

## Werk

**Jahr:** 1937

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:13

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0013

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0013](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0013)

**LOG Id:** LOG\_0023

**LOG Titel:** Geometische Lösung der Grundaufgaben der in der Geologie angewandten Seismik

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

II. Die weiteren Folgen der Druckentlastung in den Wellenbergen haben wir in dieser Arbeit nur kurz besprochen. Sie wurden in der schon zitierten Arbeit ausführlich besprochen anlässlich vieler Experimente von Barus, Doeglas usw.

III. Die seismischen Untersuchungen haben wohl gezeigt, daß die Grenze zwischen Wellengeschwindigkeiten von 5.5 und 6.5 km/sec (was aber nicht die Grenze Sial-Sima zu sein braucht) in den Alpenländern tiefer zu liegen scheint, die Grenze zwischen den Geschwindigkeiten 6.5 und 8 km/sec liegt aber über ganz Eurasia ungefähr gleich tief nach Gutenberg (Handb. d. Geophys. Bd. 2), nämlich 40 bis 50 km. Diese Grenzfläche steigt stark an in der Nähe vom Atlantischen Ozean (Tiefe 20 bis 30 km). Übrigens fasse ich diese seismischen Untersuchungen auch nicht als einen richtigen Beweis auf, sondern nur als Stütze der Argumente 1 bis 5. Das Beobachtungsmaterial ist noch zu gering, als daß man es als Beweis für irgendeine Theorie benutzen darf.

Das Ziel meiner früheren Arbeiten und dieser Arbeit ist in folgende drei Punkte kurz zusammenzufassen:

1. Die Erdkruste zeigt deutliche oszillatorische Bewegungen in ein und demselben und in nebeneinanderliegenden Gebieten. Man kann das exakt geologisch beweisen, im Gegensatz zu den meisten geologischen Problemen, die man nicht beweisen kann.

2. Die „Gebirgswurzel“-Theorie ist ganz im Widerspruch mit diesen geologischen Beobachtungen und ist leider fast ein geologisches Dogma geworden.

3. Von den bis jetzt bekannten geologischen Undulationsmechanismen ist nur einer bekannt, der richtig oszillatorisch sein kann und die verschiedenen tektonischen Gesetze erklären kann. Vielleicht wird man später einen anderen Mechanismus entdecken, der noch besser die geologischen Beobachtungen erklärt.

*Leiden, 27. April 1937.*

---

## **Geometrische Lösung der Grundaufgaben der in der Geologie angewandten Seismik**

Von **A. Berroth**, Aachen. — (Mit 15 Abbildungen)

Es werden die Grundaufgaben der angewandten Seismik, sowohl der Reflexions- als der Refraktionsmethode für das Ein- und Mehrschichtenproblem, auf die sich fast alle praktischen Aufgaben aufbauen, nach einheitlichen geometrischen Gesichtspunkten untersucht.

Alle in der praktischen Seismik bisher zu Bedeutung gelangten Verfahren sind Laufzeitkurvenverfahren, d. h. es werden zu bekannten Entfernungen an der Oberfläche die Zeiten der durch die Schichten gelaufenen elastischen Wellen gemessen und graphisch dargestellt. Dem vereinfachenden Umstand, daß die Laufzeitkurven für alle in der Tiefe ein- oder mehrfach refraktierten Wellen Polygone von

geraden Linien sind — für jede Schicht homogene und isotrope Zusammensetzung vorausgesetzt —, verdankt die Refraktionsmethode ihre primären Erfolge.

Man erkennt daraus bereits, daß bei Abwesenheit homogener und isotroper Zusammensetzung Polygone mit sehr kurzen Seiten, also beliebige Kurven zustande kommen, ein Umstand, der daran schuld ist, daß derartige Aufgaben bis jetzt mit diesem Verfahren nicht befriedigend gelöst werden können.

In der Reflexionsseismik vollends sind bisher nur praktische Ergebnisse ohne Erörterung des Wesens der gefundenen Laufzeitkurven bekanntgeworden.

Es zeigt sich hierbei, daß bereits bei der einfachsten Aufgabe, dem Einschichtenproblem mit unbekannter Teufe und Schichtneigung, die Laufzeitkurve eine Kurve 2. Grades ist und der Grad mit der Anzahl der Schichten sich erhöht, so daß hiermit die schwierigere Behandlung begründet ist.

Nur in einem einzigen Falle kann man bei Reflexion eine geradlinige Laufzeitkurve, und zwar dann auch für eine Mehrzahl von Schichten erhalten, nämlich im Falle der seismischen Lotung. Wenn man an mehreren Stellen der Oberfläche elastische Wellen erregt und an denselben Stellen die Laufzeiten mißt, so erhält man stets geradlinige Laufzeitkurven.

Im folgenden sind die Kurvenscharen analytisch ermittelt, durch welche die Laufzeitkurven dargestellt werden. Nicht berücksichtigt wurde hierbei die Frage der Beobachtbarkeit der Wellen und ihrer Unterscheidungsmöglichkeiten sowie der Grenzen des Entstehens und Verschwindens. Das Raumproblem ergibt sich auf bekannte Weise aus den ebenen Komponenten.

## A. Reflexion der elastischen Welle

### a) Einschichtenproblem

Beim Einschichtenproblem ist ein geometrischer Ort für die Lage des Reflexionspunktes durch eine Ellipse gegeben, deren Brennpunkte die Station

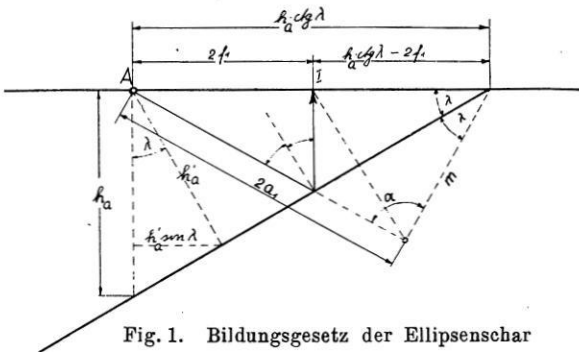


Fig. 1. Bildungsgesetz der Ellipsenschar

der Sprengung und die Empfangsstation sind und deren große Achse durch die mit der Geschwindigkeit multiplizierte Laufzeit dargestellt ist. Es besteht somit

die Möglichkeit, aus einer Sprengung und zwei Empfangsstationen die Schichtenneigung und ihre Tiefe (den Achsabschnitt) durch die gemeinsame Tangente an die beiden Ellipsen zu ermitteln. Die unbekannte Schicht ist die Einhüllende einer Ellipsenschar, für die das allgemeine Bildungsgesetz wie folgt ermittelt werden kann:

1. Bildungsgesetz für Laufzeitkurve und Ellipsenschar. Aus Fig. 1 folgt geometrisch:

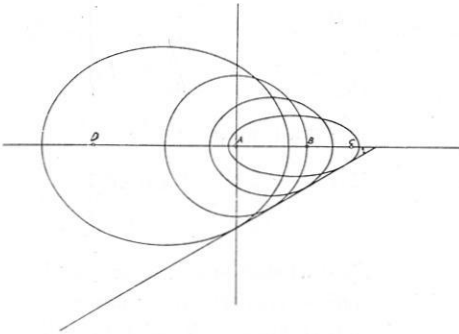


Fig. 2. Konfokale Ellipsenschar

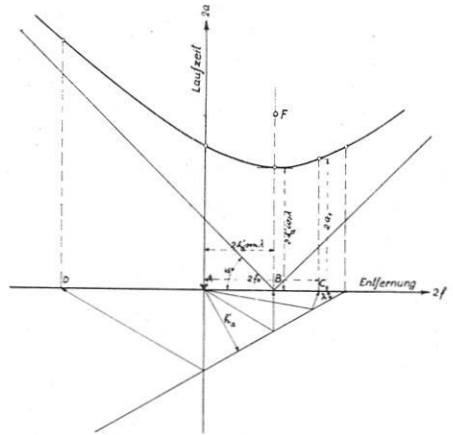


Fig. 3. Reflexionslaufzeitkurve beim Einschichtenproblem

$$\sin \alpha = \frac{h_a \operatorname{ctg} \lambda \cdot \sin 2 \lambda}{2 a} = \frac{h_a}{a} \cos^2 \lambda \dots \dots \dots (1)$$

$$m = h_a \operatorname{ctg} \lambda \cos 2 \lambda + 2 a \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{a^2} \cos^4 \lambda} \dots \dots \dots (2)$$

ferner

$$m = h_a \operatorname{ctg} \lambda - 2 f \dots \dots \dots (3)$$

somit

$$2 f = h_a \operatorname{ctg} \lambda (1 - \cos 2 \lambda) - 2 a \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{a^2} \cos^4 \lambda} \dots \dots \dots (4)$$

$$(2 a)^2 - (2 f - 2 h_a \sin \lambda \cos \lambda)^2 - 4 h_a^2 \cos^4 \lambda = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Mit

$$\frac{a}{h_a} = a', \quad \frac{f}{h_a} = f' \dots \dots \dots (6)$$

erhält man

$$(2 a')^2 - (2 f' - 2 \sin \lambda \cos \lambda)^2 - (2 \cos^2 \lambda)^2 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

Hierdurch ist eine Schar gleichseitiger Hyperbeln dargestellt mit der Halbachsenlänge =  $2 \cos^2 \lambda$  und der Mittelpunktsverschiebung auf der  $2 f$ -Achse =  $2 \sin \lambda \cos \lambda$ .

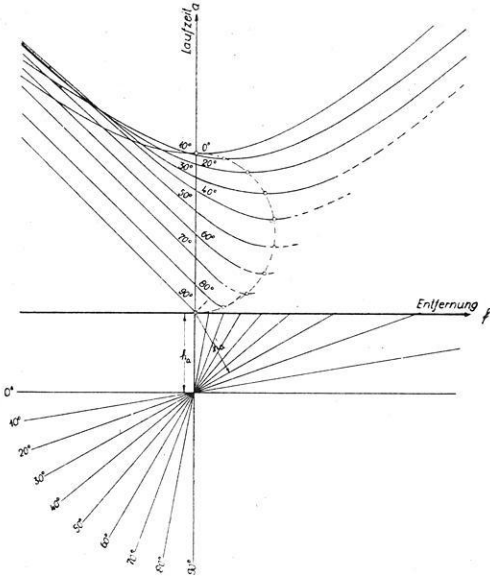


Fig. 4.  
Schar der Reflexionslaufzeitkurven für Schichten verschiedener Neigung aber konstanter Teufe

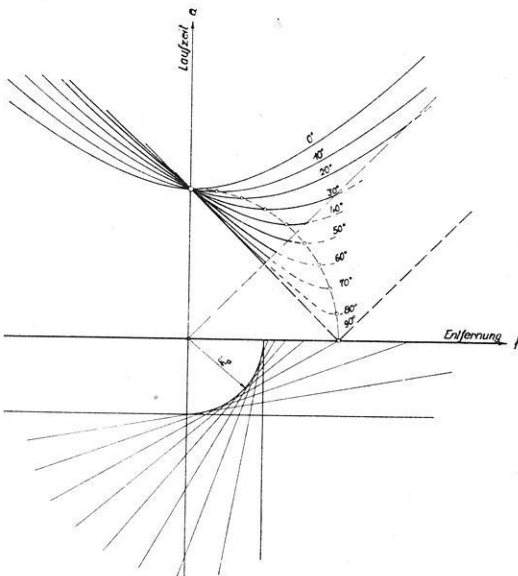


Fig. 5.  
Schar der Reflexionslaufzeitkurven für Schichten verschiedener Neigung aber konstantem Abstand

Dies ist also das Bildungsgesetz der Ellipsen und gleichzeitig der Laufzeitkurven für Schichten verschiedener Neigung, aber konstanter Teufe unter dem Sprengpunkt (Fig. 4). Setzt man

$$\left. \begin{aligned} h'_a &= h_a \cos \lambda \\ \text{und} \\ \frac{a}{h'_a} &= a', \quad \frac{f}{h'_a} = f', \end{aligned} \right\} (8)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} (2 a')^2 - (2 f' - 2 \sin \lambda)^2 \\ - (2 \cos \lambda)^2 = 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

also wieder eine Schar gleichseitiger Hyperbeln mit der Halbachsenlänge =  $2 \cos \lambda$  und der Mittelpunktsverschiebung auf der  $2 f$ -Achse =  $2 \sin \lambda$ .

Dieses Bildungsgesetz entspricht Schichten verschiedener Neigung, aber einem konstanten senkrechten Abstand vom Sprengpunkt (Fig. 5).

Je nachdem man den rechten oder linken Teil der Laufzeitkurven in bezug auf den Sprengpunkt konstruiert, erhält man verschiedene Kurven, so daß also der Sprengpunkt ein Unstetigkeitspunkt ist. Es sind also die Kurven „aufwärts“ bzw. „abwärts“ grundsätzlich verschieden.

2. Ermittlung von Teufe und Schichtneigung aus mindestens zwei gemessenen Laufzeiten  $2a$  in Entfernungen  $2f$  vom Sprengpunkt.

Aus Gleichung (5) folgt im ersten Beobachtungspunkt:

$$a_1^2 - f_1^2 + 2 f_1 h'_a \sin \lambda - h_a'^2 = 0 \dots \dots \dots (10)$$

und im zweiten

$$a_2^2 - f_2^2 + 2 f_2 h'_a \sin \lambda - h_a'^2 = 0 \dots \dots \dots (11)$$

woraus man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{h_a'^2 - a_1^2 + f_1^2}{2 f_1 h'_a} = \frac{h_a'^2 - a_2^2 + f_2^2}{2 f_2 h'_a}, \\ h'_a &= \sqrt{\frac{(a_1^2 - f_1^2) f_2 - (a_2^2 - f_2^2) f_1}{f_2 - f_1}}, \\ h_a &= h'_a / \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

3. Bestimmung von Teufe und Neigung aus der Berührenden konfokaler Ellipsen, deren Parameter sich nach gleichseitigen Hyperbeln ändern.

Ellipsen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - f_1^2} - 1 &= 0, \\ \frac{(x - \Delta f)^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{a_2^2 - f_2^2} - 1 &= 0, \quad \Delta f = f_2 - f_1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Tangenten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x x_1}{a_1^2} + \frac{y y_1}{a_1^2 - f_1^2} - 1 &= 0, \\ \frac{(x - \Delta f)(x_2 - \Delta f)}{a_2^2} + \frac{y y_2}{a_2^2 - f_2^2} - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Diese sollen zusammenfallen, also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1^2 - f_1^2}{a_1^2} \frac{x_1}{y_1} &= \frac{a_2^2 - f_2^2}{a_2^2} \frac{x_2 - \Delta f}{y_2}, \\ (a_1^2 - f_1^2) \cdot \frac{1}{y_1} &= \frac{a_2^2 - f_2^2}{a_2^2} \frac{x_2 - \Delta f}{y_2} \Delta f + (a_2^2 - f_2^2) \cdot \frac{1}{y_2}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

somit

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1^2 (x_2 - \Delta f)}{a_2^2 + (x_2 - \Delta f) \Delta f}, \\ y_1 &= \frac{a_1^2 - f_1^2}{a_2^2 - f_2^2} \frac{a_2^2 y_2}{(x_2 - \Delta f) \Delta f + a_2^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Ferner müssen die Berührungspunkte auf den Ellipsen (13) liegen, dies gibt

$$y_2^2 = \frac{a_2^2 - f_2^2}{a_2^2} \{a_2^2 - (x_2 - \Delta f)^2\} \dots \dots \dots (17)$$

Dies führt mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a_1^2 \left(1 - \frac{a_1^2 - f_1^2}{a_2^2 - f_2^2} \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - \Delta f^2, \\ \beta &= -2 \Delta f (\alpha + a_2^2), \\ \gamma &= \alpha \Delta f^2 + a_2^2 \{\Delta f^2 - \alpha + a_1^2 - a_2^2\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

zu der quadratischen Gleichung zur Bestimmung von  $x_2$ :

$$\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \dots \dots \dots (19)$$

und zur Tiefe unter dem Sprengpunkt:

$$h = \frac{a_1^2 - f_1^2}{y_1} \left( 1 + \frac{f_1}{a_1^2} x_1 \right) \dots \dots \dots (20)$$

Anwendungsbeispiel. In einem ebenen Gelände sind in den Entfernungen von  $2 f_1 = 282$  m und  $2 f_2 = 460$  m die Laufzeiten

$$2 T_1 = 0.408 \text{ sec und } 2 T_2 = 0.436 \text{ sec,}$$

ferner die Laufzeiten in der geraden Verbindungslinie

$$2 T_{01} = 0.235 \text{ sec, } 2 T_{02} = 0.383 \text{ sec}$$

gemessen worden.

Es sind Schichtneigung und Tiefe unter dem Sprengpunkt zu bestimmen. Mit  $f_1 = 141$ ,  $f_2 = 230$ ,  $a_1 = 245$ ,  $a_2 = 262$  ergibt sich aus (12):

$$h'_a = 280.5, \quad \lambda = 29^\circ 20', \quad h_a = 323 \text{ m,}$$

aus (18):

$$\alpha = -12.19 \cdot 10^4, \quad x_2 = +288, \quad y_2 = -80,$$

$$\beta = +9.50, \quad x_1 = +139, \quad y_1 = -164,$$

$$\gamma = +73.39,$$

$$\lambda = 29^\circ 30', \quad h_a = 325 \text{ m.}$$

4. Seismische Lotung. Darunter soll verstanden werden die Reflexion in sich, d. h. unter dem Reflexionswinkel  $o$ . Hierzu ist eine Apparatur erforderlich, welche ohne Trägheit und ohne Nachschwingungen arbeitet, wie z. B. das Piezoquarz-Seismometer.

Aus Fig. 6 folgt:

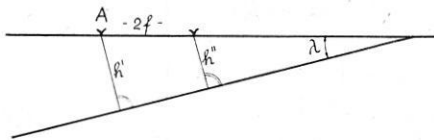


Fig. 6. Seismische Lotung

$$h'' = h' \left( 1 - \frac{2f}{h'} \sin \lambda \right),$$

$$a' = h',$$

$$a'' = h'',$$

$$\frac{da}{d(2f)} = -\sin \lambda,$$

d. h. die Laufzeitkurve wird eine Gerade, und ihr Neigungswinkel ist  $-\text{arctg}(\sin \lambda)$ .

Notwendig sind somit zur Ermittlung von Neigung und Tiefe zwei Lotungsstellen, oder die Schicht ist gemeinsame Berührende an zwei Kreise.

### b) Zweischichtenproblem

Wir betrachten zunächst nur den Teil, der rechts vom Sprengpunkt liegt, also den Fall „aufwärts“.

Laufzeit:

$$2T = \frac{\overline{AC}}{v_1} + \frac{\overline{DB}}{v_1} + \frac{\overline{CE} + \overline{ED}}{v_2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{CE} + \overline{ED}}{v_2} &= \frac{1}{v_2} \left\{ \frac{h_a \cos \lambda_2}{\cos i_2} + \frac{h_a \cos \lambda_2}{\cos i_2} - \frac{2f \sin \lambda_2}{\cos i_2} \right\} \\ &= \frac{1}{v_2 \cos i_2} \{ 2h_a \cos \lambda_2 - 2f \sin \lambda_2 \}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$h_a = \frac{H_2 \cos (\lambda_1 + \lambda_2)}{\cos \lambda_2} - \frac{H_1 \sin (i_a + \lambda_1) \sin \lambda_2}{\cos i_a \cos \lambda_2} \dots \dots \dots (3)$$

$$2f = \frac{2F}{\cos \lambda_1} - \frac{\sin (i_b - \lambda_1)}{\cos i_b} \left( H_1 - 2F \frac{\sin \lambda_1}{\cos \lambda_1} \right) - H_1 \frac{\sin (i_a + \lambda_1)}{\cos i_a} \dots (4)$$

$$h_1 = H_1 - 2F \operatorname{tg} \lambda_1 \dots \dots \dots (5)$$

$$\overline{AC} = H_1 \frac{\cos \lambda_1}{\cos i_a} \dots \dots \dots (6)$$

$$\overline{DB} = h_1 \frac{\cos \lambda_1}{\cos i_b} = H_1 \frac{\cos \lambda_1}{\cos i_b} - 2F \frac{\sin \lambda_1}{\cos i_b} \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin i_a &= \frac{v_1}{v_2} \sin (i_2 + \lambda_2), \\ \sin i_b &= \frac{v_1}{v_2} \sin (i_2 - \lambda_2). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Laufzeit:

$$\left. \begin{aligned} 2T &= \frac{H_1}{v_1} \cos \lambda_1 \left( \frac{1}{\cos i_a} + \frac{1}{\cos i_b} \right) - \frac{2F \sin \lambda_1}{v_1 \cos i_b} \\ &+ \frac{1}{v_2 \cos i_2} \left\{ 2H_2 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{\sin \lambda_2}{v_2 \cos i_2} \right. \\ &\cdot \left. \left\{ \frac{2F}{\cos \lambda_1} - \frac{\sin (i_b - \lambda_1)}{\cos i_b} \right\} (H_1 - 2F \operatorname{tg} \lambda_1) - H_1 \frac{\sin (i_a + \lambda_1)}{\cos i_a} \right\}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Den funktionellen Zusammenhang zwischen  $T$  und  $F$  kann man daraus nicht erkennen, weil der Reflexionswinkel  $i$  (in unbekannter Weise) noch von  $F$  abhängt.

Man kann jedoch, um wenigstens einen allgemeinen Einblick in den Aufbau dieser Laufzeitkurven zu gewinnen, von dem Einschichtproblem ausgehen, das auf gleichseitige Hyperbeln geführt hat. In die dortigen Bestimmungselemente sind die der oberen Schicht entsprechenden Beziehungen einzuführen. Dabei zeigt sich, daß beim Zweischichtenproblem diese Beziehungen praktisch linear sind. Man kann also setzen:

$$\left. \begin{aligned} f &= k_1 F, \\ 2a &= 2A + k_2 (2F) + k_3, \\ h_a \cos \lambda &= k_4 (2F) + k_5, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$



wobei mit wechselnden Schichtenkonstanten auch die Konstanten  $k_1$  bis  $k_5$  sich ändern.

Durch Einsetzen von (10) in die frühere Gleichung:

$$(2a)^2 - (2f - 2h_a \cos \lambda \sin \lambda)^2 - 4h_a^2 \cos^2 \lambda \cdot \cos^2 \lambda = 0 \dots (11)$$

erhält man für die Schar von Laufzeitkurven die allgemeine Gleichung 2. Grades:

$$A_0(2A)^2 + B_0(2F)^2 + 2C_0(2A)(2F) + 2D_0(2A) + 2E_0(2F) + F_0 = 0. \quad (12)$$

Diese stellt eine Schar von Hyperbeln dar, falls

$$\delta = A_0E_0^2 + B_0D_0^2 - 2C_0D_0E_0 - A_0B_0F_0 + C_0^2F_0 \dots (13)$$

von Null verschieden ist und nicht gleichzeitig  $A_0B_0 - C_0^2$  positiv bzw.  $(A_0 + B_0)$   $\delta$  negativ und wenn  $A_0B_0 - C_0^2 < 0$  ist.

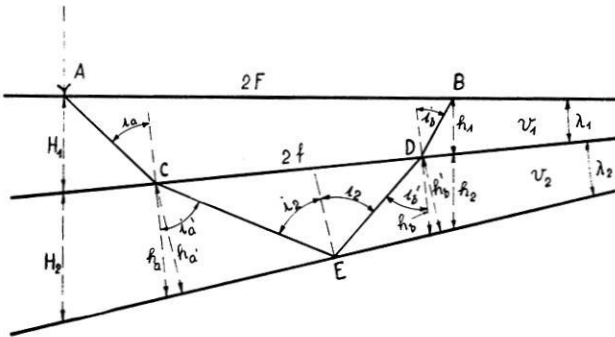


Fig. 7. Reflexion beim Zweischichtenproblem

Um die Hyperbeln konstruieren zu können, benötigt man den Mittelpunkt aus:

$$x_m = \frac{C_0E_0 - B_0D_0}{A_0B_0 - C_0^2}; \quad y_m = \frac{C_0D_0 - A_0E_0}{A_0B_0 - C_0^2} \dots (14)$$

ferner die Winkel der Hauptachsen der Hyperbeln gegen die  $x$ -Achse aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{(A_0 - B_0)^2 + 4C_0^2} - (A_0 - B_0)}{2C_0} \dots (15)$$

und die Halbachsen der Hyperbeln aus:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{\delta}{2(A_0B_0 - C_0^2)^2} \{A_0 + B_0 - \sqrt{(A_0 - B_0)^2 + 4C_0^2}\} \\ \pm b^2 &= \frac{\delta}{2(A_0B_0 - C_0^2)^2} \{A_0 + B_0 + \sqrt{(A_0 - B_0)^2 + 4C_0^2}\}. \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

Die Laufzeitkurven sind somit Scharen von allgemeinen Hyperbeln, deren Parameter von den Untergrundsverhältnissen bedingt sind und die beliebig liegen. Die Hyperbeln links und rechts vom Sprengpunkt, desgleichen die zwischen zwei Sprengpunkten liegenden aufwärts und abwärts, sind grundsätzlich verschieden.

Da die allgemeine Gleichung 2. Grades fünf Konstanten enthält und tatsächlich die fünf unbekannt Parameter  $H_1 H_2 \lambda_1 \lambda_2 v_1/v_2$  auftreten, so entspricht der Ansatz den a priori zu stellenden Erwartungen.

Prüfung der beobachteten Laufzeitkurven durch Berechnung der allgemeinen Hyperbeln. Gegeben seien die beobachteten Laufzeitkurven, die zu einer bestimmten Schichtenfolge gehören, nämlich zu

$$\begin{aligned} H_1 &= 338 \text{ m}, & H_2 &= 775 \text{ m}, \\ \lambda_1 &= 17^\circ 20', & \lambda_2 &= 15^\circ 20', \\ v_1/v_2 &= 0.500. \end{aligned}$$

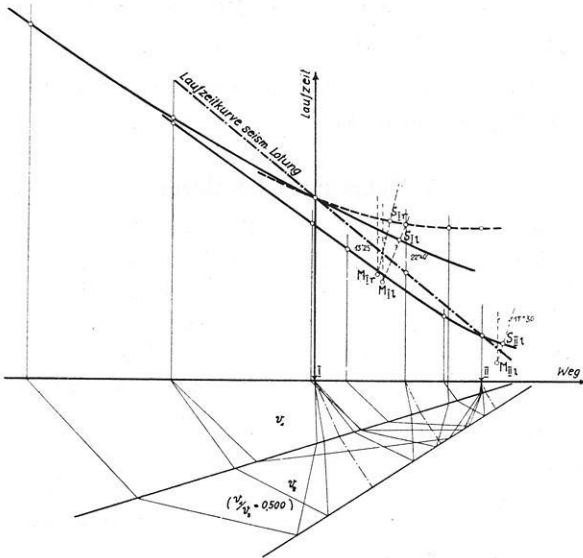


Fig. 8. Reflexionslaufzeitkurven beim Zweischichtenproblem

Durch eine graphische Behandlung ergaben sich die Beziehungen:

in Punkt I, rechter Ast:  $f = 0.666 F$ ,  
 $2 A - 2 a = 659 - 0.265 (2 F)$ ,  
 $h'_a = 329 - 0.036 (2 F)$ ;

in Punkt I, linker Ast:  $f = 0.650 F$ ,  
 $2 A - 2 a = 659 - 0.348 (2 F)$ ,  
 $h'_a = 329 - 0.036 (2 F)$ ;

in Punkt II, linker Ast:  $f = 0.741 F$ ;  
 890 m rechts vom Punkt I:  $2 A - 2 a = 122 - 0.353 (2 F)$ ,  
 $h'_a = 106 - 0.003 (2 F)$ .

Dies gibt durch Einsetzen in Gleichung (11) folgende Hyperbeln:

$$\text{I R } (2A)^2 - 0.048 (2F)^2 + 0.530 (2A)(2F) - 1.318 (2A) - 0.267 (2F) + 0.325 = 0,$$

$$\text{I L } (2A)^2 + 0.008 (2F)^2 + 0.696 (2A)(2F) - 1.318 (2A) - 0.379 (2F) + 0.326 = 0,$$

$$\text{II L } (2A)^2 - 0.013 (2F)^2 + 0.706 (2A)(2F) - 0.244 (2A) - 0.064 (2F) + 0.0035 = 0;$$

mit Mittelpunkten, Achsen und Achsdrehungen:

$$\text{I R } x_m = + 571; \quad y_m = + 333; \quad a = 303, \quad b = 930 \text{ m}; \quad \alpha = + 13^\circ 25';$$

$$\text{I L } x_m = + 535; \quad y_m = + 356; \quad a = 250, \quad b = 850 \text{ m}; \quad \alpha = + 22^\circ 40';$$

$$\text{II L } x_m = + 93; \quad y_m = + 82; \quad a = 98, \quad b = 250 \text{ m}; \quad \alpha = + 17^\circ 30'.$$

Die beobachteten Laufzeitkurven fallen innerhalb der Fehlergrenzen mit den ermittelten Hyperbeln zusammen (Fig. 8).

### c) Mehrschichtenproblem

Um zu einer allgemeinen Beziehung für die Gleichung der Laufzeitkurven zu gelangen, wurde wieder von der Reflexion an der untersten Schicht ausgegangen

und das Ergebnis der mehrfachen Brechung hinzugefügt.

Das drückt sich beispielsweise bei drei Schichten darin aus, daß jetzt quadratische Beziehungen auftreten (s. Fig. 9):

$$2f = q_1(2F)^2 + q_2(2F) + q_3,$$

$$2A - 2a = r_1(2F)^2 + r_2(2F) + r_3,$$

$$h'_a = s_2(2F) + r_3.$$

Dies führt durch Einsetzen in Gleichung (11) zu einer Gleichung 4. Grades mit acht Konstanten:

$$(2F)^4 + k_1(2A)(2F)^3 + k_2(2F)^3 + k_3(2A)^2 + k_4(2F)^2 + k_5(2A)(2F) + k_6(2A) + k_7(2F) + k_8 = 0.$$

Mit jeder neuen Schicht kommen somit drei neue Konstanten hinzu, die Veranlassung dazu sind, den Grad der Kurvengleichung zu erhöhen und die jeweils den drei hinzukommenden

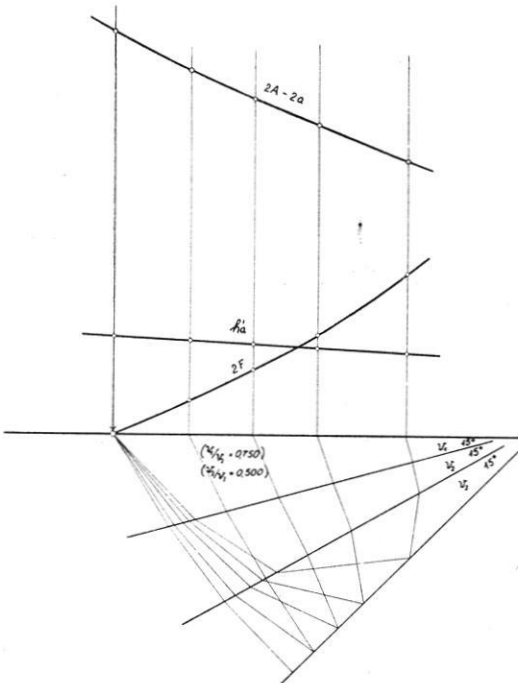


Fig. 9. Übergang zum Reflexionsmehrschichtenproblem

neuen Unbekannten, Teufe, Neigung und Geschwindigkeitsverhältnis, entsprechen. Selbstverständlich ergeben sich jeweils verschiedene Kurven, je nachdem man rechts oder links vom Sprengpunkt beobachtet. Für die numerische Auflösung der Gleichungen würde diese Eigenschaft natürlich von Vorteil und sicher auch nötig sein, wenn sie in Strenge überhaupt auflösbar wären.

Im Gegensatz zu diesen komplizierten Kurven stehen die stets einfachen bei der Refraktion, bei der beide Beobachtungsrichtungen eingesetzt werden können und müssen und zur erfolgreichen numerischen Auswertung führen.

#### d) Seismische Lotung beim Mehrschichtenproblem

Es bleibt hier zu zeigen, daß im Falle der senkrechten Reflexion an der letzten Schicht die Laufzeitkurve stets eine gerade Linie wird. Es genügt hierfür bereits die Ableitung an zwei Schichten.

Laufzeit:

$$\overline{BC} = H_2 \frac{\cos \lambda_2}{\cos \xi},$$

$$\overline{CD} = H_3 \cos (\lambda_2 + \lambda_3) - \frac{H_2 \sin (\lambda_2 + \xi)}{\cos \xi} \sin \lambda_3.$$

Gesamtzeit:

$$2 T' = 2 \frac{H_2'}{v_2} \frac{\cos \lambda_2}{\cos \xi} + \frac{2 H_3'}{v_3} \cos (\lambda_2 + \lambda_3) - \frac{2 H_2'}{v_2} \frac{\sin (\lambda_2 + \xi)}{\cos \xi} \sin \lambda_3,$$

$$\sin \xi = \frac{v_2}{v_3} \sin \lambda_3;$$

$$\left[ \sin \eta = \frac{v_2}{v_3} \sin (\lambda_2 + \xi) \right],$$

$$H_2' = H_2 - 2f \operatorname{tg} \lambda_2,$$

$$H_3' = H_2 + H_3 - H_2' - 2f \operatorname{tg} (\lambda_2 + \lambda_3),$$

$$\frac{dT'}{df} = \frac{-2 \sin \lambda_2}{v_2 \sqrt{1 - (v_2/v_3)^2 \sin^2 \lambda_3}}$$

$$+ \frac{2 \cos (\lambda_2 + \lambda_3)}{v_3} (\operatorname{tg} \lambda_2 - \operatorname{tg} (\lambda_2 + \lambda_3))$$

$$+ \frac{2}{v_3} \operatorname{tg} \lambda_2 \frac{\sin \{ \lambda_2 + \arcsin [(v_2/v_3) \sin \lambda_3] \}}{\sqrt{1 - (v_2/v_3)^2 \sin^2 \lambda_3}} \\ = \text{const.}$$

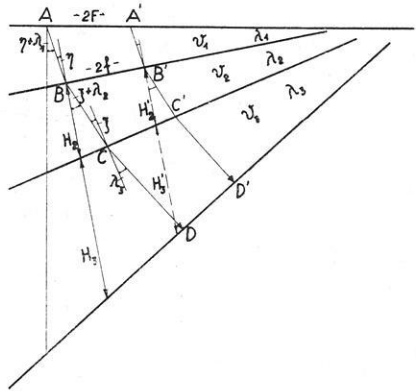


Fig. 10. Seismische Lotung beim Mehrschichtenproblem

Diese Gleichung würde, da  $dT'/df$  meßbar ist, die Unbekannte  $\lambda_3$  liefern, falls sie explizite darstellbar wäre. In diesem Zustand ist sie nur für eine sukzessive Auflösung zu gebrauchen. Es ist ersichtlich, daß die Laufzeitkurve eine gerade Linie sein muß.

## B. Refraktion der elastischen Welle

### a) Zweischichtenproblem\*)

α) Teilstück rechts von A:

Laufzeit:

$$2T = \frac{d}{v_1} + \frac{c}{v_2} + \frac{b}{v_1} = \frac{d}{v_1} + \frac{c \sin i}{v_1} + \frac{b}{v_1} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sin i \dots \dots \dots (2)$$

$$d = \frac{h \cos \lambda}{\cos i} \dots \dots \dots (3)$$

$$b = \frac{h \cos \lambda - 2f \operatorname{tg} \lambda \cos \lambda}{\cos i} = \frac{h \cos \lambda - 2f \sin \lambda}{\cos i} \dots \dots \dots (4)$$

$$c = \frac{2f \cos(i - \lambda)}{\cos i} = \frac{2h \cos \lambda \sin i}{\cos i} \dots \dots \dots (5)$$

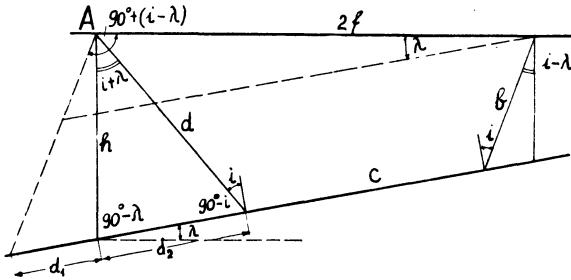


Fig. 11. Refraktion beim Zweischichtenproblem

daraus folgt:

$$2T = \frac{1}{v_1} \{ 2h \cos \lambda \cos i + 2f \sin(i - \lambda) \} \dots \dots \dots (6)$$

β) Teilstück links von A:

$$2T = \frac{1}{v_1} \{ 2h \cos \lambda \cos i + 2f \sin(i + \lambda) \} \dots \dots \dots (7)$$

\*) Die Bezeichnungsnummer ist bei der Refraktion um eine Nummer höher als bei der Reflexion, weil man über die Geschwindigkeit bereits in der nächsten Schicht eine Aussage erhält. Die Behandlung der Aufgabe geschieht unter Verwendung der von O. v. Schmidt angegebenen bekannten Lösungen, Zeitschr. f. Geophys. 1928, S. 134 und 1931, S. 37.

Wir setzen

$$2 T \cdot v_1 = 2 a . . . . . (8)$$

und erhalten

$$\frac{2 a}{2 h \cos \lambda \cos i} + \frac{2 f}{(-2 h \cos \lambda \cos i) / \sin (i - \lambda)} - 1 = 0 . . . . . (9)$$

ferner

$$\frac{2 a}{2 h \cos \lambda \cos i} + \frac{2 f}{(-2 h \cos \lambda \cos i) / \sin (i + \lambda)} - 1 = 0 . . . . . (10)$$

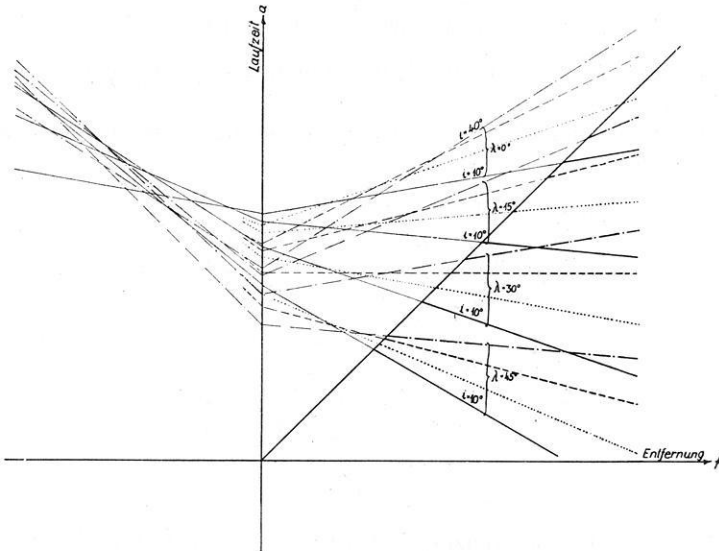


Fig. 12. Refraktionslaufzeitkurven beim Zweisichtenproblem

Mit

$$\frac{a}{h} = a', \quad \frac{f}{h} = f'$$

wird erhalten:

$$\frac{2 a'}{2 \cos \lambda \cos i} + \frac{2 f'}{(-2 \cos \lambda \cos i) / \sin (i - \lambda)} - 1 = 0 . . . . . (11)$$

$$\frac{2 a'}{2 \cos \lambda \cos i} + \frac{2 f'}{(-2 \cos \lambda \cos i) / \sin (i + \lambda)} - 1 = 0 . . . . . (12)$$

Geradenscharen mit den Achsabschnitten:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cos \lambda \cos i \quad \text{und} \quad -2 \cos \lambda \cos i / \sin (i - \lambda), \\ 2 \cos \lambda \cos i \quad \text{und} \quad -2 \cos \lambda \cos i / \sin (i + \lambda); \end{array} \right\} . . . . . (13)$$

mit den Neigungswinkeln  $\alpha, \beta$  gegen die Zeitachse:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{v_1} \sin(i - \lambda), \\ \operatorname{ctg} \beta &= \frac{1}{v_1} \sin(i + \lambda); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

in den Achspunkten der 2  $a$ -Achse:

$$2 \cos \lambda \cos i.$$

In der Fig. 12 sind die vier Geradenbüschel gezeichnet für

$$\frac{v_1}{v_2} = 0.500 \left\{ \begin{array}{cccc} i = 10^\circ & 20^\circ & 30^\circ & 40^\circ \\ \lambda = 0^\circ & 15^\circ & 30^\circ & 45^\circ \end{array} \right.$$

In der Gleichung (6) sind die drei Unbekannten  $i, \lambda, h$  enthalten,  $v_1$  als bereits ermittelt vorausgesetzt.

Die Doppelgerade liefert durch drei Beobachtungen *ein und derselben* Sprengung die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2 v_1 T_1 &= 2 h \cos \lambda \cos i + 2 f_1 \sin(i - \lambda), \\ 2 v_1 T_2 &= 2 h \cos \lambda \cos i + 2 f_2 \sin(i - \lambda), \\ 2 v_1 T_3 &= 2 h \cos \lambda \cos i + 2 f_3 \sin(i + \lambda); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

daraus:

$$\frac{\sin(i - \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_3 - 2 T_1}{2 f_2 - 2 f_1} = \operatorname{ctg} \alpha \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{\sin(i + \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_3 - 2 T_1}{2 f_3} + \frac{2 f_1}{2 f_3} \frac{2 T_2 - 2 T_1}{2 f_2 - 2 f_1} = \operatorname{ctg} \beta \dots \dots \dots (17)$$

$$h = \frac{1}{\cos i \cos \lambda} \{ v_1 T_1 - f_1 \sin(i - \lambda) \} \dots \dots \dots (18)$$

Einfacher werden die expliziten Formeln, wenn man statt drei Beobachtungen deren vier, und zwar je zwei rechts und links von der Sprengung macht; man hat also hinzuzufügen die vierte Gleichung:

$$2 v_1 T_4 = 2 h \cos \lambda \cos i + 2 f_4 \sin(i + \lambda) \dots \dots \dots (19)$$

Dies gibt:

$$\frac{\sin(i - \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_2 - 2 T_1}{2 f_2 - 2 f_1} = \frac{dT}{df} \dots \dots \dots (20)$$

$$\frac{\sin(i + \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_4 - 2 T_3}{2 f_4 - 2 f_3} = \frac{dT'}{df} \dots \dots \dots (21)$$

$$h = \frac{2 v_1 T_1 - 2 f_1 \sin(i - \lambda)}{2 \cos i \cos \lambda} \quad \text{und} \quad h = \frac{2 v_1 T_3 - 2 f_3 \sin(i + \lambda)}{2 \cos i \cos \lambda} \dots \dots (22)$$

Man kann auch irgend zwei andere zusammengehörige Werte  $T$  und  $f$  einführen, z. B. den Knickpunkt  $2 f_0$  und erhält wie gewöhnlich:

$$h = 2 f_0 \frac{1 - \sin(i - \lambda)}{2 \cos i \cos \lambda} \quad \text{und} \quad h = 2 f_0' \frac{1 - \sin(i + \lambda)}{2 \cos i \cos \lambda} \dots \dots (23)$$

Praktisch sind häufig besser als Beobachtungen links und rechts vom Sprengpunkt solche durch Benutzung eines zweiten Sprengpunktes (II). Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2 v_1 T_1 &= 2 h_u \cos \lambda \cos i + 2 f_1 \sin (i - \lambda), \\ 2 v_1 T_2 &= 2 h_u \cos \lambda \cos i + 2 f_2 \sin (i - \lambda), \\ 2 v_1 T_3 &= 2 h_0 \cos \lambda \sin i + 2 (f - f_1) \sin (i + \lambda), \\ 2 v_1 T_4 &= 2 h_0 \cos \lambda \sin i + 2 (f - f_2) \sin (i + \lambda), \\ h_0 &= h_u - 2 f \operatorname{tg} \lambda; \end{aligned} \right\} \dots \dots (24)$$

$$\frac{\sin (i - \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_2 - 2 T_1}{2 f_2 - 2 f_1}, \quad \frac{\sin (i + \lambda)}{v_1} = \frac{2 T_4 - 2 T_3}{2 f_2 - 2 f_1} \dots \dots (25)$$

zur Ermittlung von  $v_2, h_u, \lambda$  aus zwei Beobachtungsstellen mittels zweier Sprengpunkte. Die Einführung des Knickpunktes ist jedoch nicht unbedingt erforderlich.

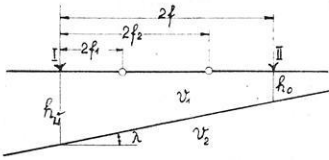


Fig. 13. Zwei Sprengpunkte

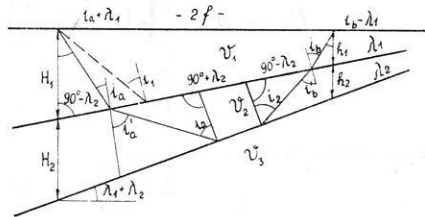


Fig. 14.

Refraktion beim Dreischichtenproblem

### b) Dreischichtenproblem

I. Seite rechts von der Sprengstelle (Fig. 14). Nach O. v. Schmidt beträgt die Laufzeit hier:

$$2 T = \frac{1}{v_1} \left[ 2 f \sin (i_b - \lambda_1) + H_1 \{ \cos (i_a + \lambda_1) + \cos (i_b - \lambda_1) \} \right] + 2 H_2 \sin i_1 \cos i_2 \cos (\lambda_1 + \lambda_2). \dots (1)$$

Daraus folgt:

$$\left( \frac{dT}{df} \right)_{(s)} = \frac{1}{v_1} \sin (i_b - \lambda_1) \dots \dots \dots (2)$$

$$\left( \frac{dT}{df} \right)_{(f)} = \frac{1}{v_1} \sin (i_a + \lambda_1) \dots \dots \dots (3)$$

$i_a$  und  $i_b$  werden wie folgt ausgedrückt:

$$i_b = \arcsin \frac{v_2}{v_3} \dots \dots \dots (4)$$

$$i_a = 90^\circ - \arcsin \frac{v_2}{v_3} - \lambda_2 \dots \dots \dots (5)$$



$$i_b = 90^\circ - \arcsin \frac{v_2}{v_3} + \lambda_2 \dots \dots \dots (6)$$

$$i_a = \arcsin \left[ \frac{v_1}{v_2} \cos \left( \arcsin \frac{v_2}{v_3} + \lambda_2 \right) \right] \dots \dots \dots (7)$$

$$i_b = \arcsin \left[ \frac{v_1}{v_2} \cos \left( \arcsin \frac{v_2}{v_3} - \lambda_2 \right) \right] \dots \dots \dots (8)$$

Um das Gesetz der Schar zu finden, setzen wir

$$2 T \cdot v_1 = 2 a \dots \dots \dots (9)$$

und

$$H_1 \{ \cos (i_a + \lambda_1) + \cos (i_b - \lambda_1) \} + 2 H_2 \sin i_1 \cos i_2 \cdot \cos (\lambda_1 + \lambda_2) = C_1, (10)$$

$$C_1 = H_1' + H_2 c_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \dots \dots \dots (11)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} H_1' &= H_1 \left\{ \sqrt{1 - v_1^2 \left( \frac{dT}{df} \right)_{(f)}^2} + \sqrt{1 - v_1^2 \left( \frac{dT}{df} \right)_{(s)}^2} \right\}, \\ c_1 &= 2 \frac{v_1}{v_2} \sqrt{1 - \left( \frac{v_2}{v_3} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Dann erhält man die Gleichung

$$\frac{2 a}{C_1} + \frac{2 f}{-C_1/v_1 \left( \frac{dT}{df} \right)_{(s)}} - 1 = 0 \dots \dots \dots (13)$$

Um alles im Maßstab  $H_2$  auszudrücken, wird gesetzt:

$$\frac{a}{H_2} = a', \quad \frac{f}{H_2} = f', \quad \frac{C_1}{H_2} = C_1' = \frac{H_1'}{H_2} + c_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \dots \dots (14)$$

somit:

$$\frac{2 a_1'}{C_1'} + \frac{2 f_1'}{-C_1'/v_1 \left( \frac{dT}{df} \right)_{(s)}} - 1 = 0 \dots \dots \dots (15)$$

Das ist eine *Geradenschar* mit dem Achsabschnitt auf der Zeitachse

$$\frac{H_1'}{H_2} + c_1 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \dots \dots \dots (16)$$

und dem Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die Zeitachse aus

$$\operatorname{ctg} \alpha = \left( \frac{dT}{df} \right)_{(s)} = \frac{1}{v_1} \sin \left\{ \arcsin \left[ \frac{v_1}{v_2} \cos \left( \arcsin \frac{v_2}{v_3} - \lambda_2 \right) \right] - \lambda_1 \right\} \dots (17)$$

II. In umgekehrter Richtung:

$$2 T = \frac{1}{v_1} \left\{ \begin{aligned} &[2 f \sin (i_a + \lambda_1) + h_1 \{ \cos (i_a + \lambda_1) + \cos (i_b - \lambda_1) \}] \\ &+ 2 h_2 \sin i_1 \cos i_2 \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (18)$$

Ähnlich wie vorhin setzen wir das 2. und 3. Glied =  $C_2$ :

$$C_2 = h'_1 + h_2 c_1 \cos(\lambda_1 + \lambda_2) \dots \dots \dots (19)$$

$$h'_1 = h_1 \{ \} \dots \dots \dots (20)$$

ferner:

$$\frac{a}{h_2} = a'_2, \quad \frac{f}{h_2} = f'_2, \quad \frac{C_2}{h_2} = C'_2 = \frac{h'_1}{h_2} + c_1 \cos(\lambda_1 + \lambda_2) \dots \dots (21)$$

und erhalten die Gleichung:

$$\frac{2a'_2}{C'_2} + \frac{2f'_2}{-C'_2/v_1 \left( \frac{dT}{df} \right)_{(f)}} - 1 = 0 \dots \dots \dots (22)$$

Dies ist eine *Geradenschar* mit dem Achsabschnitt auf der Zeitachse (der im Falle der Beobachtung auf der linken und rechten Seite vom Sprengpunkt mit dem früheren Achsabschnitt identisch ist):

$$\frac{h'_1}{h_2} + c_1 \cos(\lambda_1 + \lambda_2), \dots \dots \dots (23)$$

und dem Neigungswinkel  $\beta$  gegen die Zeitachse aus:

$$\text{ctg } \beta = \left( \frac{dT}{df} \right)_{(f)} = \frac{1}{v_1} \sin \left\{ \arcsin \left[ \frac{v_1}{v_2} \cos \left( \arcsin \frac{v_2}{v_3} + \lambda_2 \right) \right] + \lambda_1 \right\} \dots (24)$$

Damit lassen sich die Geradenscharen, die zu den Werten  $v_1, v_2, v_3, \lambda_1, \lambda_2$  gehören, darstellen.

### c) Mehrschichtenproblem

Der tg des Neigungswinkels der Laufzeitkurve gegen die Zeitachse ist gleich der „Scheingeschwindigkeit“  $v_{(f)}, v_{(g)}$ . Diese ist von Schicht zu Schicht und zu beiden Seiten vom Sprengpunkt verschieden.

Aus der Formelableitung von O. v. Schmidt folgt, daß alle gemessenen Scheingeschwindigkeiten sofort über die Größe des Emergenzwinkels an beiden Strahlenden Aufschluß geben. Überhaupt folgt daraus, daß sämtliche Winkel nur von den Schichtneigungen und Geschwindigkeiten, nicht aber von den Entfernungen und Teufen abhängen (wie das bei der Reflexion der Fall ist).

Diese Regel gilt nicht nur für drei, sondern auch für mehr Schichten.

Durch sukzessives Vorrücken erhält man so auf einfachste Weise zunächst die *Schichtneigungen* nach den Formeln (a. a. O., S. 44):

$$\sin(i_a + \lambda_{n-1}) = \frac{v_1}{v_{n(f)}}$$

$$\sin(i_b - \lambda_{n-1}) = \frac{v_1}{v_{n(g)}}$$

Daraus folgt

für Schicht I . . . . . die Unbekannte  $v_1$ ;

$$\text{„ „ II } \left. \begin{array}{l} \sin(i_1 + \lambda_1) = v_1/v_{2(f)} \\ \sin(i_1 - \lambda_1) = v_1/v_{2(s)} \end{array} \right\} \text{daraus } i_1, \lambda_1, v_2 = \frac{v_1}{\sin i_1};$$

$$\text{„ „ III } \begin{array}{l} \sin(i_a + \lambda_1) = v_1/v_{3(f)}, \text{ „ } i_a, \\ \sin(i_b - \lambda_1) = v_1/v_{3(s)}, \text{ „ } i_b, \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(i_2 + \lambda_2) = \frac{\sin i_a}{\sin i_1} \\ \sin(i_2 - \lambda_2) = \frac{\sin i_b}{\sin i_1} \end{array} \right\} \text{„ } i_2, \lambda_2, v_3 = \frac{v_2}{\sin i_2};$$

$$\text{„ „ IV } \begin{array}{l} \sin(i_a + \lambda_1) = v_1/v_{4(f)} \text{ „ } i_a, \\ \sin(i_b - \lambda_1) = v_1/v_{4(s)} \text{ „ } i_b, \end{array}$$

$$\sin(i_{a a} + \lambda_2) = \frac{\sin i_a}{\sin i_1} \text{ „ } i_{a a},$$

$$\sin(i_{b b} - \lambda_2) = \frac{\sin i_b}{\sin i_1} \text{ „ } i_{b b},$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(i_3 + \lambda_3) = \frac{\sin i_{a a}}{\sin i_2} \\ \sin(i_3 - \lambda_3) = \frac{\sin i_{b b}}{\sin i_2} \end{array} \right\} \text{„ } i_3, \lambda_3, v_4 = \frac{v_3}{\sin i_3} \text{ usw.}$$

Die weiteren fehlenden Bestimmungsstücke, die *Teufen* unter dem Sprengpunkt, kann man bis zum Dreischichtenproblem streng nach den Formeln von O. v. Schmidt erhalten.

Darüber hinaus führen die Ableitungen zu sehr komplizierten Formeln. Man verschafft sich die weiteren (wie auch schon die vorhergehenden) *Teufen* am besten graphisch, indem man die letzte Neigung entsprechend der Berechnung an beliebiger Stelle einträgt und die Laufzeit im Bilde summiert; es ergibt sich dann ein Widerspruch  $W$  zwischen der summierten und der beobachteten Laufzeit. Infolgedessen ist die letzte Schicht parallel zu versetzen, um das Maß

$$x = \frac{W}{2} : \left( \frac{1}{v_{n-1} \cos i_{n-1}} - \frac{\text{tg } i_{n-1}}{v_n} \right) = \frac{W}{2} \cdot \frac{v_{n-1}}{\cos i_{n-1}}.$$

Beispielsweise führte die graphische Summierung zu dem Widerspruch  $W = 0.029$  sec; die Rechnung hatte bis dahin ergeben:

$$v_3 = 1500, \quad i_3 = 36^\circ, \quad v_4 = 2550.$$

Man erhielt:

$$x = \frac{0.029}{2} \cdot \frac{1500}{0.809} = 27.0 \text{ m.}$$

Jede Schicht führt somit zu einem Geradenpaar, die erste zu einem solchen mit Neigungswinkel  $45^\circ$  im Ursprung, die weiteren zu solchen mit Neigungswinkeln  $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{v_1} \sin(i - \lambda)$ ,  $\text{ctg } \beta = \frac{1}{v_1} \sin(i + \lambda)$  mit gemeinsamen Schnittpunkten auf der Zeitachse, aus deren Lage die Teufe berechnet werden kann.

Zur Festlegung der ersten Schicht wird nur ein Parameter benötigt, die Geschwindigkeit  $v_1$ .

Für jede weitere Schicht sind drei weitere Parameter nötig: Neigung, Teufe, Geschwindigkeitsverhältnis.

Hierfür sind zur Bestimmung drei Stücke erforderlich: gemeinsamer Achsabschnitt und Neigungen der Laufzeitkurve nach beiden Seiten (Fig. 15).

Während bei der Reflexionsmethode der mathematische Grad mit der Anzahl der Schichten fortschreitet (geometrische Progression), bleibt er bei der Refraktionsmethode dauernd linear (arithmetische Progression). Jede neue Schicht bringt nur die Anhängung zweier neuer Polygonseiten, die zudem der Bedingung unterliegen, daß sie durch ein und denselben Punkt der Zeitachse gehen.

So entsteht schließlich für den allgemeinsten Fall einer kontinuierlichen Zunahme der „seismischen Härte“ des Untergrundes ein Sehnepolygon, das in eine beliebige Kurve (die Laufzeitkurve des Erdbebenstrahles) übergeht.

Jede Unsymmetrie dieser Kurve in Beziehung auf zwei links und rechts im gleichen Abstand vom Sprengpunkt gezogene Tangenten zeigt an, daß dort eine Neigung vorhanden ist, oder in diesem Falle, daß ein verschiedenes Gesetz für die kontinuierliche Zunahme vorliegt.

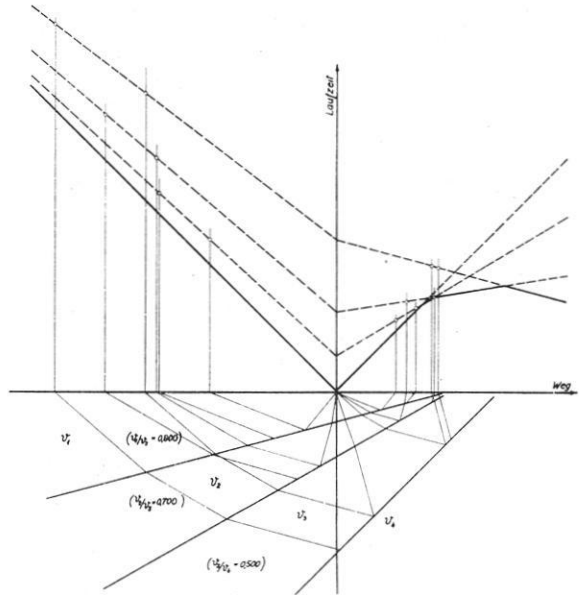


Fig. 15.  
Refraktionslaufzeitkurven beim Mehrschichtenproblem

### Schlußbemerkung

Fast ausschließlich sind in der jetzigen Praxis die verwendbaren Ergebnisse der Beobachtungen Laufzeitkurven.

Diese bestehen im Falle der Refraktion stets aus den einfachsten Kurvenscharen, nämlich geraden Linien, die sich zu Polygonen zusammensetzen.

Bei der Reflexion aber bereits beim einfachsten Problem aus Hyperbeln und bei steigender Schichtenzahl aus Kurven höherer Ordnung, die Hyperbeln nahe kommen.

Es fallen somit bei der Refraktionsmethode die Tangenten an die Kurven, die „Scheingeschwindigkeiten“ überall mit den Laufzeitkurven zusammen, und man benötigt zu einem sicheren Resultat nur kurze Stücke der Kurven. Diese Umstände bedeuten eine wesentliche Vereinfachung und sind schuld an den ursprünglich großen Fortschritten auf diesem Gebiet.

Dagegen ändern die „Scheingeschwindigkeiten“ bei der Reflexionsmethode von Punkt zu Punkt ihre Richtung, und man kann deshalb mit ihnen wenig anfangen. Darin dürfte die größere Schwierigkeit in der strengen Behandlung der Aufgabe zu suchen sein.

Nur in dem Falle, daß man die Laufzeiten bei senkrechter Reflexion mißt (seismische Lotung), erhält man wieder gerade Linien für die Laufzeitkurven, woraus man folgern muß, daß dieses Problem geometrisch einfacher zu lösen ist als das allgemeine.

---

### Gebäudeschwingungen beim Erdbebenstoß \*)

Von **W. Sponheuer**, Jena. — (Mit 4 Abbildungen)

Zur Klärung der Schwingungs- und Beanspruchungsform von Gebäuden werden die Biege- und Spannungslinien eines einseitig eingespannten Stabes von gleichem Querschnitt ermittelt, dessen Unterlage eine Stoßbewegung ausführt. Es ergibt sich, daß die Biege- und Spannungslinien sich aus zwei Anteilen entsprechend den beiden Frequenzen der Stoßbewegung (einer gekoppelten Schwingung) zusammensetzen.

An der Reichsanstalt für Erdbebenforschung hat Prof. Sieberg eine Reihe von Erfahrungen, die er bei seinen Studien schwerer Erdbeben an Ort und Stelle gesammelt hat, einer experimentellen Nachprüfung unterzogen, an der ich beteiligt war. Es handelt sich hierbei um Versuche an Modellen von Ziegelbauten, die nicht durch einfache sinusförmige Schwingungen, sondern durch eine Stoßbewegung auf ihre Festigkeit hin untersucht werden.

Der Stoßtisch, auf dem die Modelle aufgebaut werden, besteht im wesentlichen aus einer tischähnlichen Plattform *T* aus verschweißtem U-Eisen, belegt mit einer Holzplatte. Diese Plattform ruht mittels dreier kugelgelagerter Rollen auf einem

---

\*) Vortrag, gehalten auf der XII. Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft vom 8. bis 10. Oktober 1936 in Berlin.