\frac{\varphi(t-t_1) + \varphi(t-t_2)}{2} + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_1 f_1 - C_2 f_2}{C_1 f_1 + C_2 f_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2)}{2} \right\} \right], \quad (6)$$

worin zur Abkürzung

$$f_1 = f(t-t_1); \quad f_2 = f(t-t_2)$$

gesetzt ist.

Wir sehen, daß sich eine ganz ähnliche Form ergibt wie in Kap. I, und die Diskussion läßt sich daher auch leicht auf die dortige zurückführen. Wir unterscheiden zunächst wieder in gleicher Weise Schwebungskurve und Phase des Schwebungsbildes (6), wobei bezüglich der Vieldeutigkeit des arctg dasselbe zu beachten ist wie oben. Ein wesentlicher Unterschied ist nur der, daß jetzt $y(t)$ keine periodische Funktion mehr ist. Trotzdem lassen sich aber die Gesetze aus Kap. I weitgehend übertragen, wodurch vor allem die Auswertung von Schwebungsdiagrammen mit für den Zweck hinreichender Genauigkeit möglich ist.

Die Schwebungskurve hat die Gleichung

$$s(t) = \sqrt{C_1^2 f_1^2 + C_2^2 f_2^2 + 2 C_1 C_2 f_1 f_2 \cdot \cos[\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2)]}.$$

Wir bilden die Ableitung von $s(t)^2$:

$$2s(t) \cdot s'(t) = 2C_1^2 f_1 \cdot f_1' + 2C_2^2 f_2 f_2' + 2C_1 C_2 \cdot (f_1' f_2 + f_1 f_2') \cdot \cos[\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2)] \\ - 2C_1 C_2 f_1 f_2' \cdot \sin[\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2)] \cdot (f_1 - f_2).$$

$f'(t)$ soll nun so klein sein, daß wir die Glieder mit f' gegen das letzte vernachlässigen können. Nur dann entstehen nämlich bei dem beschriebenen physikalischen Vorgang Schwebungsbilder. Dann verschwindet $s'(t)$ bei

$$\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2) = \alpha \cdot \pi; \quad \alpha = \text{ganze Zahl. . . . (7)}$$

Hierdurch sind die Extremwerte der Schwebungskurve bestimmt. Um sich dabei eine Vorstellung von der Größe des Fehlers wegen der Vernachlässigung der Glieder mit f' zu machen, hat man zu beachten, daß an den durch (7) gegebenen Stellen t die Ableitung von $s(t)$ nicht Null, sondern absolut genommen gleich

$$|C_1 \cdot f'(t-t_1) \pm C_2 \cdot f'(t-t_2)|$$

ist, woraus man im praktischen Fall den Fehler abschätzen kann.

Wir können also auch hier von „Schwebungsintervall“ reden; nur wird das im allgemeinen nicht konstant sein. Man könnte nach (7) versuchen, aus gegebenen Zeiten t' , t'' usw., zu denen die Schwebungskurve Maxima oder Minima hat, t_1 und t_2 oder wenigstens $t_1 - t_2$ zu berechnen, was ja in der Praxis das Hauptziel ist. Hat man z. B. lineare Frequenz

$$f(t) = at + b, \quad \text{also} \quad \varphi(t) = \int f(t) dt = \frac{1}{2} at^2 + bt + c,$$

und zwei aufeinanderfolgende Minima zu den Zeiten t' und t'' , so ergibt (7)

$$\varphi(t' - t_1) - \varphi(t' - t_2) = (at' + b)(t_2 - t_1) - a(t_2^2 - t_1^2) = \alpha \cdot \pi,$$

$$\varphi(t'' - t_1) - \varphi(t'' - t_2) = (at'' + b)(t_2 - t_1) - a(t_2^2 - t_1^2) = (\alpha \pm 2) \cdot \pi.$$

Also

$$|t_2 - t_1| = \frac{2\pi}{|a \cdot (t'' - t')|}.$$

Diese Methode ist aber sehr ungenau; erheblich genauere Auswertmethoden ergeben sich bei Berücksichtigung der Phase von $y(t)$. Hierauf soll in der genannten späteren Arbeit eingegangen werden.

Wir wollen hier nur noch kurz auf einen wichtigen Unterschied gegen gewöhnliche Schwebungen im Verlauf der Phase eingehen.

Der Faktor

$$\alpha(t) = \frac{C_1 f_1 - C_2 f_2}{C_1 f_1 + C_2 f_2}$$

ist ja jetzt eine Funktion von t . Behält er innerhalb des betrachteten Schwebungsintervalls sein Vorzeichen, dann ist das Verhalten ähnlich wie im Falle der gewöhn-

lichen Schwebungen. Es kann aber auch vorkommen, daß $\alpha(t)$ sein Vorzeichen wechselt. In Fig. 6 ist ein solcher Fall schematisch dargestellt (lineare Frequenz). Dann kehrt sich der Änderungssinn der Phase (gleich Gang der Frequenz) plötzlich um, und der arctg hat am Anfang und Ende des betreffenden Schwebungsintervalles den gleichen Wert. Dieser Fall tritt auch in der Praxis zuweilen tatsächlich ein (siehe hierzu auch § 6).

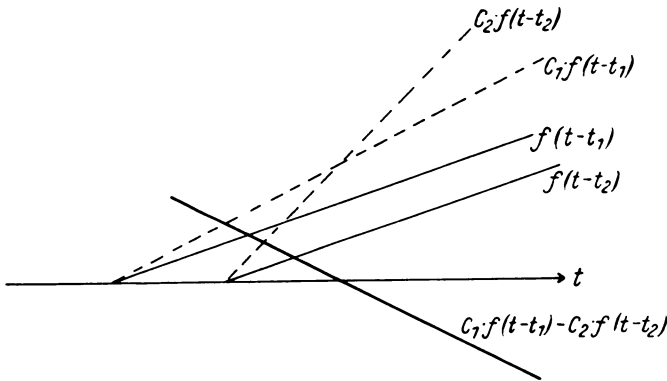


Fig. 6. Beispiel für Vorzeichenwechsel der Funktion:

$$C_1 f(t-t_1) - C_2 f(t-t_2).$$

$$f(t-t_1) > f(t-t_2); \quad C_1 < C_2.$$

§ 5. *Gedämpfte Teilschwingungen.* Im Bauwesen ist es oft wichtig, die Eigenfrequenzen und Dämpfungskonstanten von Gebäuden zu kennen, z. B. deshalb, um das Gebäude durch darin aufgestellte, schlecht ausgewuchtete Maschinen nicht zu großen Erschütterungen auszusetzen, was dann eintritt, wenn die Dämpfung gering ist und die Frequenz einer solchen Maschine in der Nähe einer Eigenfrequenz des Gebäudes liegt. Köhler⁶⁾ hat bei einer solchen Untersuchung folgende Methode angegeben, um die Eigenfrequenzen und die Dämpfung des untersuchten Gebäudes (Kohlenwäsche) zu finden: Durch eine in dem Gebäude befindliche Maschine wird das Gebäude durch Resonanz in Eigenschwingungen versetzt; die Maschine wird sehr schnell angehalten und die ausklingenden freien Schwingungen des Gebäudes werden durch einen Seismographen aufgezeichnet. Treten hierbei zwei wenig voneinander verschiedene Eigenfrequenzen auf, wie das in dem von Köhler untersuchten Gebäude der Fall ist, dann bilden sich wieder schwebungsartige Kurven, aus denen die Teilschwingungen gefunden werden sollen.

Um diese Verhältnisse mathematisch zu erfassen, wollen wir (wie bei Köhler) annehmen, daß die Dämpfung exponentiell und für beide Teilschwingungen gleich ist. Wir setzen daher die Teilschwingungen

$$y_1(t) = A_1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

$$y_2(t) = A_2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin \omega_2 t.$$

Entsprechend der Umformung (3) erhalten wir jetzt

$$y(t) = e^{-\kappa t} \cdot \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos(\Delta \omega t + \varphi)} \cdot \sin \left\{ \omega t + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{arctg} \left[\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta \omega t + \varphi}{2} \right] \right\} \quad (8)$$

Es ergibt sich also die gleiche Funktion wie in (3), nur daß noch der Dämpfungsfaktor $e^{-\kappa t}$ hinzutritt. Die Diskussion ist daher sehr einfach. Die Schwebungskurve hat jetzt die Gleichung

$$s(t) = e^{-\kappa t} \cdot \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos(\Delta \omega t + \varphi)}.$$

Sie „schlängelt“ sich gleichsam um die e -Kurve $e^{-\kappa t}$. Die Schwebungsdauer $2\pi/\Delta\omega$ ist leicht aus dem Kurvenbilde zu erkennen; exakt gewinnt man sie, wenn man beachtet, daß die logarithmische Ableitung von $s(t)$ eine rein periodische Funktion der Periode $2\pi/\Delta\omega$ ist, z. B. indem man $s(t)$ auf logarithmischem Papier zeichnet und graphisch differenziert. Aus zwei t -Werten im so gewonnenen Abstand $2\pi/\Delta\omega$ findet man dann die Dämpfungskonstante κ . Für die Phase in (8) gilt dasselbe wie bei gewöhnlichen Schwebungen, da sie hier die gleiche ist wie dort.

§ 6. Übertragung der Theorie auf Wellen. Wir wollen zum Schluß noch die Ergebnisse auf die Überlagerung von Wellen übertragen. Haben wir nämlich zwei Wellen, die bei gleicher Frequenz mit wenig verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, so ergibt sich mathematisch genau das gleiche Bild wie bei den Schwebungen, nur daß wir hier die Zeitachse durch die Wegachse in der Richtung Erregerort—Beobachtungsort zu ersetzen haben. Im wesentlichen ist es das, was man „Interferenz“ nennt. Es ist nun interessant, hier die Verhältnisse physikalisch zu deuten.

Sind v_1 und v_2 die beiden Geschwindigkeiten, λ_1 und λ_2 die Wellenlängen, ν die Frequenz, dann ist

$$\nu \lambda_1 = v_1; \quad \nu \lambda_2 = v_2.$$

Die beiden Teilwellen sind

$$y_1(x) = A_1 \cdot \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda_1} + \varphi \right); \quad y_2(x) = A_2 \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_2}$$

oder

$$y_1(x) = A_1 \cdot \sin \left(2\pi \nu \frac{x}{v_1} + \varphi \right); \quad y_2(x) = A_2 \cdot \sin 2\pi \nu \frac{x}{v_2}.$$

Die Amplituden können auch noch Funktionen von x sein. Ihre Summe ist [entsprechend (3)]

$$y(x) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos \left[2\pi \nu \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) x + \varphi \right]} \cdot \sin \left[\pi \nu \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) x + \frac{\varphi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) x + \varphi \right) \right] \quad (9)$$

Die Gesetze aus Kap. I lassen sich nun hierauf völlig übertragen; wir haben nur immer das Wort „Frequenz“ durch „reziproke Geschwindigkeit“ zu ersetzen. Die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Welle ist also im allgemeinen veränderlich; sie richtet sich — bis auf den einen Ausnahmefall 2b) — „im Durchschnitt“ (d. h. bezüglich der Anzahl der Nullstellen) nach der Teilwelle mit größerer Amplitude.

Es fragt sich nun, ob die Überlagerung zweier solcher Teilwellen auch physikalisch verwirklicht ist. Das ist tatsächlich der Fall. Wir wollen hier zwei Beispiele erwähnen.

1. In einem elastischen Medium mögen sich in bestimmter Richtung eine longitudinale und eine transversale Welle ausbreiten. Sind die beiden Geschwindigkeiten nicht zu sehr verschieden ($1 < v_1/v_2 \ll 2$), und messen wir in einer Richtung,

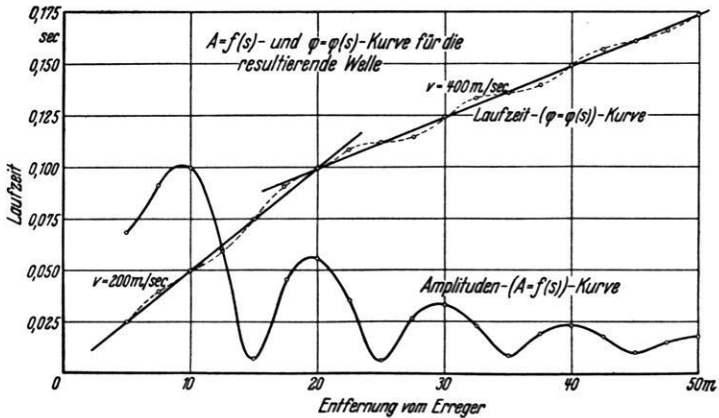


Fig. 7. Schematische Darstellung zur Interferenz zweier Einzelwellen von gleicher Frequenz, aber verschiedener Wellenlänge und verschieden starker Absorption. (Nach A. Ramspeck)

in der beide Wellen eine von Null verschiedene Komponente haben, so haben wir die beschriebenen Verhältnisse. Dabei ist noch die Amplitudenabnahme mit der Entfernung zu berücksichtigen.

2. Ein zweigeschichtetes Medium möge durch eine Schwingmaschine sinusförmig angeregt werden [vgl. zum folgenden¹⁰⁾]. An der Oberfläche mißt man dann, wie schon in § 4 beschrieben, zwei Wellen, die durch die beiden Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit gelaufen sind. Zu einem bestimmten Zeitmoment haben wir dann an der Oberfläche das übliche Schwebungsbild. Die Wellen sind exponentiell gedämpft anzunehmen. Ist die Dämpfung für beide Wellen gleich, dann haben wir konstante durchschnittliche Geschwindigkeit wie in § 5 Gleichung (8); ist sie aber verschieden, dann hat der Amplitudenfaktor im arctg von (9) die Form

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{C_1 e^{-x_1 z} - C_2 e^{-x_2 z}}{C_1 e^{-x_1 z} + C_2 e^{-x_2 z}} \dots \dots \dots (10)$$

worin κ_1 und κ_2 die Absorptionskoeffizienten sind. Hier ist nun der am Schluß des § 4 erwähnte Fall möglich, daß der Ausdruck (10) für ein bestimmtes x sein Vorzeichen wechselt. Die Phase ändert dann ihre „durchschnittliche“ Richtung, d. h. die Laufzeitkurve der Welle weist einen Knick auf. Die Verhältnisse sind von Ramspeck in der erwähnten Arbeit¹⁰⁾ von anderem Gesichtspunkt genau beschrieben worden. Wir geben hier seine Fig. 17 wieder, die alles erläutert. Die Amplitudenkurve ist die Schwebungskurve.

Literatur

- ¹⁾ E. Budde: Bemerkungen zu zwei Arbeiten von E. Waetzmann. Phys. Zeitschr. **18**, 285—290 (1917).
- ²⁾ E. Waetzmann: Über Schwebungen. Ebenda **18**, 560—567 (1917).
- ³⁾ E. Budde: Über Schwebungen. Ebenda **19**, 60—61 (1918).
- ⁴⁾ E. Waetzmann: Über Schwebungen. Ebenda **19**, 177—178 (1918).
- ⁵⁾ G.-A. Schulze: Über die Ausbreitung sinusförmiger Bodenbewegung. Zeitschr. f. Geophys. **11**, 307—321 (1935).
- ⁶⁾ R. Köhler: Messung der Schwingungskennziffern und Herabminderung der Erschütterungen in einer Kohlenwäsche. Ebenda **12**, 148—166 (1936).
- ⁷⁾ H. Martin: Schwingungslehre, I. Kap., § 9. Handb. d. Experimentalphysik Bd. XVII, 1.
- ⁸⁾ E. Waetzmann: Über den Zusammenklang zweier einfacher Töne. Phys. Zeitschr. **12**, 231—238 (1911).
- ⁹⁾ Helmholtz: Die Lehre von den Tonempfindungen, 5. Auflage, Beilage XIV.
- ¹⁰⁾ Die Anwendung dynamischer Baugrunduntersuchungen. Veröffentlichungen des Instituts der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo) an der Technischen Hochschule Berlin, Heft 4.

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Juni 1936.

Ein mechanisch registrierender Barograph hoher Empfindlichkeit

Von G. A. Suckstorff, Göttingen — (Mit 4 Abbildungen)

Es wird der Bau und die Wirkungsweise eines mechanisch registrierenden Barographen beschrieben, der bei einer Empfindlichkeit bis 20 mm Ausschlag pro mm Hg Luftdruckregistrierungen bei einer Papierbreite von 80 mm gestattet.

Im Verlauf von Untersuchungen über die Strömungsvorgänge in Regenschauern ergab sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Temperaturverlauf am Erdboden und dem Vorbeizug eines Regenschauers. Der entsprechende Verlauf des Luftdrucks jedoch zeigte zwar im allgemeinen eine kleine vorübergehende Druckzunahme von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{3}{10}$ mm Hg, die Form der Druckkurven war aber untereinander recht verschieden. Es erschien daher notwendig, eine größere Zahl von Luftdruckregistrierungen bei Schauerwetter zu gewinnen, um Schlüsse