

Werk

Jahr: 1937

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:13

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0013

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0013

LOG Id: LOG_0031

LOG Titel: Gravitationsfeld und Oberflächengestalt der Erde und ihre geometrische Festlegung

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Gravitationsfeld und Oberflächengestalt der Erde und ihre geometrische Festlegung

Von **A. Berroth**, Aachen. — (Mit 4 Abbildungen)

Die Lösung der Aufgabe der Bestimmung des Gravitationsfeldes zerfällt in die nach seiner geometrischen Form und die nach seinem physikalischen Inhalt, die der Oberflächengestalt besteht nur aus der Ermittlung der Form. — Die historische Entwicklung hat es hierbei mit sich gebracht, daß physikalische und geometrische Begriffe im Grenzgebiet der praktischen Erkenntnis sich manchmal in unübersichtlicher Weise vermischen. — Es werden die geometrischen und die physikalischen Elemente herausgestellt, ein Beitrag zur Vervollständigung eines streng geometrischen Verfahrens geliefert und die verschiedenen Methoden in den Möglichkeiten ihrer Verwirklichung kritisch untersucht. Hierbei wird auf einen Weg hingewiesen, der die gegen das Clairautsche Theorem erhobenen Einwände zu umgehen gestattet. Schließlich werden die Möglichkeiten einer analytischen Flächenbestimmung untersucht.

Die Frage nach der Form einer Fläche ist eine geometrische Aufgabe und muß somit auch mit rein geometrischen Mitteln lösbar sein, als welche in Frage kommen Längen- und Winkelmessungen sowie Verhältnisse von physikalischen Meßgrößen gleicher Art (denen somit keine Dimension zukommt), zu deren Bewältigung das Rüstzeug der Flächentheorie ausreicht.

Die Bestimmung des physikalischen Inhalts bedingt die Berücksichtigung der Massen und ihrer Auswirkungen, der Feldkräfte und ihrer differentiellen Änderungen im Raum und erfordert zusätzlich das Rüstzeug der Potentialtheorie.

Form und Inhalt brauchen jedoch nicht grundsätzlich etwas verschiedenes zu bedeuten, wie man am Beispiel der Niveaulächen erkennt, welche man sowohl nach geometrischen als nach physikalischen Methoden und durch Zusammenwirken beider bestimmen kann.

Es liegen somit folgende drei Gruppen von Aufgaben vor: 1. Die Ermittlung der Oberflächengestalt der Erde und des umgebenden Raumes auf geometrischem Wege. Diesem wären zur Beschreibung der Gravitationsfelder die Größen Kraft, Kraftrichtung usw. zuzuordnen. 2. Die Ermittlung der Flächen gleichen Energiewertes, der Niveaulächen, auf geometrischem Wege. 3. Die Ermittlung dieser auf physikalischem Wege in Verbindung mit geometrischen Operationen und jedesmalige Zuordnung der Oberfläche und des umgebenden Raumes.

Wenn man nur kleine Teile des Erdkörpers für sich betrachtet, so hält man die getrennte Behandlung beider Teilaufgaben, der Raumbestimmung und der Zuordnung ohne weiteres für möglich und tatsächlich ist sie es auch.

Sobald aber das über die ganze Erde sich erstreckende Feld einheitlich in demselben Sinne behandelt werden soll, gibt es keine restlos befriedigende Methode, was von kleineren Ursachen abgesehen, in erster Linie damit zusammenhängt, daß es bis jetzt nicht gelungen ist (ja noch nicht einmal der

Versuch unternommen wurde), die *Kontinente durch geodätische Messungen zu verbinden* und ferner infolge der ungenügend erfaßbaren *atmosphärischen Strahlenbrechung*, welche die Anwendung bestimmter, sonst aussichtsreicher Verfahren verhindert.

Da aber die Erde, als Ganzes betrachtet, der Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit nahekommt, so war die Möglichkeit gegeben, eine dieser angenäherte Fläche zu bestimmen. Zur Bewältigung dieser Aufgabe war es jedoch nötig, zu gewissen Vernachlässigungen und Hypothesen zu greifen, die, wenn auch ihr Wirkungsbereich ungefähr abgeschätzt werden konnte, für die künftige Forschung doch lästig sein dürften.

Deshalb wäre die ideale Lösung im Sinne der Potentialtheorie die unmittelbare Bestimmung der Raumkoordinaten des gesamten Oberflächenreliefs auf rein geometrischem Wege, welchem das Kraftfeld in der Umgebung des Reliefs zuzuordnen wäre und welches für die Bestimmung der Flächen gleichen Potentials in Strenge geradezu Voraussetzung ist.

Tatsächlich ist bisher (notgedrungen) umgekehrt verfahren worden, d. h. es wurde zunächst die genäherte Form der Niveaulfläche ermittelt, welcher das Oberflächenrelief und das übrige Kraftfeld angehängt wurde, wodurch es nicht möglich war, die Forderungen der Potentialtheorie in Strenge zu erfüllen.

Deshalb ist es aus erkenntnistheoretischen Gründen bereits als wertvoll zu erachten, wenn ein geometrisches Verfahren wenigstens theoretisch, jedoch stets mit der Absicht, im Rahmen praktischer Verwirklichung zu bleiben, bis zur vollständigen Lösung durchgedacht werden kann.

Im folgenden sind die Lotrichtungen trotz ihrer physikalischen Bedingtheit als geometrische Größen betrachtet, weil die Messung ihrer Winkeldifferenzen als eine geometrische Operation anzusehen ist und der sin dieser Winkel das Verhältnis einer Kraftkomponente zur Gesamtkraft darstellt.

1. Das geometrische (astronomisch-geodätische) Verfahren von F. R. Helmert aus gemessenen Krafftrichtungen

[Methode der sukzessiven Annäherung mit Hilfe
der Fundamentalgrößen I. Ordnung *)]

Es handelt sich hierbei um das in „Lotabweichungen“ Heft I bis V, Veröff. d. Preuß. Geod. Inst. niedergelegte klassische Verfahren. Dieses geht den als „umgekehrt“ bezeichneten Weg. Ihm ist charakteristisch, daß es ein „totales“ Beobachtungsmaterial nicht verlangt.

Die in die physische Lotrichtung gebrachte Umdrehungsachse des Theodolits bedingt die Richtungsmessung in „Vertikalschnitten“, in welchen auch die Seitenlängen gemessen werden, falls sie nicht in Form von „Feldlinien“ abgesteckt werden.

*) Siehe Fußnote in 6 B.

Beide Arten von Messungsergebnissen, Richtungen und Seiten, werden auf ein Näherungsellipsoid übernommen, wobei sie durch geringe (oft zu vernachlässigende) Korrekturen in solche geodätischer Linien des Ellipsoids übergeführt werden.

Von diesem Ellipsoid wird angenommen, daß sein Äquator mit dem Himmelsäquator zusammenfalle. Es werden für ein Punktsystem, beispielsweise in der Nähe des Äquators, die Normalen des Ellipsoids berechnet und mit den physischen Lotrichtungen verglichen; derartige Differenzen nennt man „*Lotabweichungen*“ [aus physikalischen und geometrischen Quellen herrührend*)].

Da die physischen Lotrichtungen z. B. am Äquator wild durcheinandergehen, so ist die genaue Lage desselben auf der physischen Erde nicht ohne weiteres angebar, da die Verbindungslinie der Punkte auf der Oberfläche der Erde, die genau die gemessene Breite 0 haben, eine komplizierte Raumkurve darstellt, als Äquator aber die ebene Schnittkurve der Parallelebene des Himmelsäquators mit der Erde bezeichnet wird.

Man findet die Lage der ebenen Schnittkurve auf der physischen Oberfläche vielmehr nur indirekt und angenähert, indem man den konstanten Anteil ξ_0 , λ_0 aller von der zufälligen Massenordnung des Bezugspunkts herrührenden Lotabweichungen, möglichst eines ganzen Kontinents („absolute Lotabweichung“) berechnet.

Um diesen Betrag hat man alsdann die gesamte physische Fläche auf dem bestanschließenden Ellipsoid (das die Verbesserungen da , $d\lambda$ gegen das Näherungsellipsoid aufweisen soll) zu verschieben, wodurch der Äquator auf der physischen Fläche und überhaupt die physische und geometrische Fläche erst gegeneinander festliegen.

Bemerkenswert ist bei diesem Verfahren im Vergleich zu anderen, daß man über die Lage des Schwerpunkts des Erdkörpers keinerlei Aussage, vielmehr eine solche nur über die Mittelpunkt- und Achsenlage der Ellipsoidfläche zu einem Oberflächenpunkt erhält.

Da es ein direktes Vergleichsverfahren zwischen den physischen Lotrichtungen nicht gibt, so müssen sie in ihren Durchstoßpunkten mit dem Himmelsgewölbe, und zwar zweckmäßig in dem vom Standort unabhängigen Koordinatensystem des Himmels: Rektaszension und Deklination angegeben werden, während die geodätischen Messungen vielfach in den vom Standort abhängigen Systemen: Stundenwinkel und Deklination bzw. Azimut und Höhe ausgedrückt werden.

Das Näherungsellipsoid soll so beschaffen sein, daß es erlaubt ist, mit Hilfe der ersten Differentialquotienten sowohl auf die gesuchte, angenäherte Gleichgewichtsfläche (meist ebenfalls ein Ellipsoid) als auch die physische Fläche überzugehen.

*) Im Gegensatz hierzu versteht man unter „*Lotablenkungen*“ geringe örtlich bedingte Differenzen von Lotrichtungen, die aus rein physikalischen Quellen herrühren.

Dies ist deswegen notwendig, weil die Aufgabe überhaupt nur durch die Methode d. kl. Qu. bewältigt werden kann

1. wegen der Meßfehler,
2. zur Elimination der tatsächlichen Flächenverbiegungen geringeren Ausmaßes als derjenigen, die man bestimmt,
3. wegen der reichlichen Überbestimmtheit.

Die gesuchte Fläche wird als angenäherte Niveaufläche aus der Forderung bestimmt, daß sie die ermittelten physischen Lotrichtungen überall senkrecht durchsetzen soll.

Dazu ist notwendig, in allen Teilen den elastischen Übergang vom Näherungs-ellipsoid zu den anderen Flächen durch Differentialformeln herzustellen, nämlich

1. durch Verbesserungen der astronomischen Messungen, Breite, Länge, Azimut,
2. durch Verbesserungen der geodätischen Messungen, geodätischer Linien und geodätischer Richtungen,
3. durch Verbesserung der Ellipsoidkonstanten, da , $d\alpha$,
4. durch Einführung der Lotablenkung des Bezugspunktes ξ_0 , λ_0 .

Zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Punkten i , k erhält man folgende Differentialbeziehungen:

ξ , λ = Lotabweichungskomponenten,

oberer Index vertikal = Messungsergebnisse,

oberer Index horizontal = Näherungsellipsoid.

$$\begin{aligned} \xi_k = B'_k - \bar{B}_k + dB'_k + p_1 (B'_i - \bar{B}_i + dB'_i - \xi_i) \\ - p_2 \lambda_i \\ + p_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + dS'_{ik}) \\ + p_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + dT'_{ik}) \\ + p_5 \frac{da}{a} \\ + p_6 d\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k = L'_k - L'_i - \bar{L}_k + \bar{L}_i + dL'_k - dL'_i + q_1 (B'_i - \bar{B}_i + dB'_i - \xi_i) \\ - q_2 \lambda_i \\ + q_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + dS'_{ik}) \\ + q_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + dT'_{ik}) \\ + q_5 \frac{da}{a} \\ + q_6 d\alpha. \end{aligned}$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\sin B_k} (T'_{ki} - \bar{T}_{ki} + dT'_{ki}) + r_1 (B'_i - \bar{B}_i + dB'_i - \xi_i) \\ - r_2 \lambda_i \\ + r_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + dS'_{ik}) \\ + r_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + dT'_{ik}) \\ + r_5 \frac{da}{a} \\ + r_6 da.$$

Diese Gleichungen werden, ausgehend vom Bezugspunkt mit Index $i = 0, k = 1$, dann $i = 1, k = 2 \dots$ folgerichtig so behandelt, daß sie nur noch sämtliche Lotabweichungen und sämtliche Verbesserungen enthalten.

Nach Beseitigung von Messungswidersprüchen, die durch die doppelte Beziehung in λ und durch Zusammenschluß zu Polygonen möglich ist, erscheinen nur noch Gleichungen von der Form (in einer Anzahl entsprechend der Anzahl der physischen Lotrichtungen):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \alpha_2 \lambda_0 + \alpha_3 \frac{da}{a} + \alpha_4 da, \\ \eta &= \beta_0 + \beta_1 \xi_0 + \beta_2 \lambda_0 + \beta_3 \frac{da}{a} + \beta_4 da, \end{aligned} \right\}$$

aus denen die (hier vier) Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, Äquatorhalbmesser, Abplattung und Orientierung.

Einige Bemerkungen zu diesem Verfahren

1. Die *Übertragung* der in Ebenen durch die physische Lotrichtung gemessenen Richtungen und Seiten auf das Näherungsellipsoid läßt sich jedenfalls so genau ausführen, daß sie selbst dann keinen merklichen Fehler erzeugen kann, wenn derselbe sich systematisch häufen würde.

2. Die *Lotkrümmung*, auf welche aus begrifflichen Gründen in Strenge keine Rücksicht genommen werden kann (ist dieser Einfluß doch gleichbedeutend mit der Lösung der Hauptaufgabe selber), muß das Resultat wesentlich beeinflussen.

Ihre Berücksichtigung setzt die Kenntnis der Dichte und Lage aller umgebenden Massen voraus, um die Messung aufs Meeresniveau reduzieren zu können; genähertes Verfahren hierzu von F. R. Helmert, Akad. d. Wiss. Berlin 1900, 1901.

Die Unsicherheit in der Berechnung der Lotkrümmung ist von derselben Ordnung in Beziehung auf die Flächenberechnung wie die aus denselben unzugänglichen Ursachen hervorgerufene Unsicherheit in der Reduktion der g -Messungen der nächsten Verfahren, so daß in diesem Punkt beiden Methoden ähnliche Mängel anhaften.

3. Die Überbrückung der ozeanischen Räume; dieselben können zurzeit direkt nicht überbrückt werden. Es lassen sich also bestenfalls für alle fünf oder mit der Polkappe sechs Kontinente eigene Näherungsellipsoide finden.

Falls diese Rechnungen erlauben, für jeden Kontinent seinen Wert ξ_0 , λ_0 zu errechnen (d. h. ihn an die richtige Stelle des Ellipsoids zu rücken), ist damit in gewissem Sinne auch eine geodätische Überbrückung der ozeanischen Räume erreicht, d. h. eine geodätische Entfernungsbestimmung über die Ozeane hinweg, deren mittlerer Fehler eine Grenze von ± 30 m nicht zu übersteigen braucht.

4. Die Rücksichtnahme auf den verschärften Begriff der Lotablenkung nach Poincaré*).

Hiernach wird bewiesen, daß nicht nur die physischen Lotrichtungen in den Endpunkten einer geodätischen Linie, sondern auch noch die längs der ganzen Linie einen Beitrag zum Resultat liefern, dessen Größe schwer abzuschätzen ist.

Dies käme praktisch darauf hinaus, die Entfernungen zwischen den astronomisch vermessenen Lotlinien jedenfalls genügend klein zu wählen.

2. Die physikalischen Verfahren von Clairaut, Stokes, Rudzki und Hopfner aus gemessenen Intensitäten der Kraft

Hierbei spielt die geometrische Vermessung der Beobachtungen in tangentialer Richtung nur eine untergeordnete Rolle, was darauf zurückzuführen ist, daß sich erst auf 1.2 km Nord-Südentfernung die Schwerebeschleunigung um 1 mgal ändert, dagegen in stärkerem Maße in radialer Richtung, wo bereits 3 m diese Änderung hervorrufen. Deswegen erhält man nur bei Kenntnis des Erddurchmessers die geometrische Figur des Geoids oder einer ihr nahekommenden Fläche.

Diesen Verfahren gemeinsam ist die aus der Theorie entspringende Forderung nach einem „totalen“ Beobachtungsmaterial, was ihre Anwendung bisher erschwerte und die gewonnenen Schlußfolgerungen unsicher machte**).

α) Niveausphäroide nach Clairauts Theorem. Die gemessenen Schwerewerte werden durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen erfaßt. Der Übergang zu Radialwerten geschieht durch das (erweiterte) Clairautsche Theorem. Hierbei ist eine wesentliche und zur Zeit noch umstrittene Frage die nach der „richtigen“ Reduktion der Schwerewerte.

*) H. Poincaré: Sur les déviations de la verticale en géodésie, Bull. astr. Bd. 18 (1901); vgl. hierüber F. Hopfner: Phys. Geodäsie 1933, S. 357.

**) Vgl. hierzu: F. Hopfner: Die praktische Lösung der II. Randwertaufgabe der Geodäsie. Zeitschr. f. Geophys. 1933, S. 277; F. Ackerl: Die Schwerkraft am Geoid. Akad. d. Wiss. Wien 1932, S. 303; K. Jung: Zusammenfassendes Referat. Zeitschr. f. Verm.-Wes. 1935, S. 550; M. P. Rudzki: Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité. Bull. astr. 1905.

F. Hopfner ist soweit gegangen, einen Teil der von anderen Autoren errechneten Radialstörungen (z. B. die Dreiachsigkeit des Ellipsoids) durch den „Term von Bruns“ genannten Ausdruck zu erklären.

Dies wird dadurch motiviert, daß die aufs Meer zwar richtig reduzierte Schwere mit einer theoretischen Schwere verglichen wird und nun diese Differenzen („scheinbare Schwerestörungen“) die Originalbeobachtungen vertreten.

Da sich aber die reduzierte und die theoretische Schwere nicht auf denselben Punkt (der Höhe nach) beziehen, so sollen dadurch bereits fehlerhafte Ausgangsdaten erzeugt sein.

Abgesehen davon, daß diese Frage zur Zeit noch nicht völlig geklärt ist, wäre es nützlich, nicht von jenen Differenzen, sondern von den Originalbeobachtungen auszugehen und diese zur Verwendung im Clairautschen Theorem geeignet zu machen, d. h. eine Fehlerausgleichung vorwegzunehmen, wie dies im folgenden beschrieben wird.

Verwendung der Originalbeobachtungen an Stelle von Differenzen gegen eine Normalformel gleichen Potentials

Die erste Welle, deren Sicherung man nötig hat, betrifft das dreiachsige Ellipsoid. Dies ist in der Entwicklung der Schwerewerte ausgedrückt durch die Glieder

$$\beta'_2 \cos^2 B \cos 2L \quad \text{und} \quad -\beta''_2 \cos^2 B \sin 2L.$$

Der Vorschlag beruht darauf,

1. nur Schwerestationen zu wählen, deren Meereshöhe gering ist; ferner keine Extremwerte, wie Insel- und Küstenstationen,
2. dieselben nach der Formel von Prey zu reduzieren*),
3. bereits diese Originalwerte mit Hilfe von Profilen z. B. graphisch auszugleichen, also zu den Meridianen als Abszissen die reduzierten Werte als Ordinaten rings um die Kugel in 18 Profilen, sodann zum Äquator und einigen Parallelkreisen als Abszissen die Schwerewerte in 12 Profilen.

Auf diese Weise erhält man

1. den Mittelwert von g am Äquator,
2. die Variationen in g in Breite und Länge ohne jeden Vergleich mit einer theoretischen Schwere.

Die ausgeglichenen Werte sollen in die Clairautsche Formel zur strengen Auflösung derselben eingesetzt werden.

Es läßt sich beweisen, daß die dann erhaltene Differenz der Hauptträgheitsmomente A und B im Äquator zwangsläufig mit einer Radialstörung verbunden

*) Bezüglich Reduktion nach Prey oder Freiluftreduktion siehe H. Jeffreys: Gerlands Beitr. 1931, S. 378; K. Jung: z. B. Zeitschr. f. Verm.-Wes. 1935, S. 550; F. Hopfner: a. a. O. Gerlands Beitr. 1933, S. 309.

ist, d. h. daß die Dreiachsigkeit des Ellipsoids und damit des Geoids dann eine Realität und keine rechnerische Fiktion ist.

β) *Geoidundulationen nach G. G. Stokes, M. P. Rudzki und F. Hopfner.* Alle drei Verfahren erlauben, ihrer Theorie entsprechend „scheinbare“ Schwerestörungen, d. h. also die Differenzen zwischen den aufs Meer reduzierten Schwerkraften und solchen eines Niveausphäroids zu benutzen.

Die Verfahren sind ihrem Wesen nach sehr ähnlich, sie unterscheiden sich hauptsächlich in den Ausgangsforderungen und ihrer theoretischen Ableitung.

Nach dem ersten Verfahren hat R. A. Hirvonen die Hauptundulation der Kugelfunktionen II. Ordnung, das dreiachsige Ellipsoid, abgeleitet.

Das zweite Verfahren wurde praktisch noch nicht erprobt, weil es ziemlich umständlich ist.

Nach dem dritten hat F. Ackerl, dem Vorgang einer Kugelfunktionsentwicklung von A. Prey bis zur 16. Ordnung folgend, die entsprechenden Undulationen abgeleitet.

Wenn beide Autoren zu gänzlich verschiedenen Ergebnissen gelangt sind, so liegt dies nur an dem noch immer überaus lückenhaften und wohl auch unsicheren Beobachtungsmaterial, das zu hypothetischen Überbrückungen nötigte, die wesentlich verschieden ausgeführt wurden.

Alle drei Verfahren lassen die Möglichkeit der sehr genauen Ableitung von Undulationen zu und müssen zu identischen Resultaten führen, wenn die Theorien richtig sind.

3. Strenge Lösung für sämtliche Niveauflächen des Außenraums

Das Kraftfeld und die Niveauflächen der Erde sind im Außen- und Innenraum eindeutig bestimmbar, wenn entweder alle Kraftquellen innerhalb einer geometrischen Fläche S oder außerhalb derselben sich befinden.

Wenn sich jedoch Kraftquellen innerhalb und solche gleichzeitig außerhalb der Fläche S befinden, dann ist die Lösung in Strenge nur möglich, wenn man die Kraftquellen kennt (K. Jung).

Das Meeresniveau als solche Fläche S genommen, bedingt also gerade den letzteren Fall, woraus die verschiedensten Schwierigkeiten resultieren.

Wenn es jedoch gelänge, als Ausgangsfläche S die Oberfläche der physischen Erde zu bestimmen, so läge eine eindeutige Lösung für den Außenraum vor.

Die Lösung beruht hauptsächlich auf den Sätzen des englischen Mathematikers G. Green, die gestatten, das Raumintegral in ein Oberflächenintegral zu verwandeln; siehe z. B. A. Berroth, Handb. d. Phys. II, Schweremessungen 1926; F. Hopfner, Phys. Geodäsie 1933.

Es sei T der Außenraum der geschlossenen Fläche S . Die Funktion U sei harmonisch in T ; am Rande seien die Werte von U und $\partial U / \partial n$ gegeben. Gesucht werden die Werte von U im Aufpunkt (a, b, c) des Außenraumes; Σ sei der Innen-

raum einer Kugel, derart, daß S ganz im Innenraum von Σ liegt. Man findet für das Potential in (a, b, c) den Ausdruck:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma. \quad (1)$$

Um rechter Hand U wegzuschaffen, wird die II. Greensche Funktion eingeführt:

$$G_a^{(2)} = H_a^{(2)} - \frac{1}{r} \dots \dots \dots (2)$$

$H_a^{(2)}$ sei eine harmonische Funktion im Außenraum, die an der geschlossenen Fläche S in den Aufpunkten (a, b, c) die Werte

$$\frac{\partial H_a^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \text{const} \dots \dots \dots (3)$$

annimmt, und ferner wird von selbst die Relation zwischen $H_a^{(2)}$ und U bestehen:

$$\int_S \left[H_a^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H_a^{(2)}}{\partial n} \right] d\sigma = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Dann läßt sich (1) überführen in das Oberflächenintegral

$$U(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi} \int_S G_a^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma \dots \dots \dots (5)$$

Die strenge Lösung verlangt also

1. die geometrische Bestimmung der Form einer Fläche S , d. h. der Oberfläche der Erde (hierzu siehe den folgenden Abschnitt),
2. die Aufstellung der II. Greenschen Funktion in allen Punkten des Außenraumes, was sich z. B. mit Kugelfunktionen bis zu einem gewissen Grade durchführen läßt,
3. die Messung $\partial U / \partial n$, d. h. die Schwerkraftkomponente senkrecht zur Oberfläche von S , was heutzutage sogar auf den Meeren ausführbar ist,
4. die Bildung des Oberflächenintegrals, die numerisch ausführbar ist.

Praktisch der schwierigste Punkt ist Nr. 1, und zwar in erster Linie wegen der Unüberbrückbarkeit der Ozeane.

Die strenge Lösung ist also innerhalb eines gewissen Rechenumfanges durchführbar, vorbehaltlich der Lösung der geometrischen Aufgabe der Raumbestimmung.

4. Die unmittelbare geometrische Polyederbestimmung nach H. Bruns

(Figur der Erde, S. 80, 47)

Im Zusammenhang mit der Flächenbestimmung S wird von einigen Autoren das Verfahren von Bruns erwähnt, obwohl dieser hinsichtlich dieses Punktes in seiner Originalarbeit gar nicht mehr beabsichtigte, als überhaupt nur eine

gewisse Vorstellung zu vermitteln. Das Verfahren ist deswegen unvollständig und in mancher Hinsicht unklar.

Es soll ein der Erde umschriebenes Reliefpolyeder ausgemessen werden. Was der Urheber darüber sagt, ist ungefähr folgendes:

Die Stationen bilden die Ecken eines Polyeders, dessen Kanten die einzelnen einvisierten Richtungen, dessen Seiten die von diesen Richtungen eingeschlossenen ebenen Dreiecke sind.

Durch die auf jeder Station gemessenen Horizontalwinkel (Azimutunterschiede) und Zenitdistanzen ist jenes geometrische Gebilde, nämlich Polyeder und Vertikalsystem seiner Form nach, durch die Grundlinien seiner Größe nach vollständig bestimmt.

Schließlich werden die Schwierigkeiten der Strahlenbrechung bei den Zenitdistanzen erwähnt und mit dem Satz beendet: Man hat nur die Wahl zwischen trigonometrischem Nivellement (das sind Zenitdistanzen), oder man verzichtet darauf, sich bei der Ermittlung der mathematischen Figur der Erde von allen hypothetischen Annahmen frei zu machen.

Bemerkung. Es ist reichlich viel gesagt, aus diesen wenigen Sätzen ein „Verfahren“ herauslesen zu wollen, wie das vielfach geschieht; denn bei näherem Zusehen stößt man sofort auf Schwierigkeiten, deren Lösung der Urheber nicht einmal angedeutet hat.

Außerdem ist das Verfahren auch a priori nicht streng hypothesenfrei (soll heißen geometrisch) definiert; denn es werden Messungen von Horizontalwinkeln, Azimuten, Zenitdistanzen, Vertikalensystemen vorgeschlagen, also Messungen, bei denen die Orientierung nach der physischen Lotrichtung, also der Kraftrichtung, vorgesehen ist, wodurch die alten Schwierigkeiten auftreten.

5. Definition einer unmittelbaren geometrischen Ausmessung des Erdkörpers

Es soll eine geschlossene Fläche S (der physische Erdkörper), wie von der strengen Theorie verlangt, durch (rein geometrische) Messungen festgelegt werden.

a) Reliefprisma. Es handelt sich hierbei um einen Versuch zur Ausmessung des Erdkörpers, bei dem es grundsätzlich vermieden wird, die Begriffe horizontal und vertikal usw. einzuführen. Es wird sich dabei zeigen, daß man sich nach anfänglich reinlicher Scheidung in der praktischen Ausführung diesen Begriffen doch wieder nähern kann, allerdings mit Vorbehalten.

Praktisch unterliegt dieses Verfahren wie jedes geometrische dem Hindernis der Unüberbrückbarkeit der Ozeane. Es genügt zunächst die Betrachtung des Messungsvorganges in Form von Profilen, z. B. Meridianprofilen oder dem Äquatorprofil.

Zur einfachsten Gestaltung denkt man sich dem Erdkörper ein Prisma mit zahlreichen Kanten umschrieben, derart, daß zum mindesten auf jeder Kante ein Punkt physisch zugänglich ist.

Versteht man unter dem Kantenwinkel ω den Schnittwinkel in der Normalebene auf der Kante, so kann derselbe z. B. mit dem Prismenkreise gemessen werden.

Nimmt man eine Folge von (im übrigen beliebig liegenden) Kanten und auf ihnen in der Fortschrittsrichtung Punkte ABC an, so lassen sich ferner die in den Prismenflächen liegenden Winkel gegen die in denselben Ebenen liegenden Normalen zu den Kanten ebenfalls mit dem Prismenkreis messen. Es kommt hierfür z. B. der Prismenkreis von Wegener (siehe Fig. 1) in Frage, mit dem die Winkel ohne Schwierigkeit mit Sekundengenauigkeit gemessen werden können. Die Entfernungen $AB, BC, \dots$ werden direkt oder indirekt gemessen.

b) *Koordinatensystem.* Dieses kann ein rechtwinkliges mit Nullpunkt in A und der x -Achse in AB sein, so daß die z -Achse auf der ersten Prismenfläche senkrecht steht.

(Man kann den Anfangspunkt auch in der z -Richtung um 6370 km verschieben, so daß das System nahe dem Erdmittelpunkt beginnt.) Mit den angegebenen Messungen lassen sich sämtliche Koordinaten der Punkte $B, C \dots$ berechnen.

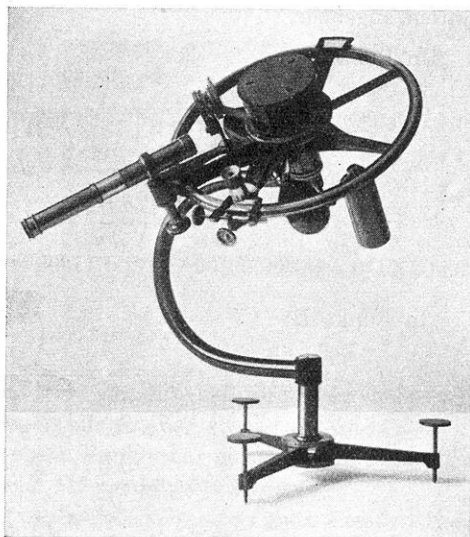


Fig. 1. Prismenkreis von Wegener

c) *Physische Lotrichtungen.* Diese werden in $ABC \dots$ gemessen und durch ihre Richtungen gegen die Koordinatenachsen eindeutig festgelegt.

Da der übliche astronomische Meßvorgang zur Bestimmung der Lotrichtungen aber auf der üblichen geodätischen Körpervermessung aufbaut, muß wenigstens theoretisch erwogen werden, wie man sich eine hiervon unabhängige Messung vorstellen kann.

Zur Erläuterung dieses Vorganges denke man sich in A zwei Objektivlinsen derart montiert, daß von der einen die optische Achse in die z -Achse fällt, von der anderen in die physische Lotrichtung von A . Ebenso denke man sich in B eine Objektivlinse, deren Achse in die dortige physische Lotrichtung fällt.

Mit allen drei Linsen werden vom Sternenhimmel gleichzeitig Aufnahmen gemacht (um in der Vorstellung die Zeit zu eliminieren).

Aus der Lage der Sterne lassen sich ein und derselbe Himmelsmeridian, aus der Lage der Durchstoßpunkte der optischen Achsen gegen die Sterne die Himmelskoordinaten der Durchstoßpunkte ableiten. Dadurch ergeben sich

1. die sphärischen Entfernungen der Durchstoßpunkte,
2. die sphärischen Winkel dieser gegen den Himmelsmeridian.

Dies führt auf folgende *Koordinaten* und *Richtungswinkel* unter Hinzufügung der gemessenen physischen Lotrichtungen.

			ξ	η	ζ	
A:	$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$	$90^{\circ}00'20.54''$	$89^{\circ}59'53.25''$	$0^{\circ}0'21.61''$
(A B)	gegen x -Achse: $31^{\circ}14'17''$					
	gegen y -Achse: $58\ 55\ 43$					
	gegen z -Achse: $90\ 0\ 00$					
B:	$x = 8497.07$	$y = 5153.73$	$z = 0.0$	$90^{\circ}05'47.01''$	$90^{\circ}00'04.09''$	$0^{\circ}05'47.03''$
(B C)	gegen x -Achse: $12^{\circ}55'33.5''$					
	gegen y -Achse: $77\ 04\ 33$					
	gegen z -Achse: $90\ 20\ 53.5$					
C:	$x = 18319.78$	$y = 7407.81$		$90^{\circ}11'00.19''$	$90^{\circ}00'12.08''$	$0^{\circ}11'00.30'$
		$z = -61.25$				
	usw.					

Sind die aufeinanderfolgenden Punkte so gewählt, daß ihre Meereshöhe sich nicht um allzuviel unterscheidet, so lautet die mathematische *Aufgabe*:

Senkrecht zu einer durch eine gegebene Punktschar gehenden Geradenschar von gegebener Richtung eine analytische Flächenschar zu legen.

Unterscheidet sich die Meereshöhe wesentlich, so muß es statt Geradenschar Kurvenschar heißen.

e) *Praktische Ausgestaltung.* Nachdem die Prinzipien des Verfahrens als eines rein geometrischen dargestellt sind, soll untersucht werden, ob man sich der üblichen Meßinstrumente wie Theodolit und Nivellierinstrument bei voller Wahrung der geometrischen Unabhängigkeit bedienen kann.

α) *Verwendung des Theodolits, Absteckungsverfahren.* Von den Prismenkanten war bis jetzt nur verlangt, daß sie durch einen physisch erreichbaren Punkt gehen sollen.

Man kann sie also auch „horizontal“, z. B. durch die Kippachse des Theodolits legen. Dadurch ist klar, daß die Kantenwinkel ω direkt mit dem Höhenkreis des Theodolits gemessen werden können.

Dazu ist nötig, Punkte in den Prismenflächen zu signalisieren, die gleichzeitig in Normalebenen zu den Kanten liegen. Die in den Prismenflächen liegenden Winkel α, β usw. benötigen ein Winkelmeßinstrument, das in diese Ebenen ausgerichtet werden kann, also eine Art Sextanten oder Prismenkreis.

Da es häufig umständlich sein wird, so zu verfahren, kann man sich auch ein ausschließliches Verfahren mit Theodolit ausdenken, wobei man nur gegen das Grundprinzip der geometrischen Unabhängigkeit nicht verstoßen darf.

Das gleiche gilt für die Seitenmessung, die bei indirektem Messen so zu bewerkstelligen ist, daß sie dasselbe Resultat ergibt wie die direkte Messung.

β) Verwendung des Nivellierinstrumentes, Absteckungsverfahren. Kantenwinkel von nahezu 180° können bequem und sehr genau mit dem Nivellierinstrument gemessen werden.

1. Das gewöhnliche Nivellierverfahren arbeitet bekanntlich in „Sprungständen“, d. h. nur jeder zweite Bodenpunkt wird mit dem Nivellierinstrument besetzt; aus diesem Grunde kann man damit allein nicht ans Ziel gelangen.

Da das gewöhnliche Nivellierverfahren keine Aussage über die Krümmung der Niveaulfläche liefert, so muß man zusätzlich auf ein anderes Verfahren zurückgreifen, welches den regionalen Verlauf des Geoids ergibt und das unter dem Namen *astronomisches Nivellement* bekannt geworden ist.

Dieses von F. R. Helmert *) angegebene Verfahren benötigt ebenfalls nur die Fundamentalgrößen I. Ordnung, zum Unterschied von dem allgemeinen Verfahren jedoch mit dem Ziel, die Einzelheiten der Niveaulfläche zu bestimmen, wozu ein dicht liegendes Beob-

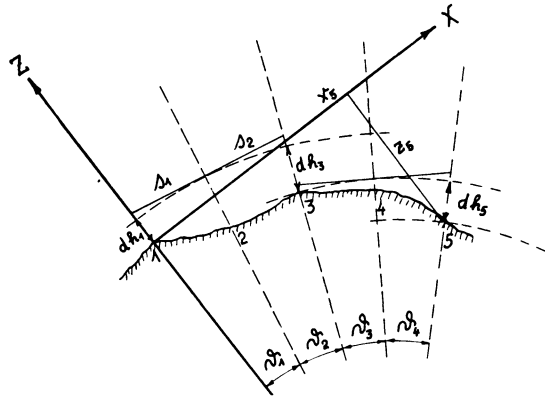


Fig. 3. Geometrisches und astronomisches Nivellement

achtungsmaterial erforderlich ist. Den Übergang zu den Brunsschen Zenitdistanzen liefert die folgende Gleichung:

$$H_n = H_1 + \int_1^n \partial ds + \int_1^n dh \dots \dots \dots (1)$$

Zur Anpassung dieser Beziehung an vorliegende Aufgabe denkt man sich entsprechend Fig. 2 ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Bodenpunkt 1 nach der physischen Lotlinie verankert. Dann liest man aus der Fig. 3 ab:

$$Z_n = dh_1 + s_1 \vartheta_1 - s_2 \vartheta_2 \cos \Delta_2 - (s_1 + s_2) \sin \Delta_1 - dh_3 \cos \Delta_2 + s_3 \vartheta_3 \cos \Delta_2 - s_4 \vartheta_4 \cos \Delta_4 - (s_3 + s_4) \sin \Delta_3 - dh_5 \cos \Delta_4 \dots \dots (2)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} Z_n = & \pm dh_1 \pm dh_3 \cos \Delta_2 \pm dh_5 \cos \Delta_4 \\ & + (s_1 \vartheta_1 - s_2 \vartheta_2) \cos \Delta_2 + (s_3 \vartheta_3 - s_4 \vartheta_4) \cos \Delta_4 \\ & - (s_1 + s_2) \sin \Delta_1 - (s_3 + s_4) \sin \Delta_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

mit

$$\Delta_1 = \vartheta_1, \quad \Delta_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad \Delta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3, \quad \text{usw.} \dots (4)$$

*) F. R. Helmert: Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. Akad. d. Wiss. Berlin 1900, S. 964; 1901, S. 958.

oder, da $\cos \vartheta$ gegen $\sin \vartheta$ vernachlässigt werden darf (eventuell mit Einführung des normalen Wertes von ϑ)

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{s_1} (Z_1'' - i_1 + Z_2' - i_2), \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{s_2} (Z_2''' - i_2 + Z_3'' - i_3). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Es ist also hierbei notwendig, nicht in Sprungständen zu arbeiten. Die Abstände der Ziellinie von den Bodenpunkten können z. B. durch Stab und Keil sehr genau festgestellt werden, nachdem Stablänge + Abstand Fernrohr — Ziellinie durch Eichung mit Hilfe des Fernrohres aus bekanntem Höhenunterschied zweier Punkte gefunden ist.

Dieses bis jetzt nicht gebräuchliche Verfahren verlangt eine genaue Kontrolle der Lage der Ziellinie zur Libellenachse für alle angewandten Fokussierungen. Es erlaubt die geometrische Rekonstruktion der gesamten gekrümmten Oberfläche. Praktisch wird es aber auch ohne physische Lotrichtungen in größeren Abständen vorläufig nicht ganz auskommen. Es handelt sich hierbei um einen räumlichen Polygonzug, bei dem die vertikale Krümmungskomponente abgesehen vom Höhenunterschied pro 1 km etwa 78 mm beträgt, wobei man verlangt, daß der Fehler dieser Größe 1 mm nicht übersteigt. Das Endergebnis ist dasselbe, wie wenn man Zenitdistanzen mit einem (jetzt noch nicht gebräuchlichen) Verfahren der vertikalen Zwangszentrierung*) auf kurze Entfernungen mißt.

6. Analytisch-geometrische Bestimmung von Niveauflächenstücken und ihre geometrische Aneinanderfügung

Die Niveauflächen können bekanntlich aus analytischen Flächen zusammengesetzt gedacht werden, und zwar in stetiger Übergangsfolge außerhalb der festen Rinde, in unstetiger beim Eindringen und im Verlauf in derselben, wo sich die Dichte unstetig ändert.

Es liegt somit die Aufgabe vor, die Konstanten zur Bestimmung der Teilflächen zu messen, und alsdann die weitere, die Teilflächen zusammenzusetzen.

Wie groß die Teilflächen gewählt werden können, hängt von der Bewältigung des mathematischen Formelapparates ab und von der verlangten Genauigkeit der Flächenbestimmung.

Die Zusammensetzung wird beeinflußt von der Fehlerfortpflanzung, und dieser Umstand verlangt das Zurückkommen auf g -Messungen und Lotabweichungen.

Dabei ergeben der *Isogammenplan* Aufschluß über die vertikale Auflockerung der Niveauflächen, die *Lotabweichungen* über den allgemeinen Krümmungsverlauf

*) Ein Versuch, dieses Verfahren zu erproben, wird auf Vorschlag des Verfassers zur Zeit bei der Universität Bonn gemacht.

derselben. Gesetzt den Fall, daß eine einwandfreie Bestimmung dieser Art möglich ist, könnte somit eine Geoidbestimmung ähnlich wie die von A. Galle im Harz als Unterlage für die Flächenzusammensetzung dienen.

Diese analytischen Verfahren gehen darauf aus, in den Beobachtungspunkten die Krümmung der Niveauläche oder die Parameter, aus denen sich die Fundamentalgrößen zusammensetzen, zu messen.

Alsdann liegt die Aufgabe vor, aus einer Anzahl von Punkten, in denen die Fundamentalgrößen vorliegen, eventuell mit Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate die Fläche zu berechnen.

Hierbei ist zu unterscheiden zwischen dem Fall, daß in jedem Punkt sämtliche Fundamentalgrößen und dem Fall, daß nur ein Teil dieser Größen gegeben sind.

A. Analytische Behandlung einer Äquipotentialfläche bei insgesamt gegebenen Fundamentalgrößen

Es ist bekannt, daß zur Bestimmung der Fundamentalgrößen I. und II. Ordnung oder zur Bestimmung der Krümmung in einem Punkt P_0 der Fläche die Kenntnis der 1. und 2. Differentialquotienten der Flächengleichung

$$Z = f(x, y) \dots \dots \dots (1)$$

genügen. Infolgedessen ist Ausgangspunkt der analytischen Behandlung die Reihenentwicklung des Potentials in P_0 :

$$\left. \begin{aligned} W = W_0 + W_x x + W_y y + W_z z + \frac{1}{2} (W_{xx} x^2 + W_{yy} y^2 + W_{zz} z^2) \\ + W_{xy} xy + W_{xz} xz + W_{yz} yz + \dots, \end{aligned} \right\} (2)$$

welche in die Form (1) übergeführt werden kann.

In dieser Form sind die Fundamentalgrößen I. Ordnung gegeben mit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \dots (3)$$

durch

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \dots \dots \dots (4)$$

und die Fundamentalgrößen II. Ordnung durch:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad (5)$$

ferner die Krümmung $1/R$ eines Normalschnittes, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Tangente des Normalschnittes auf der Fläche bedeuten:

$$\frac{1}{R} = \frac{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \dots \dots \dots (6)$$

Mit Berücksichtigung der Ausdrücke (2) ergeben sich folgende Größen (siehe F. Hopfner*), a. a. O., S. 316):

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{W_x}{W_z}, & q &= -\frac{W_y}{W_z}, & r &= -\frac{W_{xx}W_z - W_{xz}W_x}{W_z^2}, \\ s &= -\frac{W_{xy}W_z - W_{yz}W_x}{W_z^2} = \frac{W_{xy}W_z - W_{xz}W_y}{W_z^2}, \\ t &= -\frac{W_{yy}W_z - W_{yz}W_y}{W_z^2}. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Wenn man die Flächennormale in P_0 zur z -Achse nimmt, und zwar positiv in derselben Richtung wie die Richtung Krümmungszentrum bis Fläche, so erhält man einfachere Ausdrücke, muß aber beachten, daß dann die Beziehungen der Koordinatenachsen zu den weiteren Punkten noch geregelt werden müssen.

Es wird dann:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= 0, & W_y &= 0, & W_z &= -g, \\ p &= 0, & q &= 0, & r &= \frac{W_{xx}}{g}, & \varepsilon &= \frac{W_{xy}}{g}, & t &= \frac{W_{yy}}{g}, \\ E &= 1, & F &= 0, & G &= 1, \\ L &= -\frac{W_{xx}}{g}, & M &= -\frac{W_{xy}}{g}, & N &= -\frac{W_{yy}}{g} \end{aligned} \right\} (8)$$

und

$$-\frac{g}{R} = W_{xx} \cos^2 \alpha + 2 W_{xy} \cos \alpha \cos \beta + W_{yy} \cos^2 \beta \dots (9)$$

Hierbei lassen sich die Richtungswinkel der Tangente des Normalschnittes mit α , $(90^\circ - \alpha)$, 90° einführen:

$$-\frac{g}{R} = W_{xx} \cos^2 \alpha + 2 W_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + W_{yy} \sin^2 \alpha \dots (10)$$

d. h. man findet die Hauptkrümmungen und ihren Richtungswinkel α gegen die x -Achse aus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{W_{xx} + W_{yy}}{2 W_z} + \frac{W_{xx} - W_{yy}}{2 W_z} \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{W_{xx} + W_{yy}}{2 W_z} - \frac{W_{xx} - W_{yy}}{2 W_z} \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2 W_{xy}}{W_{xx} - W_{yy}}. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

*) H. Bruns: Figur der Erde; F. R. Helmert: Höhere Geodäsie I; F. Hopfner: Physikalische Geodäsie; A. Galle: Geoid im Harz; G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie II, 1922, S. 393, 404; ferner S. 1, 15, 124.

Ferner die (doppelte) mittlere Krümmung und das Gaußsche Krümmungsmaß aus:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{W_{xx} + W_{yy}}{W_z}, \quad R_1 R_2 = \frac{W_z^2}{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2} \dots (12)$$

*Vereinfachung der methodischen Behandlung**). Praktisch liegt insofern ein Sonderfall vor, als die Veränderungen der Fundamentalgrößen von Punkt zu Punkt nicht beliebig groß, sondern sehr klein sind.

Da die Niveauflächen bereits auf allerengstem Raume merkliche Krümmungsänderungen aufweisen, es aber in diesem Zusammenhang sich um die analytische Bestimmung größerer Flächen handelt, so liegt die Aufgabe so, daß mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate der regionale Verlauf festgestellt, während der örtliche wie von zufälligen Fehlern herrührend wirkungslos gemacht werden muß. Es wäre dann diejenige analytische Fläche aufzusuchen, die sich den Messungsergebnissen der Fundamentalgrößen über eine Anzahl gut verteilter Punkte hinweg am besten anschließt.

Aber auch diese Aufgabe ist für eine häufige Anwendung noch nicht einfach genug. Man wird sich deshalb stets damit begnügen können, als diese Fläche eine Ellipsoidkuppe zu bestimmen. Diese kommt auch der Gestalt einer Kugelfunktion höheren Ranges sicher genügend nahe, außerdem ist zwischen diesen Flächen wenigstens in den gegebenen Punkten ein stetiger Übergang in der Krümmung (der allerdings bei Behandlung nach der M. d. kl. Qu. in Strenge wieder verlohrenght).

Die Aufgabe lautet im Außenraum demnach so: Von einer Anzahl gut verteilter, geometrisch vermessener Punkte sind die Fundamentalgrößen bekannt, die nach Anbringung von Korrekturen auf ein und dieselbe Niveaufläche bezogen sind. Das Niveauflächenstück ist unter Anwendung der M. d. kl. Qu. als Ellipsoidkuppe zu berechnen.

Die Aufgabe ist eindeutig lösbar, wenn nur drei Punkte und die dort vorhandenen Fundamentalgrößen gegeben sind. Die überbestimmte Aufgabe ist demnach gelöst, wenn in drei ausgewählten Punkten statt der dortigen zufälligen Messungswerte der Fundamentalgrößen deren ausgeglichene Ellipsoidwerte gefunden sind.

Die Absolutwerte der Gleichungen ergeben sich aus der Differenz der Messungswerte—Normalwerte. Im Zentralpunkt sei die z -Achse in die Lotlinie, x nach Nord, y nach Ost ausgerichtet.

Man erhält dann für die gesuchte Fläche Gleichungen folgender Art:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= W_{xo} + \frac{\partial W_x}{\partial x} dx + \frac{\partial W_x}{\partial y} dy + \frac{\partial W_x}{\partial z} dz, \\ W_y &= \text{Index } y, \\ W_z &= \text{Index } z. \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

*) Wie sich der Verfasser die Aufgabe behandelt denkt, kann hier nur angedeutet werden.

$$\left. \begin{aligned} W_{xx} &= W_{xxo} + \frac{\partial W_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{xx}}{\partial y} dy + \frac{\partial W_{xx}}{\partial z} dz, \\ W_{yy} &= \text{Index } yy, \\ W_{zz} &= \text{Index } zz. \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xy} &= W_{xyo} + \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial W_{xy}}{\partial z} dz, \\ W_{xz} &= \text{Index } xz, \\ W_{yz} &= \text{Index } yz. \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

Hierin sind die Faktoren der dx, dy, dz die Unbekannten, links stehen die Messungswerte.*

Hiervon sind die *normalen Werte* abzuziehen, wobei die geographische Lage eine Rolle spielt (z. B. $\varphi = 50^\circ$):

$$\left. \begin{aligned} W_x &= W_{xo} - 1539.56 \cdot 10^{-9} dx + 0 dy + 8.03 \cdot 10^{-9} dz, \\ W_y &= W_{yo} + 0 dx - 1535.29 \cdot 10^{-9} dy + 0 dz, \\ W_z &= W_{zo} + 8.03 \cdot 10^{-9} dx + 0 dy + 3085.49 \cdot 10^{-9} dz. \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xx} &= W_{xxo} + 0.13 \cdot 10^{-16} dx + 0 dy - 0.06 \cdot 10^{-16} dz, \\ W_{yy} &= W_{yyo} - 0.05 \cdot 10^{-16} dx + 0 dy + 0 dz, \\ W_{zz} &= W_{zzo} - 0.08 \cdot 10^{-16} dx + 0 dy - 48.3 \cdot 10^{-16} dz. \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xy} &= W_{xyo} + 0 dx + 0 dy + 0 dz, \\ W_{xz} &= W_{xzo} - 0.06 \cdot 10^{-16} dx + 0 dy - 0.25 \cdot 10^{-16} dz, \\ W_{yz} + W_{xzo} &+ 0 dx + 0 dy + 0 dz. \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xo} &= 0, & W_{yo} &= 0, & W_{zo} &= 981.066, \\ W_{xxo} &= -1539.56 \cdot 10^{-9}, & W_{yyo} &= -1535.29 \cdot 10^{-9}, & W_{zzo} &= +3085.49 \cdot 10^{-9}, \\ W_{xyo} &= 0, & W_{xzo} &= +8.03 \cdot 10^{-9}, & W_{yzo} &= 0. \end{aligned} \right\} (19)$$

Hierzu treten bei strenger Behandlung noch diejenigen Bedingungen, welche eine gegenseitige Abhängigkeit der Potentialgrößen ausdrücken, und die sowohl von den Messungswerten als von den ausgeglichenen Werten erfüllt sein müssen, also die Laplacesche

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} - 2\omega^2 = 0, \dots (20)$$

ferner die daraus abgeleiteten höherer Ordnung und die Fundamentalgleichungen der Fläche.

Würde es möglich sein, bei Bestimmung der Niveaufläche bereits von jedem Punkt sein dx, dy, dz genügend genau zu messen, so wäre eine Ellipsoidfläche bereits durch die räumliche Lage von neun solchen Punkten ohne weitere Angaben bestimmt. Nun ist aber gerade der Wert dz als am schwersten zugänglich an-

zunehmen, so daß durch die Flächengleichung $z = f(x, y)$ der Wert dz als Funktion von dx, dy ausgedrückt werden muß.

Andererseits kann man in ähnlicher Weise auch von krummlinigen Koordinaten ausgehen, also der Flächengleichung:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \quad (21)$$

wodurch man die Potentialgrößen und damit die Fundamentalgrößen als Funktion der zwei Parameter du, dv erhält, woraus die Achsenlängen und die Orientierung berechnet werden können.

B. Analytische Behandlung einer Äquipotentialfläche bei nur teilweise gegebenen Fundamentalgrößen

Im Außenraum ist eine analytische Lösung bereits möglich bei Kenntnis der Größen W_x, W_y, W_z , also nur der ersten drei Fundamentalgrößen an hinreichend vielen Stellen:

Die Schar von Orthogonaltrajektorien einer räumlichen Geradenschar zu finden, wofür für die ganze Erde eine Lösung bereits in 1. angeführt wurde*).

Für kleinere Flächenstücke kommt außerdem *ein Satz von Hamilton***) in Frage (siehe G. Scheffers, a. a. O. II, 1922, S. 536):

Ist eine Schar von zweifach unendlich vielen Geraden, die keine Minimalgeraden sind, dadurch gegeben, daß in den Gleichungen einer Geraden mit den laufenden Koordinaten x, y, z und dem Parameter t

$$x = \xi + ft, \quad y = \eta + gt, \quad z = \zeta + ht$$

die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Geraden und die Richtungskosinus f, g, h der Geraden als Funktion zweier Parameter u und v angenommen werden, wobei also

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$

ist, so ist die Schar dann und nur dann die aller Normalen einer Fläche, wenn der Ausdruck

$$fd\xi + gd\eta + hd\zeta$$

ein vollständiges Differential in u und v ist. Dann gibt es einfach unendlich viele Flächen, die alle Geraden senkrecht schneiden. Sie werden mittels der beiden Parameter u und v in den laufenden Koordinaten x, y, z dargestellt, wenn

$$t = - \int (fd\xi + gd\eta + hd\zeta) + \text{const}$$

in die Gleichungen der Geraden eingesetzt wird. —

*) Eine treffende Bezeichnung für die Helmhertsche Lösung in diesem Zusammenhang wäre: *Methode der sukzessiven Annäherung mit Hilfe der Fundamentalgrößen* I. Ordnung.

**) W. R. Hamilton: Supplements to an essay on the theory of systems of rays. Transactions of the Royal Irish Ac. 1830, Bd. 16.

Die Konstante wird durch die Bedingung gefunden, daß die Fläche durch einen gegebenen Punkt geht.

Auch hierbei sind gewisse Vereinfachungen dadurch gegeben, daß nicht eine beliebige Fläche, sondern eine Ellipsoidkuppe angenommen wird, bei deren Bestimmung die Quadratsumme aller Winkelabweichungen ein Minimum werden soll.

Diese Methode ist gegenüber der in A genannten deswegen im Nachteil, weil sie an keiner Stelle des Randes einen stetigen Übergang in der Krümmung mit der Nachbarkuppe liefert.

Eine praktische Rechnung nach A oder B (Hamiltons Satz) steht noch aus.

C. Die Lösung mit einer Riccatischen Differentialgleichung

Hierbei wird vorausgesetzt, man habe die sechs Fundamentalgrößen als Funktion von Breite und Länge an genügend vielen in ein und derselben Niveaufläche liegenden Punkten oder als Funktion anderer krummliniger Koordinaten u, v gefunden, und es seien in jedem Punkt die drei Fundamentalgleichungen befriedigt.

Es handelt sich dabei um eine schwierige mathematische Aufgabe, deren Lösung zwar theoretisch im großen ganzen vorliegt, für deren Anwendung auf vorliegendes Problem jedoch wohl noch manche Schwierigkeiten ausgeräumt werden müssen (siehe G. Scheffers, a. a. O. II, 1922, S. 393, 403).

D. Die Lösung mit den Christoffelschen Differentialgleichungen)*

Prinzipiell handelt es sich um dasselbe Problem wie in C, wobei jedoch nicht von den Fundamentalgrößen, sondern von einer bestimmten Funktion derselben, nämlich der Summe der Hauptkrümmungsradien, ausgegangen wird.

Der Satz von Christoffel lautet: Wenn die Oberfläche E eines sich nicht ins Unendliche erstreckenden Körpers allenthalben gewölbt und stetig gebogen ist, ferner in keinem Punkte derselben ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß oder unstetig ist, endlich für jedes wahre Zenit, unabhängig davon, welcher Punkt der Fläche ihm entsprechen mag, die Summe der in letzterem stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser gegeben ist, so ist die Fläche selbst und ihre Lage in der Himmelskugel völlig bestimmt, bis auf einen beliebigen mit ihr verbundenen Punkt, über dessen Ort im absoluten Raum noch verfügt werden kann.

Weiter sagt Christoffel: Infolge dieses Satzes kann die Gestalt der Fläche E mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man im Stande ist,

*) E. B. Christoffel: Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben. Journ. f. reine u. angew. Math. **64**, 193 (1895); W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie **1** (1921); F. Hopfner: Physikalische Geodäsie 1933.

für eine genügende Anzahl von Punkten derselben, über deren gegenseitige Lage keine anderweitigen Angaben erforderlich sind,

1. die sphärischen Koordinaten ihres wahren Zenits,
2. die Summe der in ihnen stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser zu ermitteln.

Bemerkungen zu diesem Verfahren. Wenn $(R_1 + R_2)$ gegeben sein soll, so heißt das:

$$1. \quad R_1 + R_2 = R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

also nach 6, A, (12):

$$2. \quad R_1 + R_2 = W_z \frac{W_{xx} + W_{yy}}{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2}$$

und in den Fundamentalgrößen ausgedrückt:

$$3. \quad R_1 + R_2 = \frac{L + N}{LN - M^2}.$$

Das ist die Ausgangsfunktion für den Christoffelschen Satz. Ihre Anwendung setzt voraus, daß es ein Verfahren gibt, womit $(R_1 + R_2)$ direkt gemessen werden kann, oder aber, wenn dies nicht der Fall ist, daß man wieder sämtliche drei Fundamentalgrößen II. Ordnung bestimmen kann, wodurch dieselben Voraussetzungen wie in B gegeben sind.

Im übrigen gelten für dieses Verfahren dieselben Schwierigkeiten wohl noch in verstärktem Maße wie bei C.

E. Technische Verwirklichung

Als einzige Instrumente, die zur Zeit sichere Resultate ergeben, kommen nach wie vor nur in Frage die Eötvössche Drehwage, das Pendel und die Gravimeter, dazu die astronomisch-geodätischen Instrumente in Verbindung mit diesen zur Bestimmung der ersten drei Fundamentalgrößen. Weil diese weder die Krümmung noch die Fundamentalgrößen der Fläche vollständig zu liefern vermögen, so ist die technische Verwirklichung zur Zeit hypothesenfrei überhaupt nicht möglich.

Diese Freiheit wenigstens im Außenraum zu erreichen, erforderte die Erfindung eines Instrumentes, das gestattet, die Größe $(W_{xx} + W_{yy})$ oder wegen $W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = -4\pi k^2 \sigma + 2\omega^2$ eines solchen, das gestattet, W_{zz} mit einer der Drehwage entsprechenden Genauigkeit zu messen — was bis jetzt nicht gelungen ist.

Aber auch wenn diese schwierige Messung gelänge, so wäre dies zwar für die angewandte Geophysik von höchster Bedeutung, in geringem Umfang jedoch für die allgemeine Flächenbestimmung,

1. weil es stets eine umständliche mathematische Aufgabe sein wird, auch nur die Gleichung einer Teilfläche zu berechnen,

2. wegen der stets ungünstigen Fehlerfortpflanzung bei der Zusammensetzung.

Für die praktische Beurteilung der Methoden muß man bedenken, daß bei A sich die Messungswerte höchst vielgestaltig von Punkt zu Punkt ändern, bei B jedoch sehr langsam.

Sind doch die durchschnittlichen Beobachtungswerte der Differentialquotienten in Formel (13) nach Abzug der normalen Werte von der Größenordnung 10^{-9} und die in (14) und (15) von der Ordnung 10^{-12} und demgemäß die Beobachtungsgenauigkeit entsprechend hoch zu fordern, während die W_x , W_y mit einer Beobachtungsgenauigkeit von $0.5 \cdot 10^{-3}$ bis 10^{-3} , entsprechend einer astronomischen Meßgenauigkeit von 0.1 bzw. 0.2 Bogensekunden, bekannt sind.

Infolgedessen ist das Herausfinden des regelmäßigen Teiles einer Undulation nach B entschieden einfacher als nach A.

7. Ausblick

Nach dem heutigen Stand der Wissenschaft bietet sich folgender Ausblick über die Lösung der Aufgabe:

1. Die gestellte Aufgabe läßt sich im allgemeinsten Fall zur Zeit nicht lösen, da es infolge der Unüberbrückbarkeit der Ozeane nicht möglich ist, ein in sich geschlossenes geometrisches System zu messen.

2. Dagegen wird es in nicht allzu ferner Zeit voraussichtlich möglich sein, bis auf einen konstanten Vergrößerungsfaktor die gut angenäherte Form einer bestimmten Niveaufläche, des Geoides, aus Schweremessungen nach den Verfahren von Stokes, Rudzki oder Hopfner zu errechnen.

3. Dieser Vergrößerungsfaktor zur Überführung in das absolute Maßsystem kann zur Zeit nur aus Lotabweichungen erhalten werden, indem jede für einen Kontinent berechnete Orthogonalfläche mit ihrem Koordinatenursprung an ein- und dieselbe Stelle und mit Hilfe der absoluten Lotabweichung ihres Bezugspunktes an die ihr im Himmelskoordinatensystem zukommende Lage geschoben wird und die errechneten Radienvektoren als solche kontinentaler Natur und als reell betrachtet werden.

4. Dem berechneten Geoid können die geometrisch vermessenen Kontinente additiv hinzugesetzt werden, wodurch die geometrische Form der Gesamtoberfläche bekannt ist.

5. Alsdann steht einer Einschaltung des Gravitationsfeldes des Außenraumes bis zu Oberfläche nichts mehr im Wege.

6. Die Herstellung einer direkten geometrischen Verbindung der Kontinente bleibt aber trotzdem ein Hauptziel der Vermessungskunst, da die Verbindung nach 2. die höchsten Ansprüche niemals befriedigen kann.
