

Werk

Jahr: 1937

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:13

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0013

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0013

LOG Id: LOG_0049

LOG Titel: Untersuchungen über Vorgänge an der Schneide beim Schwingen eines Schwerependels

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

¹⁸⁾ A. de Quervain u. A. Piccard: Beschreibung des 21-Tonnen-Universal-seismographen System de Quervain-Piccard. Jahresber. des Schweiz. Erdbebend. 1924. Zürich 1926.

^{18a)} L. F. Richardson: Springs for vertikal seismographs. Monthly notices of the Royal. Soc. Geophysical Supplements I, Nr. 8, 1926, S. 403—411.

¹⁹⁾ R. Rüdtenberg: Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen. Stuttgart 1906.

²⁰⁾ G. Schmerwitz: Der Koppelungsfaktor bei galvanometrisch registrierenden Seismographen. Zeitschr. f. Geophys. **12**, 206—220 (1936).

²¹⁾ T. Tamaru: Über ein neues Vertikalseismometer. Verh. d. I. internat. Seism. Konf., Straßburg 1903, Beilage B 4.

²²⁾ E. Wanner: Jahresbericht des Schweizerischen Erdbebendienstes, Zürich 1935.

²³⁾ Die Erdbebenwarten von Deutschland und Österreich im Jahre 1925. Zeitschrift f. Geophys. **1**, 285—296 (1924/25).

Jena, November 1937, Reichsanstalt für Erdbebenforschung.

Untersuchungen über Vorgänge an der Schneide beim Schwingen eines Schwerependels

Von **Wilhelm Köller** — (Mit 18 Abbildungen)

Bei den Messungen der Schwingungsdauer mit Sterneckpendel, die über Zeiträume bis zu 12 Stunden beobachtet wurden, zeigte sich nach Berücksichtigung der üblichen Korrekturen eine Abnahme der Schwingungsdauer bei sinkender Amplitude. Es wird gezeigt, daß die Form der Abnahme (reduzierte Werte der Schwingungsdauer als Funktion der Amplitude) theoretisch nicht durch einen reinen Abrollvorgang an der Schneide erklärt werden kann. Unter der Annahme des Abrollens und gleichzeitigem Zurückgleiten der Schneide auf dem Lager beim Schwingen des Pendels ergibt die Theorie eine Näherungslösung, die die gemessene Form der Abnahme der Schwingungsdauer erklären kann. Außerdem wird die Größe des Krümmungsradius der Schneide, der für den Abrollvorgang wirksam ist, erörtert.

Einleitung

Pendelmessungen, bei denen die Beobachtungen über Zeiträume von mehr als 2 Stunden ausgedehnt wurden, zeigten selbst, nachdem sie durch die üblichen Korrekturen auf konstanten Druck, Temperatur, unendlich kleine Bögen (Amplitudenkorrektion) und schließlich auf Mitschwingen mittels der bekannten Furtwänglerschen Korrektionsformeln reduziert waren, immer noch eine Abnahme der Schwingungsdauer mit der Beobachtungszeit oder Amplitude.

Ein solches Verhalten der Pendel muß naturgemäß zu einer falschen Beurteilung der Genauigkeit der Pendelmessungen führen. Es ergab sich also die Aufgabe, dieses Verhalten näher zu untersuchen. Vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe liefern.

I. Die Abnahme der Schwingungsdauer eines Pendels mit der Amplitude

1. Technische Einzelheiten der experimentellen Arbeit. Zu den vorgenommenen Messungen wurden benutzt: 1. Ein Askania-Vierpendel-Apparat mit vier Invarstahlpendel Nr. 1, 2, 3 und 4 in Sterneckscher Form. Die Pendeltische waren aus Achat. Die Pendel Nr. 1 und 3 besaßen Achatschneiden, die Pendel Nr. 2 und 4 Stahlschneiden.

2. Eine Riefleruhr Nr. 474 mit elektrischem Antrieb und elektrischem Sekunden- und Minutenkontakt. Die Uhr besitzt eine Luftdruckkompensation.

Die Sekundenkontakte der Riefleruhr und die Pendelschwingungen wurden zusammen auf einen Film optisch aufgezeichnet. Zur Kontrolle einer konstanten Filmgeschwindigkeit und zur Interpolation der Sekundenintervalle wurden außerdem die Schwingungen einer Stimmgabel von 50.6 Hz Eigenfrequenz mitregistriert.

Die Beobachtungszeit erstreckte sich durchschnittlich auf 8 bis 12 Stunden. Zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Pendel wurden jedesmal 2-Stunden-Intervalle ausgewertet. Es wurden am Anfang und am Ende eines solchen Intervalls 10 Sekunden lang die Pendelschwingungen registriert. Aus diesen 10 Sekunden wurde die mittlere Verschiebung des Maximums bzw. Minimums der Pendelschwingung gegen eine feste Zeitmarke am Anfang und am Ende eines jeden 2-Stunden-Intervalls bestimmt. Kennt man die Anzahl der ganzen Pendelschwingungen innerhalb von 2 Stunden (7200 sec), so bekommt man die Schwingungsdauer des Pendels T_p :

$$T_p = \frac{7200}{D} + \frac{\text{Verschiebung des Max. bzw. Min.}}{D} .$$

Dabei ist $D = \text{Divisor} = \text{Anzahl der ganzen Pendelschwingungen in 7200 sec.}$

Da durchschnittlich 8 bis 12 Stunden beobachtet wurde, erhält man 4 bis 6 2-Stunden-Intervalle und aus jedem Intervall einen Wert für die Schwingungsdauer der Pendel.

Um die Beobachtungszeit bis zu 12 Stunden ausdehnen zu können, wurde der Pendeltopf auf 8 bis 10 mm Hg evakuiert. Die Druckänderungen betragen maximal 1 mm Hg in 24 Stunden. Zur Kontrolle der Temperatur im Pendeltopf wurde ein Thermometer mit einer Skaleneinteilung von 0.2° abgelesen. Die Thermometer sind in einen Würfel von 3 cm Kantenlänge eingelassen, der aus demselben Material besteht wie die Pendel (Invarstahl). Die Registrierungen erfolgten im Erdbebenhaus des Geophysikalischen Instituts in Göttingen in einem sehr gut temperaturschutzten Raum. Die maximalen Temperaturschwankungen im Pendeltopf betragen 0.4° pro 24 Stunden. Die Druck- bzw. Temperaturkoeffizienten der einzelnen Halbskundenpendel waren folgende:

	Pendel Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
Druck 10^{-7} sec/mm . . .	1.2	1.3	1.2	1.2
Temp. 10^{-7} sec/Grad . . .	3.7	3.0	2.6	3.4

Es waren also keine ins Gewicht fallenden Änderungen der Schwingungsdauer der Pendel während der Messung zu erwarten, die durch Druck- bzw. Temperaturänderungen bedingt sind.

Der Gang der Riefleruhr wurde täglich durch die Quarzuhr in Potsdam über die internationalen Zeitzeichen von Bordeaux 8^h und 20^h M. G. Z., Rugby 10^h M. G. Z., Nauen 12^h01' bzw. 12^h06' M. G. Z. kontrolliert*).

Den Gang der Quarzuhr kann man als konstant annehmen [1] [ihrer Gangänderung entspricht etwa 0.12 mgal/dies**)]. Aus dem täglich gemessenen Standunterschied der Riefleruhr gegen die Zeitzeichen und damit gegen die Quarzuhr wurde der Gang bestimmt, und zwar von Tag zu Tag gegen die Zeitzeichen von gleichen Stationen. Der so ermittelte Gang wurde für den Zeitraum zwischen den Zeitsignalen als konstant angesehen. Man bekommt dann für die 2-Stunden-Intervalle brauchbare Korrekturen. Es zeigte sich aber später, daß diese Annahme nicht immer berechtigt war. In den Nachmittagsstunden zeigte die Uhr eine täglich auftretende Gangschwankung, die im Laufe des Spätnachmittags wieder rückgängig gemacht wurde, so daß innerhalb von 24 Stunden der Gang gewissermaßen konstant blieb. Da in den Nachmittagsstunden keine Kontrolle der Uhr durch die Quarzuhr möglich war, so konnte dieser Sprung der Uhr nicht eliminiert werden. Es zeigte sich deshalb bei den Pendeln in den Werten für die Schwingungsdauer, die aus Nachmittagsmessungen stammen, manchmal gleichzeitig ein Sprung in der Schwingungsdauer. Solche herausfallenden Werte wurden für die späteren Überlegungen nicht mitbenutzt.

2. Messungen. a) *Vorbemerkungen.* Der Askania-Vierpendel-Apparat besitzt 4 Pendeltische in Kreuzform angeordnet mit Achateinlagen, die die Nummern I, II, III und IV tragen. Die dazu gehörigen Pendel haben die Nummern 1, 2, 3 und 4). Benutzt wurden hauptsächlich die Pendel 1 und 3 mit Achatschneiden. Die Pendel Nr. 2 und 4 besitzen Stahlschneiden. Da die relative Feuchtigkeit im Versuchsraum sehr groß war (über 90%), setzten sich an den Pendeln mit Stahlschneiden mit der Zeit kleine Rostpartikelchen fest, so daß man eine konstante Schwingungsdauer nicht mehr erwarten konnte. Infolgedessen gingen unkontrollierbare Fehler mit der Zeit in die Messungen ein. Daher wurden, abgesehen von einer Meßperiode vom 17. August 1936 bis 18. September 1936, nur die Pendel Nr. 1 und 3 benutzt.

b) *Bericht über die Messungen.* Die Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude wurde schon an der Schuleruhr [2] und bei Messungen mit 2 Pendeln im Geophysikalischen Institut in Göttingen beobachtet***). Allerdings änderte sich bei den letztgenannten Messungen nur die Schwingungsdauer eines Pendels (P_4)

*) Die Zeitzeichen von Bordeaux 20^h M. G. Z. wurden nicht an jedem Tage regelmäßig aufgenommen.

**) 1 mgal entspricht $2.5 \cdot 10^{-7}$ sec Änderung für ein Halbsekundenpendel.

***) Geophysikalische Reichsvermessung 1935, Basis Göttingen.

bei einer Beobachtungszeit von $6\frac{1}{2}$ Std., während das andere Pendel (P_2) innerhalb der Meßgenauigkeit konstant blieb (Fig. 1).

Die in der Fig. 1 gezeigten Messungen sind ein Teil der Pendelmessungen, die innerhalb der Reichsvermessung 1935/36 in Göttingen als Basisstation ausgeführt wurden. An den in der Fig. 1 genannten Tagen wurden außer den Messungen am Spätnachmittag $17^h30'$ bis $19^h30'$ auch von 22^h bis 24^h Beobachtungen gemacht.

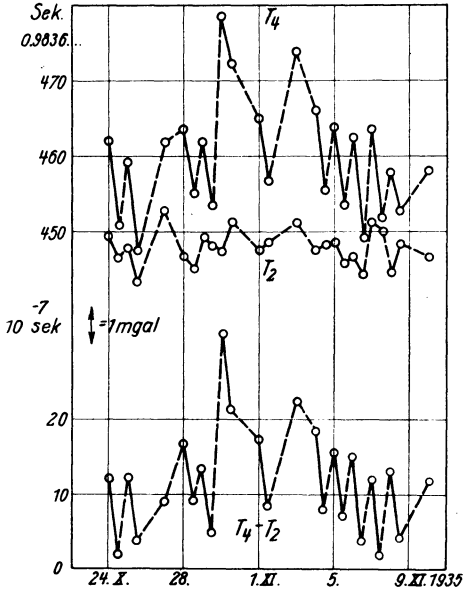


Fig. 1. Differenz der Schwingungsdauer $T_4 - T_2$ und Absolutwerte der Schwingungsdauer T_4 und T_2 der Basispendel 4 und 2 bezogen auf die Riefleruhr.

Zusammengehörige Tag- und Nachtmessungen sind durch starke Verbindungsstriche gekennzeichnet. Pendel 2 und Pendel 4 auf den Stativplätzen IV und III. (Nach Messungen von Dr. Bungers, H. Jung und Schulze)

der Abnahme (Schwingungsdauer als Funktion der Amplitude) zu erfahren, wurden die Messungen mit den gleichen Pendeln Nr. 2 und 4 auf gleichen Stativplätzen III und IV über eine Beobachtungszeit von 8 Std. wiederholt, und außerdem mit den Pendeln Nr. 1 und 3 unabhängig davon in einem anderen Zweipendelapparat Messungen vorgenommen. Diese Meßperiode umfaßt die schon oben genannte Zeit vom 27. August 1936 bis 18. September 1936.

Es zeigte sich aber bei allen Pendeln, auch bei dem früher konstant bleibenden Pendel Nr. 2, eine Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude, die allerdings bei den einzelnen Pendeln verschieden groß war. Es tauchte daher der Ge-

Die Pendel wurden nur einmal gegen $17^h20'$ angestoßen, um Pendelsprünge, die durch das Anhalten der noch schwingenden Pendel und durch ein erneutes Anstoßen für die Nachtmessungen eventuell verursacht werden könnten, zu vermeiden.

Die Abnahme der Schwingungsdauer betrug bei Pendel Nr. 4 maximal etwa 3 mgal bei $6\frac{1}{2}$ Std. Beobachtungszeit. Das ist der dreifache Betrag der für die Reichsvermessung erforderlichen Genauigkeit von ± 1 mgal. Da nur zu Anfang und zu Ende dieses Beobachtungsintervalls die Schwingungsdauer bestimmt wurde, hatte man nur 2 Werte und konnte deshalb auch nichts aussagen, in welcher Form die Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude sich vollzog. Infolgedessen sind in der Fig. 1 die Tag- und Nachtmessungen der Schwingungsdauer geradlinig verbunden.

Um zu untersuchen, ob die Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude nur eine spezifische Eigenschaft des Pendels Nr. 4 war, und andererseits näheres über die Form

danke auf, ob die Pendeltische Ursache für die Abnahme überhaupt, oder für die verschiedenartige Abnahme der Schwingungsdauer bei den einzelnen Pendeln sei. Daher wurde also für die Pendel Nr. 1 und 3 die Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude auf jedem Platz im Pendelapparat bestimmt. Alle Messungen wurden auf konstanten Druck, Temperatur, sowie durch die Korrektur $T_0 \frac{\varphi^2}{16}$ (Amplitudenkorrektur) auf unendlich kleine Bögen reduziert. Außerdem wurden die Messungen auf Mitschwingen durch das Pendelstativ korrigiert durch die bekannten Furtwänglerschen Korrektionsformeln [3].

Sie lauten für unsere Pendel 1 und 3:

$$\Delta T_{1,3} = -\gamma_{1,3} \left[1 + \frac{a_{3,1}}{a_{1,3}} \cdot \cos \cdot (\psi_3 - \psi_1) \right]$$

ΔT = Korrektur der Schwingungsdauer infolge des Mitschwingens.

γ_1 und γ_3 = Mitschwingungskoeffizient von Pendel 1 und 3.

a_1 und a_3 = gemessene Amplituden auf dem Film.

ψ_1 und ψ_2 = Phasendifferenz der Pendel am Anfang und am Ende eines jeden 2-Stunden-Intervalls.

Die Koeffizienten γ_1 und γ_3 wurden aus Amplitudenbeobachtungen ermittelt. Die Gleichungen für sie lauten dann:

$$\gamma_{1,3} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,3}} \cdot \frac{T^2}{\pi t} + (T_3 - T_1)^2 \cdot \frac{a_{3,1}}{a_{1,3}} \cdot \frac{\pi t}{24 T^2} [4].$$

T = mittlere Schwingungsdauer der Pendel.

$T_3 - T_1$ = Differenz der Schwingungsdauer.

t = Beobachtungszeit in Sekunden. a_1 und a_3 = Amplituden.

Der zweite Teil der Gleichung auf der rechten Seite macht bei gut abgestimmten Pendeln, wie in unserem Fall, $T_3 - T_1 < 3 \cdot 10^{-6}$ sec für ein $t = 45$ min,

$T \approx 0.5$ sec und $\frac{a_{3,1}}{a_{1,3}} \approx 0.1$ weniger als eine Einheit der 9. Dezimale für die Halbschwingungszeit aus. Bei unseren Messungen betrug im ungünstigsten Fall dieser Wert $8.5 \cdot 10^{-10}$ sec.

Da der erste Teil der rechten Seite in der Größenordnung von 10^{-6} sec liegt, kann man also den zweiten Teil vernachlässigen.

Die Messungen zeigten $\gamma_1 \approx \gamma_3$, so daß wir $\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2}$ setzen konnten.

Es wurden nun die Mitschwingungskoeffizienten der Pendel auf den Plätzen I bis IV bestimmt. Die Anordnung der Plätze ersieht man aus folgender Fig. 2.

Die Messungen wurden auf den Plätzepaaren I und II bzw. III und IV ausgeführt, da sie beide in einer Schwingungsebene liegen.

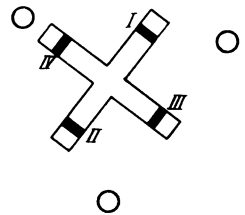


Fig. 2. Anordnung der Plätze im Askania-Vierpendelapparat

○ Fußschrauben des Pendelstativs. ■ Achattische

Die Mitschwingungskoeffizienten der beiden Pendel 1 und 3 auf den einzelnen Plätzen ergibt folgende Tabelle 1.

Tabelle 1. Mitschwingungskoeffizient von Pendel 1 und 3 auf Platz I bis IV

Platz	γ_1 in sec	γ_3 in sec
I	$24.7 \cdot 10^{-7}$	$25.7 \cdot 10^{-7}$
II	$25.7 \cdot 10^{-7}$	$24.7 \cdot 10^{-7}$
III	$20.0 \cdot 10^{-7}$	$20.5 \cdot 10^{-7}$
IV	$20.5 \cdot 10^{-7}$	$20.0 \cdot 10^{-7}$

Bei einer Messung, bei der Pendel 1 auf Platz I hängt, folglich Pendel 3 auf Platz II hängen muß, ergibt sich für den Mitschwingungskoeffizienten beider Pendel der Wert $24.7 \cdot 10^{-7}$ sec. Also:

$$\gamma = 24.7 \cdot 10^{-7} \text{ sec} = \frac{\gamma_{1, I} + \gamma_{3, II}}{2}$$

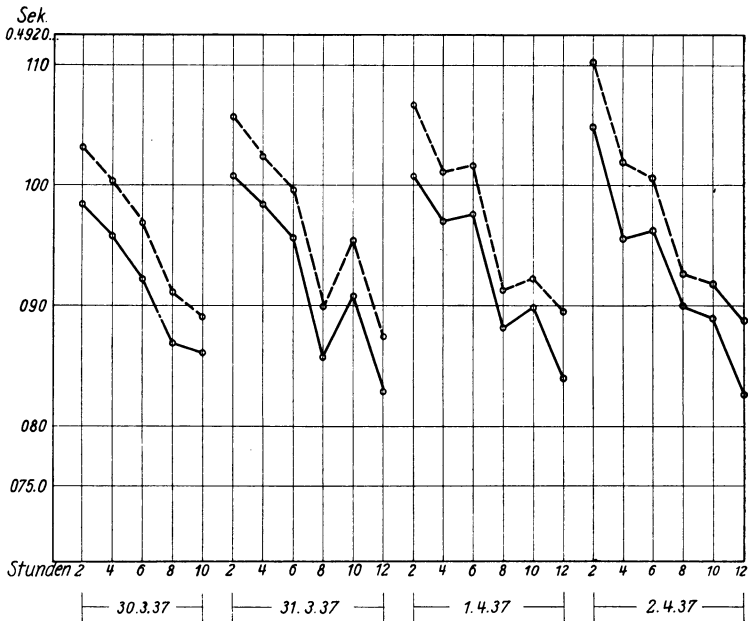


Fig. 3. Abnahme der Schwingungsdauer der Pendel 1 und 3 innerhalb von 8 bis 12 Std. auf den Stativplätzen I und II des Askania-Vierpendelapparates
 Pendel 1 auf Platz I; Pendel 3 auf Platz II; ——— P_1 ; - - - - P_3

Die Messungen zeigen, daß die Schwingungsebene III, IV stabiler ist als die Ebene I, II. Die Ebene senkrecht zur Verbindungslinie zweier Fußschrauben ergibt also das kleinste Mitschwingen des Pendelstativs.

Die schon vorher erwähnten Messungen der Meßperiode vom 3. März 1937 bis 9. April 1937, in der jedes Pendel einmal auf jedem Platz gegangen hat, zeigten,

abgesehen von einem geringen Unterschied in der Abnahme der Schwingungsdauer von gleichen Pendeln auf verschiedenen Plätzen, daß die Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude generell nicht vom Platz abhängig ist. In keinem Fall blieb die durch die vorher erwähnten Korrekturen reduzierte Schwingungsdauer der Pendel konstant, wie es nach der Theorie sein müßte, sondern es treten erhebliche Änderungen auf, die bei 12 Std. Beobachtungszeit maximal 8 bis 9 mgal, d. h. 20 bis $22.5 \cdot 10^{-7}$ sec Änderung für ein Halbskundenpendel betragen. Ein kleiner Ausschnitt aus den vielen Messungen zeigt die Fig. 3. Die vorher erwähnten geringen Unterschiede in der Abnahme der Schwingungsdauer gleicher Pendel auf verschiedenen Plätzen scheinen von einer gewissen Regelmäßigkeit zu sein. Es scheint z. B. bei den Messungen, daß Pendel 3 eine größere Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude hat als Pendel 1. Wechseln beide Pendel die Plätze, so tritt der umgekehrte Fall ein.

Ist T_A = Schwingungsdauer des Pendels bestimmt aus dem ersten 2-Stunden-Intervall und T_L = Schwingungsdauer des Pendels bestimmt aus dem letzten 2-Stunden-Intervall, dann ist $(T_A - T_L) = \Delta T$ die Abnahme der Schwingungsdauer während der Beobachtungszeit. Bildet man das Verhältnis $\Delta T_1 / \Delta T_3$, so muß das Verhältnis in dem oben erwähnten Fall einmal kleiner als 1 und nach Vertauschen der Plätze größer als 1 sein. In den beiden folgenden Tabellen 2 und 3 ist das für die Meßperiode vom 3. März 1937 bis 9. April 1937 für die Plätzepaare I, II und III, IV dargestellt. Die einzelnen Zahlen sind Mittelwerte von Einzelmessungen.

Tabelle 2 bzw. 3. Verhältnis der Abnahme der Schwingungsdauer von Pendel 1 und 3 in 8, 10 und 12 Stunden auf den Plätzepaaren I, II und III, IV

Tabelle 2. Plätzepaar I, II				Tabelle 3. Plätzepaar III, IV			
	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 8 Std.	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 10 Std.	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 12 Std.		$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 8 Std.	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 10 Std.	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_3}$ in 12 Std.
Vor Vertauschen				Vor Vertauschen			
der Plätze . . .	0.89	0.87	0.98	der Plätze . . .	0.83	0.75	—
Nach Vertauschen				Nach Vertauschen			
der Plätze . . .	1.29	1.26	1.07	der Plätze . . .	1.17	1.15	1.23

Es scheint also, daß der kleine Unterschied in der Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude bei gleichen Pendeln auf verschiedenen Plätzen von den Plätzen abhängig ist.

Berücksichtigt man die Feststellung, so bleibt trotzdem eine beträchtliche Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude bestehen, die, wie vorher schon erwähnt, vom Platz unabhängig ist.

II. Ursachen der Abnahme der Schwingungsdauer

Der Abrollvorgang an der Schneide. a) *Das Abrollen einer zylinderförmigen Schneide auf ebener Unterlage und die Wirkung einer keilförmigen Schneide.* Die

Theorie des physikalischen Pendels setzt voraus, daß das Pendel um einen festen Aufhängepunkt schwingt, d. h. daß die Pendelschwingung um eine Schneide mit punktförmigem Querschnitt erfolgt. Unter diesen Voraussetzungen ist die Schwingungsdauer T_φ bei sehr kleinen Amplituden φ :

$$T_\varphi = T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{9}{64} \cdot \frac{\varphi^4}{16} + \dots \right),$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Alle höheren Potenzen als φ^2 sind für kleine Amplituden (2φ etwa 1° in der Praxis) verschwindend klein und damit auch die entsprechenden Korrektionsglieder für die Schwingungsdauer.

$T_0 \cdot \varphi^2/16$ ist die bekannte Amplitudenkorrektion.

Nach Zufügen dieser Korrektion müßte T konstant sein, gleichgültig, ob die Schwingungsdauer bei kleinen oder großen Amplituden gemessen ist. Das ist aber, wie die Messungen zeigen, nicht der Fall. Es bleibt trotzdem noch eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude bestehen.

Die Bedingung, daß das Pendel um einen festen Aufhängepunkt schwingt, läßt sich in der Praxis nie streng erfüllen. Ein Pendel, das auf einer Schneide ruht, wird, auch wenn diese sorgfältig geschliffen ist, immer einen Krümmungsradius aufweisen. Diese Schneide wird also beim Schwingen des Pendels auf der Unterlage abrollen.

Die einfachste Vorstellung des Abrollvorganges ist das Abrollen einer Schneide mit kreisförmigem Querschnitt auf einer ebenen Unterlage. Der Einfluß eines solchen Abrollvorganges ist schon oft behandelt worden*). Die Formeln lauten bei den einzelnen Autoren unter Vernachlässigung höherer Potenzen als φ^2 für die Schwingungsdauer:

Bessel-Helmert:

$$T_\varphi = T_0 \left(1 - \frac{r}{2s} + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{r}{4l} \cdot \varphi^2 - \frac{r}{2s} \cdot \frac{\varphi^2}{16} + \dots \right).$$

Gebelein:

$$T_\varphi = T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{r}{4l} \cdot \varphi^2 + \dots \right),$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \begin{array}{l} r = \text{Krümmungsradius,} \\ s = \text{Abstand Schwer-} \\ l = \text{Pendellänge,} \quad \text{punkt-Schneide.} \end{array}$$

Die beiden Formeln unterscheiden sich kaum voneinander. Das von φ unabhängige Glied $r/2s$ bei Bessel-Helmert verändert die Pendellänge und kann deshalb in das T_0 mit hineingenommen werden. Das Glied $\frac{r}{2s} \cdot \frac{\varphi^2}{16}$ bei Bessel-

*) Siehe Literaturverzeichnis [2], [6] und [7].

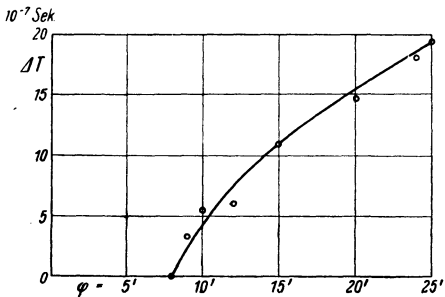


Fig. 4. Pendel 1 auf Platz I

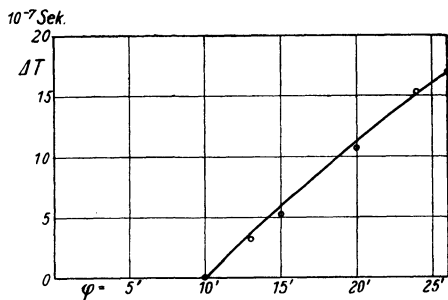


Fig. 5. Pendel 1 auf Platz II

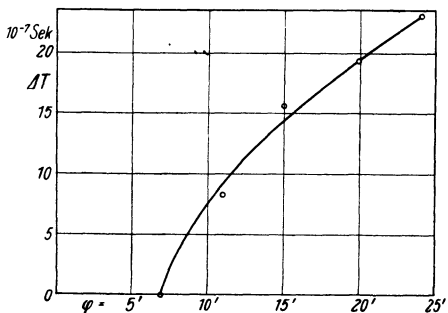


Fig. 6. Pendel 1 auf Platz III

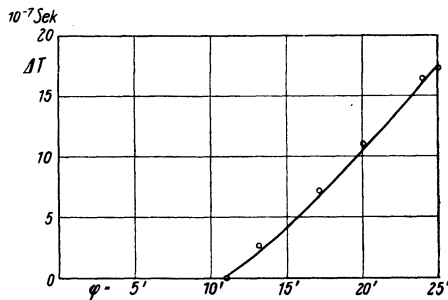


Fig. 7. Pendel 1 auf Platz IV

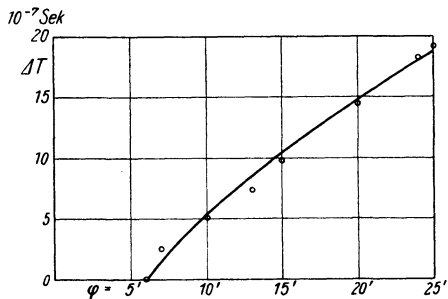


Fig. 8. Pendel 3 auf Platz I

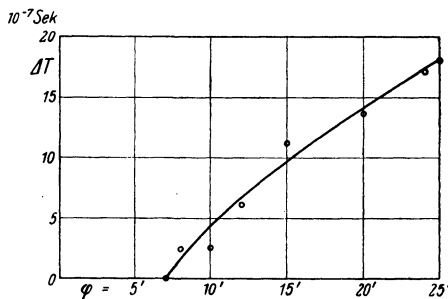


Fig. 9. Pendel 3 auf Platz II

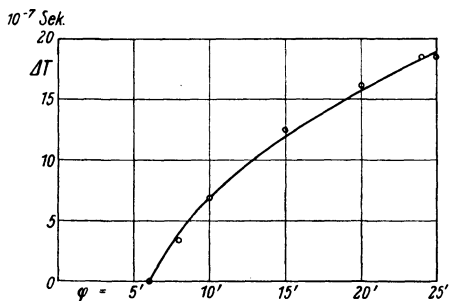


Fig. 10. Pendel 3 auf Platz III

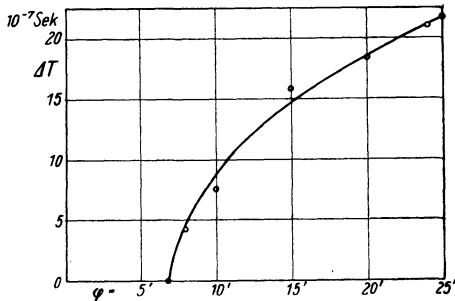


Fig. 11. Pendel 3 auf Platz IV

Fig. 4 bis 11. Mittlere Abnahme ΔT der Schwingungsdauer der Pendel 1 und 3 auf den Stativplätzen I bis IV als Funktion der Amplitude

Helmert fehlt bei Gebelein. Es ist aber bei Sterneck-Pendel $l \approx s$ etwa eine Zehnerpotenz, genau achtmal kleiner als das Glied $r/4 l \cdot \varphi^2$. Den Hauptanteil des Abrollens liefert also das Glied $r/4 l \cdot \varphi^2$.

Nach Anbringung der Amplitudenkorrektion bleibt also die Schwingungsdauer T_φ nach obigen Formeln immer noch quadratisch von φ abhängig.

Aus der gemessenen Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude müßte man daher auf die Größe des Krümmungsradius schließen können. Bei den schon mehrfach erwähnten Messungen vom 3. März 1937 bis 9. April 1937 zeigt sich aber nur bei Pendel 1, wenn es auf Platz IV hängt (Fig. 7), eine Abnahme

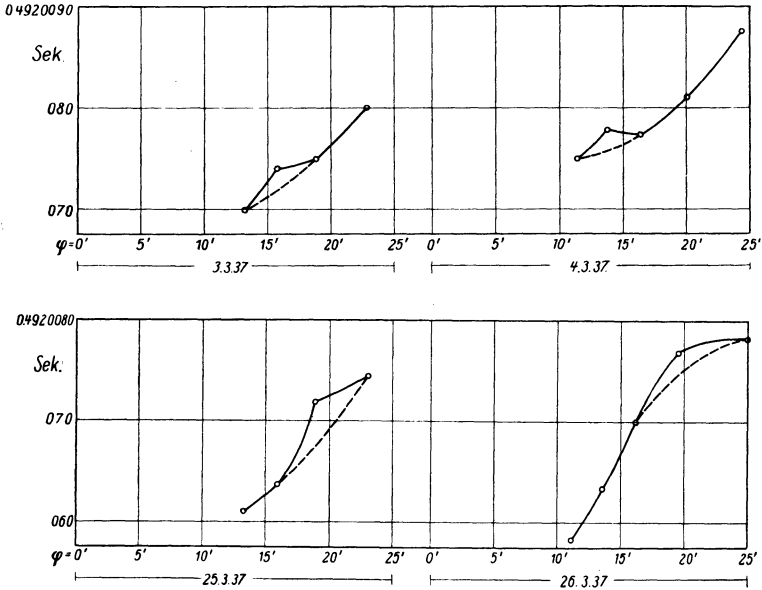


Fig. 12 und 13. Abnahme der Schwingungsdauer von Pendel 1 auf Platz IV an verschiedenen Tagen

der Schwingungsdauer, die eine quadratische Funktion von φ sein kann. Bei Pendel 3 dagegen auf allen Plätzen, ebenfalls bei Pendel 1 auf den Plätzen I, II und III ist dies nicht der Fall (Fig. 4 bis 11).

Die in den Fig. 4 bis 11 dargestellten Kurven stellen die mittlere Abnahme ΔT der Schwingungsdauer von Pendel 1 und 3 auf den Stativplätzen I bis IV als Funktion der Amplitude dar. Jede einzelne Kurve wurde durch Mittelung sämtlicher Messungen für jedes Pendel und für jeden Stativplatz bestimmt. Die quadratische Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude bei Pendel 1 auf Platz IV tritt noch deutlicher bei der Betrachtung der Einzelmessungen hervor (Fig. 12 und 13).

Um eine Vorstellung über die Größe des Krümmungsradius zu bekommen, wurde aus der Messung vom 4. März 1937 (Fig. 12) von Pendel 1 auf Platz IV, bei

der T quadratisch von φ abhängt, der Krümmungsradius berechnet. Da das Glied $\varphi^2/16 \cdot T_0$ in der Kurve schon berücksichtigt ist, so erhält man nach der schon oben genannten Formel von Gebelein:

$$\frac{T_\varphi - T_0}{T_0} = \frac{r}{4l} \cdot \varphi^2.$$

T_φ ist der höchste gemessene Wert von T . T_0 ist der Wert von T , der sich für $\varphi = 0$ ergibt (in Fig. 12 der Schnitt der Kurve mit der Ordinate). $T_\varphi - T_0$ ist dann nach Fig. 12 $\approx 15 \cdot 10^{-7}$ sec. $T_0 \approx 0.5$ sec.

$$\frac{T_\varphi - T_0}{T_0} = \frac{15 \cdot 10^{-7}}{0.5} = 3 \cdot 10^{-6} = \frac{r}{4l} \cdot \varphi^2.$$

Der Maximalwert von φ ist laut Fig. 12 etwa $24' \approx 6.94 \cdot 10^{-3}$ im Bogenmaß. φ^2 ist dann $48 \cdot 10^{-6}$. Folglich ist dann $r/4l \approx 48 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-6}$

$$r = \frac{4l}{16}, \quad r = \frac{l}{4}.$$

Für ein Halbskundenpendel ist $s \approx l \approx 25$ cm. Folglich

$$\underline{r \approx 6 \text{ cm.}}$$

Eine Schneide mit dem Krümmungsradius von 6 cm würde also die Abnahme der Schwingungsdauer mit abnehmender Amplitude bei Pendel 1 auf Platz IV erklären können.

Diese Größe des Krümmungsradius von 6 cm erscheint zu groß, da man gewohnt ist, mit Größenordnungen von $1/100$ bis $1/300$ mm, also von 3 bis 10μ zu rechnen. Solche Krümmungsradien sind von Schmerwitz*) gemessen worden. Sie gelten für Schneiden, die bei der Bestimmung des Krümmungsradius nur wenig belastet waren. Das Schwingen des Pendels um eine solche Schneide von 10μ Krümmungsradius ist kaum ein Abrollvorgang. Jede Schneide, wie sie auch gestaltet sein mag, wird unter der Last des Pendels deformiert. Man kann, wenn die Elastizitätsmoduln der Schneidenmaterialien bekannt sind, etwa die Breite der entstehenden Auflagefläche berechnen. Entsprechende Formeln sind für einfache Körper auf Grund der Hertz'schen Theorie über die Berührungsfläche elastischer Körper bei Druck entwickelt worden. Für den Fall eines Zylinders auf einer Ebene gilt die Formel:

$$\left(\frac{b}{4}\right)^3 = 0.58 \cdot \frac{P \cdot r}{E \cdot l} [10].$$

b = Breite der Berührungsfläche; P = Gewicht in kg; r = Krümmungsradius; l = Länge des Zylinders; E = Elastizitätsmodul.

Berechnet man für einen Zylinder mit einem $r = 10 \mu$ die Breite der Auflagefläche, so erhält man für Achatschneiden bei einem Gewicht $P = 1$ kg (Sterneck-Pendel) bei einer Länge des Zylinders von 20 mm und einem Elastizitätsmodul

*) Siehe Literaturangabe [8] und [9].

für Achat $E = 7 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$ eine Breite $b = 0.8 \mu$; für $E = 10 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$ ist $b = 0.7 \mu$.

Für die mittlere Druckfestigkeit des Achats von 50 kg/mm^2 würde eine solche Breite b nicht existieren können, wenn 1 kg die Schneide belastet. Das Material würde fließen bis die Breite b der Auflagefläche der Schneide mindestens 1μ beträgt. Ist diese Auflagebreite erreicht, so tritt weiter elastische Deformation ein. Die Auflagefläche wird also sicher mehrere μ breit sein. Ist also der Krümmungsradius der Schneide 10μ groß, so kann man bei einer Auflagebreite b von mehreren μ von einem Abrollen einer zylinderförmigen Schneide nicht gut sprechen. Eine solche Schneide hat vielmehr die Form eines abgestumpften Keiles und das Pendel würde daher um die Kanten eines solchen Keiles schwingen müssen. Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude ist dann außerordentlich groß, wie Helmert und Gebelein schon in ihren vorher erwähnten Arbeiten bemerkt haben.

Helmert findet für die Länge eines solchen Pendels mit keilförmiger Schneide:

$$l_{\varphi} = l_0 \left(1 - \frac{2b}{\pi \cdot s \cdot \varphi} \right).$$

Das Schwingen um eine solche Schneide würde mit einem außerordentlichen Verlust an Energie verbunden sein, was sich in der Dämpfung des Pendels stark bemerkbar machen müßte. Diese ist aber nach den Messungen sehr gering.

Man kann aus der gemessenen Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude der Pendel 1 bzw. 3 nach der Formel auf die Größe von b schließen. Bei einer Abnahme der Schwingungsdauer, die 8 mgal entspricht, nimmt gleichzeitig die Amplitude von etwa $24'$ auf etwa $10'$ ab. Berechnet man für diese beiden Amplituden aus der Formel von Helmert ein entsprechendes $\Delta l/l$ und setzt die Differenz gleich $8 \text{ mgal} = 8 \cdot 10^{-6} g$, so bekommt man ein entsprechendes b . Die Rechnung ist folgende:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} = 8 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{l_{24'} - l_0}{l_0} = \frac{-2b}{\pi \cdot s \cdot 24'} = \frac{\Delta l_{24'}}{l_0}.$$

Entsprechendes für eine Amplitude von $10'$. Dann ist:

$$\frac{\Delta l_{24'} - \Delta l_{10'}}{l_0} = \frac{\Delta l}{l} = 8 \cdot 10^{-6} = \frac{2b}{\pi s \cdot 10'} - \frac{2b}{\pi s \cdot 24'},$$

$$b = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{\frac{2}{\pi \cdot s \cdot 10'} - \frac{2}{\pi \cdot s \cdot 24'}}$$

*) $24'$ im Nenner bedeutet hier das Bogenmaß, das hier einem Winkel von $24'$ entspricht.

nach Einsetzen des Wertes für

$$s \approx 25 \text{ cm} = 25 \cdot 10^4 \mu$$

erhält man

$$b \approx 1.6 \cdot 10^{-2} \mu.$$

Die gesamte Auflagebreite ist also

$$2b = 3.2 \cdot 10^{-2} \mu \approx \frac{1}{30} \mu.$$

Eine solche Auflagebreite kann aber aus Gründen der Festigkeit nicht existieren. Bei einer Auflagebreite von 1μ , die unter Berücksichtigung einer mittleren Druckfestigkeit des Achats von 50 kg/mm^2 bei unserer Schneide schon als Mindestbreite erreicht wird, würde nach obiger Rechnung die Abnahme der Schwingungsdauer $30 \cdot 8 \text{ mgal} = 240 \text{ mgal} = 600 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ für ein Halbskundenpendel betragen. Eine solche Abnahme der Schwingungsdauer wurde aber nicht beobachtet. Unsere Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude kann also nicht als die Wirkung einer abgestumpften keilförmigen Schneide erklärt werden.

Beim Schwingen um die Kanten einer abgestumpften Schneide werden diese für einen kleinen Zeitmoment so stark belastet, daß sie nachgeben und fließen und weiter elastisch deformiert werden. Man könnte dann die Vorstellung haben, als wenn das Pendel trotzdem auf einer zylinderförmigen Schneide abrollt, die nun aber einen bedeutend größeren Krümmungsradius besitzt als 10μ . Ein Krümmungsradius von mehreren Millimeter, ja Zentimeter ist daher durchaus vorstellbar. Den aus den Messungen abgeleiteten Krümmungsradius von 6 cm kann man daher als den für die Abnahme der Schwingungsdauer wirksamen Krümmungsradius bezeichnen.

Würde man für eine zylinderförmige Schneide aus Achat von $r = 6 \text{ cm}$ nach der Formel $\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0.58 \frac{P \cdot r}{E \cdot l} b$ berechnen, so bekäme man

$$b = 63 \mu \text{ für } E = 7 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2,$$

$$b = 52 \mu \text{ für } E = 10 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2,$$

$$b = 36 \mu \text{ für } E = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2 \text{ (Stahl)}.$$

Um eine Vorstellung von der wirklichen Auflagebreite zu bekommen, wurde folgender Versuch gemacht. Der Achattisch eines Pendelapparates wurde mit sehr dünnem Ruß bedeckt. Sodann wurde mit Hilfe der Arretierungsvorrichtung ein Pendel vorsichtig auf den Tisch gesetzt und der Eindruck der Pendelschneide bestimmt. Der Pendelapparat sowie das Pendel waren nicht die gleichen, die zu den Messungen benutzt wurden. Infolgedessen geben diese Bestimmungen von b nicht die Auflagebreite der zu den Messungen benutzten Pendel wieder, sondern nur die Größenordnung. Das Pendel, dessen Auflagebreite bestimmt wurde, war ein Bronzependel in Sterneckform. Die Schneiden waren aus Achat und hatten die gleiche Form wie bei den anderen Pendel. Die Bestimmung der Auflagebreite durch den Eindruck in Ruß ist sicherlich eine rohe Methode. Die Breite b ist auch von der Dicke der Berührung abhängig. Ein etwa hundertfach vergrößerter Ab-

druck der Pendelschneide bei still hängendem Pendel gibt das Photo der Fig. 14 wieder. Die weißen Stellen sind gepreßter Ruß oder Graphit, der stark reflektiert und deshalb auf dem Photo weiß erscheint, während der unberührte Ruß nicht reflektiert und somit schwarz erscheint. Es ist daher sicher, daß auf den weißen Stellen die Schneide aufliegt, während die unscharfen Ränder durch das Abbröckeln der Rußschicht an solchen Stellen entstehen.

Bei einer hundertfachen Vergrößerung entspricht 1 mm 10 μ . Die durchschnittliche Auflagebreite b liegt nach dem Photo zwischen 10 und 20 μ , also im Mittel 15 μ .

Wenn die beobachtete Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude etwa durch das Abrollen einer zylinderförmigen Schneide erklärt werden soll, so könnte man aus der gemessenen Auflagebreite mittels der schon erwähnten Formel

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0.58 \cdot \frac{P \cdot r}{E \cdot l}$$

ein entsprechendes r berechnen.

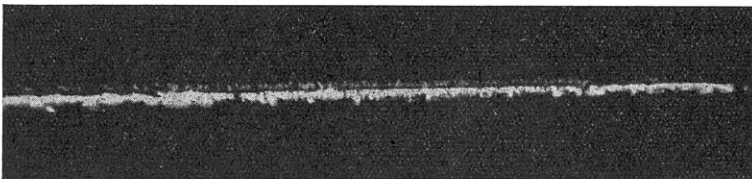


Fig. 14. Auflagebreite einer Pendelschneide bei ruhendem Pendel.
Vergrößerung 100 : 1

In der folgenden Tabelle 6 ist r für drei verschiedene Elastizitätsmoduln E und für drei verschiedene Breiten b berechnet.

Tabelle 6. Größe des Krümmungsradius bei verschiedenen Auflagebreiten und Elastizitätsmodulen.

b	$E = 7 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$	$E = 10 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$	$E = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$ (Stahl)
	r	r	r
10 μ	1.5 mm	2.2 mm	4.3 mm
15 μ	3.4 „	4.9 „	9.7 „
20 μ	6.0 „	8.6 „	17.2 „

Man käme also bei einer Auflagebreite $b = 20 \mu$ für Achat ($E = 10 \cdot 10^3 \text{ kg pro mm}^2$) zu einem Krümmungsradius von 8.6 mm, also fast 1 cm. Die Vorstellung von 6 cm Krümmungsradius erscheint deshalb nicht mehr so unwahrscheinlich.

Man könnte die Abnahme der Schwingungsdauer als Funktion der Amplitude bei Pendel 1 auf Platz IV als eine Eichkurve des betreffenden Pendels auffassen. Diese Vorstellung hat nur dann Berechtigung, wenn das Pendel unter Vermeidung aller anderen störenden Einflüsse immer die gleiche Abnahme der Schwingungs-

dauer zeigt, wenn man die Messung wiederholt. Inwieweit eine solche Annahme erfüllt ist, zeigen die Fig. 12 und 13.

Zwischen dem 4. März und dem 25. März 1937 hat das Pendel 1 den Platz gewechselt. Am 25. März 1937 hing es wieder auf dem gleichen Platz wie am 3. und 4. März 1937. Sieht man von den einzelnen Zacken in der Kurve ab, so sieht man, daß sich qualitativ die Kurven vielleicht reproduzieren lassen. Eine quantitative Übereinstimmung besteht jedoch nicht mehr in dem gleichen Maße. Hieraus ergibt sich die Forderung, daß man jedem Pendel einen bestimmten Platz zuordnet und zur Bestimmung der Schwingungsdauer immer bei gleichen Amplituden mißt. Bei Vermessungsreisen hat man vielfach schon aus anderen Gründen diese Anordnung befolgt.

b) Das Abrollen einer zylinderförmigen Schneide auf einen Kreiszyklindermantel.

Die quadratische Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude φ wurde nur bei Pendel 1 auf Platz IV bemerkt, während das Pendel 3 und Pendel 1 auf allen anderen Plätzen eine andere Abnahme zeigten. Mit der einfachen Annahme, daß ein Kreiszyklinder auf einer ebenen Unterlage abrollt, kommt man daher nicht mehr aus. Das Pendel wird die Unterlage verbiegen. Die nächste einfachste Annahme, die wir machen, ist die, daß die verbogene Unterlage ein Kreiszyklindermantel ist. Der Abrollvorgang wird also dargestellt durch das Abrollen zweier Kreiszyklinder ineinander.

Die beiden Kreiszyklinder haben die Krümmungsradien r und R . Die einzige Voraussetzung, die wir machen, ist, daß der Krümmungsradius der Unterlage R groß ist gegen r . In der folgenden Rechnung wird die Wirkung des Abrollvorganges zweier Kreiszyklinder ineinander auf die Schwingungsdauer berechnet (Fig. 15). Es sei:

$$MP = MP' = R,$$

$$AP = A'P' = r,$$

S = Schwerpunkt des Pendels,

s = Abstand Schwerpunkt—Schneide,

σ = Abstand Schwerpunkt—Aufhängepunkt,

α = Ausschlag des Pendels.

Der Rollweg ist $R \cdot \beta = r \cdot (\alpha + \beta)$

$$\beta = \frac{r \cdot \alpha}{R - r}.$$

Die kinetische Energie ist:

$$V = \frac{1}{2} m (\sigma^2 + \varrho^2) \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2,$$

$m\varrho^2$ = Trägheitsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt. ϱ = Trägheitsradius.

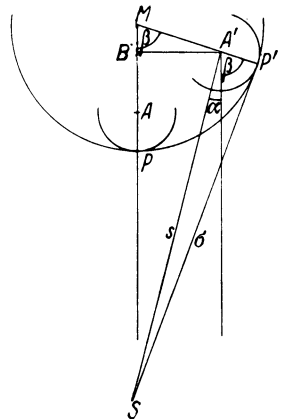


Fig. 15. Abrollen zweier Kreiszyklinder ineinander

Die potentielle Energie ist

$$\begin{aligned}
 U &= [(s+r) - (s+r) \cos \alpha + AB] \text{ mg,} \\
 AB &= MP - AP - MB = (R-r) - (R-r) \cos \beta, \\
 U &= [(s+r)(1 - \cos \alpha) + (R-r)(1 - \cos \beta)] \cdot \text{mg,} \\
 U + V &= \text{const; für den Umkehrpunkt } \alpha = \varphi; \frac{d\alpha}{dt} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\text{const} = \text{mg} [(s+r)(1 - \cos \varphi) + (R-r)(1 - \cos \beta)]; \beta = \frac{r \cdot \alpha}{R-r},$$

$$\frac{1}{2} m (\sigma^2 + \varrho^2) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2$$

$$= \text{mg} \left[(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi) + (R-r) \cdot \left(\cos \frac{r\alpha}{R-r} - \cos \frac{r\varphi}{R-r} \right) \right],$$

$$dt = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \varrho^2}{2g \left[(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi) + (R-r) \left(\cos \frac{r\alpha}{R-r} - \cos \frac{r\varphi}{R-r} \right) \right]}} d\alpha.$$

$$T = 4 \cdot \int_0^\varphi \sqrt{\frac{\sigma^2 + \varrho^2}{2g \left[(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi) + (R-r) \left(\cos \frac{r\alpha}{R-r} - \cos \frac{r\varphi}{R-r} \right) \right]}} d\alpha,$$

$$\sigma^2 = (s+r)^2 + r^2 - 2(s+r) \cdot r \cdot \cos(\alpha + \beta) \text{ (Cosinussatz),}$$

da $(\alpha + \beta)$ ein kleiner Winkel ist:

$$\sigma^2 \approx s^2 + (s+r) \cdot r \cdot (\alpha + \beta)^2.$$

$$T = 4 \cdot \int_0^\varphi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2 + r(s+r)(\alpha + \beta)^2}{2g \left[(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi) + (R-r) \left(\cos \frac{r\alpha}{R-r} - \cos \frac{r\varphi}{R-r} \right) \right]}} d\alpha,$$

$$\frac{s^2 + \varrho^2}{s+r} = L = \text{reduzierte Pendellänge.}$$

Das Integral ist streng nicht lösbar. Durch Reihenentwicklung und nach Einführung der Substitution $\alpha = \varphi \cdot \sin x$ und nach der Integration erhalten wir schließlich für kleine φ und α die Näherungsformel:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\varphi^2}{16} \frac{(s+r)(R-r)^3 + r^4}{(R-r)^2[(s+r)(R-r) + r^2]} + \frac{r}{4l} \varphi^2 \cdot \frac{R^2(s+r)}{(R-r)[(s+r)(R-r) + r^2]} \right].$$

Dabei ist:

$$l = L \cdot \frac{(s+r)(R-r)}{(s+r)(R-r) + r^2}.$$

Da wir R groß gegen r angenommen haben, so können wir die Faktoren von $\varphi^2/16$ und $r/4l \cdot \varphi^2$ nach Gliedern von r/R entwickeln. Wir erhalten dann unter Berücksichtigung nur linearer Glieder von r/R die Formel:

$$T_\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \frac{\varphi^2}{16} \left(1 - \frac{r}{s+r} \cdot \frac{r}{R} \right) + \frac{r}{4l} \varphi^2 \left(1 + \frac{2s+r}{s+r} \cdot \frac{r}{R} \right) \right],$$

$$l = \frac{s^2 + \varrho^2}{s+r} \left(1 - \frac{r}{s+r} \cdot \frac{r}{R} \right).$$

Für den Fall der ebenen Unterlage $R = \infty$ geht die Formel in die entsprechende für Abrollen auf ebener Unterlage über. Nehmen wir $R = 10r$ an ($r = 6$ cm), so beträgt die Änderung bei der Amplitudenkorrektur $\frac{r}{s+r} \cdot \frac{r}{R} \approx \frac{1}{50} = 2\%$. Sie kann also bei kleinen Amplituden vernachlässigt werden. Dagegen beträgt die Änderung in dem Korrektionsglied, das den Abrollvorgang wiedergibt, $\frac{2s+r}{s+r} \cdot \frac{r}{R} \approx \frac{1}{5} = 20\%$. Diese Änderung müßte bei den in der Praxis vorkommenden Amplituden berücksichtigt werden.

Die Schwingungsdauer T_φ ist nach obiger Formel eine Funktion von der Form $T_\varphi = T_0(1 + b\varphi^2)$; $b > 0$. Der größte Teil der Messungen zeigte jedoch eine wesentlich andere Form der Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude (Fig. 4 bis 11). Die Form der Kurven in den Fig. 4 bis 11 gibt also den allgemeinen Charakter der Änderung der Schwingungsdauer mit der Amplitude wieder. Sie lassen sich nicht mehr in der Form durch eine Funktion $T_\varphi = T_0(1 + b\varphi^2)$; $b > 0$ darstellen (ausgenommen Fig. 7, Pendel 1 auf Platz IV).

Bei den schon am Anfang dieser Arbeit erwähnten Änderungen der Schwingungsdauer des Pendels 4 während der Reichsvermessung auf der Basisstation in Göttingen konnte nichts über die Form der Abnahme ausgesagt werden, da nur Anfang- und Endpunkt der Kurve durch Messungen gegeben waren. Heute können wir sicher sagen, daß die Änderung von T nicht linear mit φ erfolgt, wie es in Fig. 1 dargestellt ist.

Die gleiche Form der Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude (Fig. 4 bis 11) ist auch an der Schuleruhr beobachtet worden [1]. Der Unterschied zwischen den Beobachtungen an der Schuleruhr und den in dieser Arbeit behandelten Messungen liegt in der Wahl der Pendel. Die Schuleruhr ist ein Pendel, das durch geeignete technische Hilfsmittel mit konstanter Amplitude schwingt, also ein getriebenes Pendel, während die von uns benutzten Pendel gewöhnliche freischwingende Pendel sind.

Da wir die durch die Messungen gewonnenen Kurven nicht durch eine Funktion von der Form $T_\varphi = T_0(1 + b\varphi^2)$; $b > 0$ annähern können, so läßt sich auch nicht die beobachtete Abnahme der Schwingungsdauer durch einen Abrollvorgang einer zylinderförmigen Schneide auf einer zylinderförmig verbogenen Unterlage erklären.

Der in den Fig. 4 bis 11 ermittelte Kurvenverlauf läßt sich aber durch eine Funktion annähern, die außer positiven quadratischen Gliedern von φ noch lineare

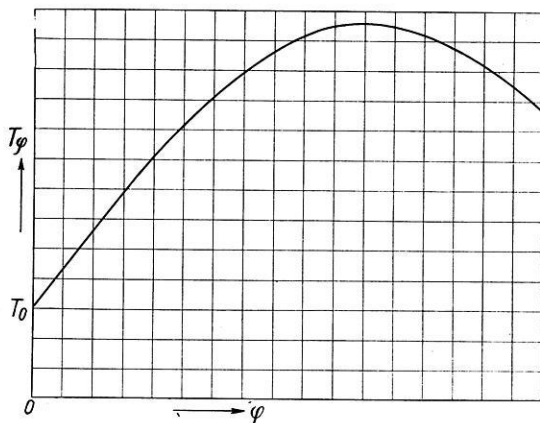


Fig. 16. Schematischer Verlauf der Funktion $T_\varphi = T_0(1 + b\varphi - d\varphi^2)$

und negative quadratische Glieder von φ enthält in der Form $T_\varphi = T_0(1 + a\varphi^2 + b \cdot \varphi - c\varphi^2)$. Es muß dabei vorausgesetzt werden, daß $|c| > |a|$ ist. Die Funktion hat also die Form $T_\varphi = T_0(1 + b \cdot \varphi - d\varphi^2)$. Der Verlauf dieser Funktion ist in Fig. 16 dargestellt.

Unsere gemessene Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude ist in ihrem Verlauf ähnlich dem ersten Stück der in Fig. 16 dargestellten Funktion.

c) *Abrollen und Gleiten der Schneide auf der ebenen Unterlage.* Wir müssen also annehmen, daß noch andere physikalische Faktoren beim Abrollvorgang beteiligt sind. Mit dem Abrollen kann ein gleichzeitiges Zurückgleiten der Schneide

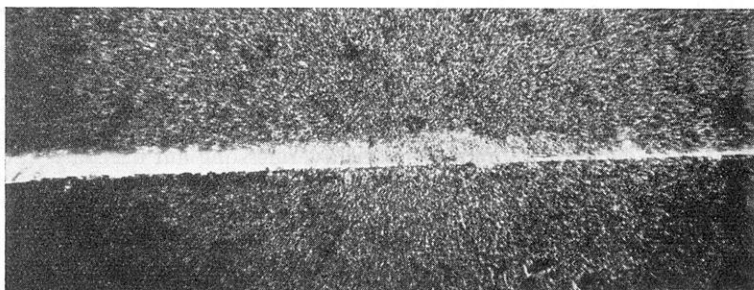


Fig. 17. Breite der Berührungsfläche einer Pendelschneide mit der Unterlage beim Schwingen des Pendels. Vergrößerung 100:1

auf dem Lager verbunden sein, welches durch den Horizontalzug des Pendels beim Schwingen hervorgerufen wird. Durch Abrollen und Gleiten wird der Eindruck der Schneide auf dem Lager breiter. Um hierüber einen Anhaltspunkt zu bekommen, wurde wieder das Versuchspendel aus Bronze auf einem sehr dünn berußten Achattisch zum Schwingen gebracht. Ein hundertfach vergrößerter Abdruck der Pendelschneide zeigt das Photo der Fig. 17. Das Photo stellt einen Ausschnitt von der Berührungsfläche der Schneide auf einem Lager dar. Die Breite der Berührungsfläche schwankt auf dem Photo, unter Berück-

sichtigung der hundertfachen Vergrößerung, zwischen 30 und 40 μ . Aus der früher gemessenen Auflagebreite der ruhenden Schneide von 15 bis 20 μ wurde für Achat ($E = 10 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$) ein Krümmungsradius von 5 bis 8.6 mm abgeleitet. Bei einer halben Amplitude des Pendels von $\varphi = 25' = 0.007$ im Bogenmaß, würde beim Rollen einer zylinderförmigen Schneide ($r = 5$ bis 8.6 mm) die Breite der Berührungsfläche $r \cdot 2 \varphi = 70$ bis 120 μ sein. Zu dieser Abrollfläche käme noch die ursprüngliche Breite der Berührungsfläche bei ruhendem Pendel von 15 bis 20 μ . Würde das Pendel nur abrollen, so müßte beim Schwingen also eine Berührungsbreite von 90 bis 140 μ entstehen. Das Photo der Fig. 17 zeigt dagegen nur 30 bis 40 μ . Nehmen wir aber gleichzeitiges Zurückgleiten an, so wäre dieser Gleitbetrag von der Größenordnung 50 bis 100 μ .

Theoretisch läßt sich der Einfluß des Gleitens der Schneide auf der Unterlage in seiner Wirkung auf die Schwingungsdauer schwer berechnen, weil man keine Angaben über den Reibungswiderstand der Schneide auf der Unterlage hat. Dieser Reibungswiderstand ist sehr von der Oberflächenbeschaffenheit der Unterlage abhängig und wird sich beim Gebrauch der Schneide und Lager ändern.

Wir nehmen an, daß der Gleitbetrag x proportional dem wirksamen Horizontalzug des Pendels sei. Der Horizontalzug des Pendels ist

$$H' = m \cdot g \frac{s}{l} \sin \alpha \cos \alpha^*);$$

α = Ausschlag des Pendels. Dem Horizontalzug H' wirkt eine Reibungskraft P entgegen.

$$P = \omega \cdot N.$$

ω = Reibungskoeffizient. Er sei definiert durch $\omega = \text{tg } \beta$. Dabei bedeute β einen Reibungswinkel, bei dem das Gleiten der Schneide auf dem Lager gerade beginnt. β muß daher kleiner als φ sein, da sonst beim Schwingen des Pendels kein Gleiten stattfinden kann. Außerdem ist β eine Funktion der Amplitude φ , die bei sinkendem Wert von φ wächst. Nehmen wir an, daß β sehr klein ist und nur wenig bei den vorkommenden Amplituden schwankt, so können wir angenähert β als konstant ansehen.

N ist der Teil des Gewichtes des Pendels, der beim Schwingen senkrecht auf das Lager drückt. Er beträgt:

$$N = m \cdot g \cdot \cos^2 \alpha.$$

Der wirksame Horizontalzug des Pendels ist jetzt

$$H = H' - P, \quad H = m \cdot g (\sin \alpha \cos \alpha - \omega \cos^2 \alpha); \quad s/l \approx 1 \text{ (Sterneckpendel).}$$

Der Gleitbetrag x sei also

$$x = \tau \cdot m \cdot g (\sin \alpha \cos \alpha - \omega \cos^2 \alpha); \quad \tau = \text{Proportionalitätsfaktor.}$$

Zur Abkürzung setzen wir $\tau \cdot m \cdot g = p$. Dann ist

$$x = p (\sin \alpha \cos \alpha - \omega \cos^2 \alpha).$$

*) Entsprechend dem Ansatz für das Mitschwingen. Siehe Literaturverzeichnis [4], S. 210.

Die kinetische Energie des Pendels ist

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \varrho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 *$$

$m \varrho^2 =$ Trägheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt. Die potentielle Energie U

$$U = (s + r) (1 - \cos \alpha) \cdot mg,$$

$$v^2 = \sigma^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\sigma \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cos(\alpha + \Delta\alpha) ** \text{ (Cosinussatz)}$$

für kleine α ist:

$$\sigma^2 \approx s^2 + r(s+r)\alpha^2,$$

$$\sigma \approx s + \frac{r(s+r)}{2s}\alpha^2,$$

$$dx \approx p(1 - 2\alpha^2 + 2\omega\alpha + \dots) d\alpha,$$

$$dx^2 \approx p^2(1 + 4\omega\alpha + 4\alpha^2(\omega^2 - 1) + \dots) d\alpha^2,$$

$$v^2 \approx \left[s^2 + r(s+r)\alpha^2 + p^2(1 + 4\omega\alpha \right.$$

$$\left. + 4\alpha^2(\omega^2 - 1) + \dots \right] + \left(2s + \frac{r(s+r)}{s} \right) \alpha^2$$

$$\cdot p(1 - 2\alpha^2 + 2\omega\alpha + \dots) \cos \alpha \left] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2.$$

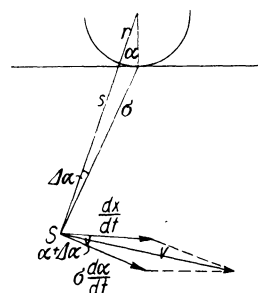


Fig. 18. Wirkung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten

Nach dem Auflösen der Klammern und Ordnen nach Potenzen von α ergibt sich schließlich unter Vernachlässigung höherer Potenzen als α^2 für

$$v^2 \approx \left[(s+p)^2 + \alpha \cdot 4p\omega \cdot (s+p) - \alpha^2 \cdot \frac{5ps^2 - 4p^2s(\omega^2 - 1) - (s+r)(s+p) \cdot r}{s} \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2.$$

Die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie ist konstant. Also ist

$$\text{const} = (s+r)(1 - \cos \varphi) mg; \text{ für } \alpha = \varphi \text{ (Umkehrpunkt),}$$

$$\frac{1}{2} m \left[(s+p)^2 + \varrho^2 + \alpha \cdot 4p\omega \cdot (s+p) - \alpha^2 \frac{5ps^2 - 4p^2s(\omega^2 - 1) - (s+r)(s+p) \cdot r}{s} \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = m \cdot g(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi),$$

$$T = 4 \cdot \int_0^\varphi \sqrt{\frac{(s+p)^2 + \varrho^2 + \alpha \cdot 4p\omega(s+p) - \alpha^2 \frac{5ps^2 - 4p^2s(\omega^2 - 1) - (s+r)(s+p)r}{s}}{2g(s+r)(\cos \alpha - \cos \varphi)}} d\alpha,$$

$$(s+p)^2 + \varrho^2 = l,$$

$$s+r$$

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^\varphi \sqrt{\frac{1 + \alpha \frac{4p\omega(s+p)}{l(s+r)} - \alpha^2 \frac{5ps^2 - 4p^2s(\omega^2 - 1) - (s+r)(s+p)r}{s \cdot l \cdot (s+r)}}{2(\cos \alpha - \cos \varphi)}} d\alpha.$$

*) v ist darin die vektorielle Summe aller auftretenden Translationsgeschwindigkeiten.

***) $\Delta\alpha$ klein wegen $r \ll s$, daher gegen α zu vernachlässigen.

Durch Reihenentwicklung und nach Einführung der Substitution $\alpha = \varphi \cdot \sin x$ und Integration und unter Vernachlässigung aller höheren Glieder als φ^2 erhalten wir die Näherungsformel für kleine φ :

$$T_\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{r}{4l} \varphi^2 + \frac{\varphi \cdot 4pl\omega(s+p)}{\pi \cdot l(s+r)} - \frac{\varphi^3}{4} \cdot \frac{[5ps^2 - 4p^2s(\omega^2 - 1) - p \cdot r(s+r)]}{s \cdot l \cdot (s+r)} \right].$$

Die ersten drei Glieder auf der rechten Seite in der Klammer geben den reinen Abrollvorgang wieder; die beiden letzten Glieder die Wirkung des Gleitens.

Man bekommt schließlich in der Formel für die Schwingungsdauer infolge des Gleitens lineare und negativ quadratische Glieder von φ . Der graphische Verlauf dieser Funktion $T_\varphi = f(\varphi)$ ist ähnlich der gemessenen Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude, wenn der Koeffizient von $-\varphi^2$ absolut größer ist als der Koeffizient von $+\varphi^2$, abgesehen von der Amplitudenkorrektion, die ja in allen Messungen schon berücksichtigt ist. Zur Abschätzung der beiden Koeffizienten von $+\varphi^2$ und $-\varphi^2$ schreiben wir für

$$s \approx l \approx 25 \text{ cm,}$$

$$r \leq l.$$

$$1. \quad \frac{1}{4} \frac{r}{l} \leq \frac{1}{4},$$

$$2. \quad \frac{1}{4} \cdot p \frac{5s^2 - 4ps(\omega^2 - 1) - rs - r^2}{s^2l + sl \cdot r} > \frac{1}{4} p \frac{5l^2 - 4pl(\omega^2 - 1) - l^2 - l^2}{l^3 + l^3}.$$

ω bleibt bei den vorkommenden Amplituden immer < 1 . Daher ist $-4pl(\omega^2 - 1)$ positiv. Also folgt

$$> \frac{1}{4} p \cdot \frac{3l^2}{2l^3} = p \cdot \frac{3}{8l} \approx \frac{3}{200} p.$$

Aus $1/4 < 3/200 p$ folgt:

$$p > \frac{50}{3}; \quad \tau > \frac{50}{3 \cdot m \cdot g}$$

für $m = 1 \text{ kg}$ Masse muß also

$$\tau > \frac{50}{3 \cdot 1000 \cdot 981} \frac{\text{sec}^2}{\text{Masse}} \approx 1.7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{sec}^2}{\text{Masse}}.$$

Für ein $\tau > 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2/\text{Masse}$ wird der Koeffizient von $-\varphi^2$ absolut immer größer als der Koeffizient von $+\varphi^2$, abgesehen von der Amplitudenkorrektion.

Die Gültigkeit der oben abgeleiteten Formel für die Schwingungsdauer liegt allein in der Gültigkeit des Ansatzes für den Gleitbetrag x . Ob er zu Recht besteht, muß das Experiment erst zeigen und soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

III. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag liefern zu den Untersuchungen über die Abnahme der Schwingungsdauer eines Pendels mit der Amplitude.

Im Teil I der Arbeit wird über die Ausführung der Messungen berichtet. Es zeigte sich, daß eine Abnahme der Schwingungsdauer eines Pendels mit der Ampli-

tude bestehen bleibt, nachdem die Messungen durch die üblichen Korrekturen reduziert waren. Die maximal beobachtete Abnahme der Schwingungsdauer eines Halbsekundenpendels von $20 \cdot 10^{-7}$ sec in 10 bis 12 Stunden Beobachtungszeit änderte sich nur wenig, wenn das Pendel den Stativplatz wechselte. Insbesondere zeigte sich bei zwei in einer Ebene mit 180° Phasendifferenz schwingenden Pendeln einmal die größere Abnahme der Schwingungsdauer bei dem einen Pendel und nach Vertauschen der Plätze die größere Abnahme bei dem anderen Pendel. Die Messungen der Mitschwingungskoeffizienten von zwei Pendeln auf den vier Stativplätzen des Askania-Vierpendel-Apparates zeigten, daß die Schwingungsebene, die senkrecht zur Verbindungslinie zweier Fußschrauben des Pendelstativs steht, die stabilste Schwingungsebene ist.

Im Teil II der Arbeit werden die Messungen diskutiert und versucht, die Ursachen für die Abnahme der Schwingungsdauer eines Pendels mit der Amplitude zu finden. Es wird gezeigt, daß der Abrollvorgang einer zylinderförmigen Schneide mit kreisförmigem Querschnitt auf ebener Unterlage zwar eine Änderung der Schwingungsdauer eines Pendels als Funktion der Amplitude gibt, die aber in der Form der Abnahme der größten Anzahl der beobachteten Messungen nicht entspricht. Nur bei einem Pendel (Pendel 1 auf Platz IV) auf einem bestimmten Stativplatz stimmt die Form der Änderung der Schwingungsdauer mit der Amplitude mit der durch die Theorie geforderten Form überein. Der aus diesen Messungen abgeleitete Krümmungsradius von 6 cm wird wegen seiner auffallenden Größe besonders erörtert. Auch die Annahme, daß eine zylinderförmige Schneide mit kreisförmigem Querschnitt auf einer zylinderförmig verbogenen Unterlage abrollt, ergibt theoretisch eine Funktion für die Schwingungsdauer in der Form $T_\varphi = T_0 (1 + b\varphi^2)$; $b > 0$, die gleichfalls nicht die beobachtete Form der Abnahme der Schwingungsdauer mit der Amplitude erklären kann. Die gemessene Abnahme der Schwingungsdauer als Funktion der Amplitude kann aber durch ein Stück einer Kurve angenähert werden, deren Funktion lineare und negativ quadratische Glieder der Amplitude enthält. Unter der Annahme des Abrollens und gleichzeitigem Zurückgleiten der Schneide auf dem ebenen Lager ergibt die Theorie eine solche Funktion. Aus besonderen experimentellen Untersuchungen wurde gefolgert, daß die Größe des Gleitbetrages etwa 50 bis 100μ betragen müßte.

Herrn Prof. G. Angenheister möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse danken. Desgleichen möchte ich danken Herrn Dr. H. Jung für sein Interesse an dieser Arbeit und für seinen wertvollen Rat. Meinen Dank möchte ich auch Herrn Dr. Hüttenhain vom Mineralogischen Institut in Göttingen aussprechen für die Herstellung der zu dieser Arbeit verwendeten photographischen Aufnahmen.

Literaturangabe

- [1] Pavel u. Uhink: Die Quarzuhren des Geodätischen Instituts in Potsdam. *Astron. Nachr.* Nr. 6167—68, Bd. 257 (1935).
- [2] Gebelein: Das abrollende physikalische Pendel. *Zeitschr. f. Geophys.* 8 (1932).

[3] Furtwängler: Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1902, S. 245.

[4] Handb. d. Experimentalphysik **25**, 2. Teil, Geophysik II, S. 227.

[5] Handb. d. Geophysik **4**, Lief. I, S. 243.

[6] Helmert: Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Publicationen d. königl. preuß. Geodät. Inst. Potsdam 1898.

[7] F. W. Bessel: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Oswalds Klassiker d. exakten Wissenschaften Nr. 7, herausgegeben von H. Bruns, Leipzig 1889.

[8] G. Schmerwitz, Jena: Messung von Schneidenkrümmungsradien. Zeitschr. f. Instrkde. 1932, 52. Jahrg., Heft 1.

[9] Meisser, Martin, Gengler: Veröffentl. d. Reichsanst. f. Erdbebenforschung in Jena, Heft 17, S. 35 (1931).

[10] Hütte, 1. Bd., Berlin 1923, S. 615.

[11] Werner Patzke: Untersuchungen über die Genauigkeit von Pendelmessungen an fester Station. Reichsvermessung 1935, Basisstation Göttingen. Zeitschr. f. Geophys. **12** (1936).

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Juli 1937.

Geomagnetische Messungen an Lamprophyrgängen in der Lausitz

Von **R. Lauterbach**. — (Mit 12 Abbildungen)

Es werden Erfahrungen und Ergebnisse magnetischer Messungen an Lamprophyrgängen in der Lausitz kurz mitgeteilt. Diese Gänge geben wegen ihres Gehalts an magnetischen Mineralien Anomalien, welche in eindeutigem Zusammenhang mit der Form, dem Streichen und der Mächtigkeit der Störungskörper stehen.

In der sächsischen Lausitz wurde um 1900 ein nickelerzführender Lamprophyrgang bei Sohland an der Spree entdeckt. Er liegt im Gebiete des Lausitzer Granits, der häufig von derartigen, jedoch erzfreien Gängen durchsetzt wird, welche im allgemeinen eine Streichrichtung von WNW oder NW besitzen. An der Fundstelle selbst steht der feinkörnige Rosenhain-Hainspacher Granit an, welcher hier stark dynamisch verändert ist. Das Vorkommen liegt auf Blatt 70 (Schirgiswalde) der geologischen Spezialkarte von Sachsen, auf welcher O. Herrmann [1] östlich von Äußerstmittel-Sohland einen NNW-streichenden Gang angegeben hat, der aber in Wirklichkeit nicht existiert. Vielmehr liegt hier der WNW streichende nickelführende Gang. Dieser ist etwa 10 bis 20 m mächtig, fällt fast saiger ein und weist Erzführung am nördlichen Saßband auf. Der Gang war bisher bekannt auf 1.5 km Erstreckung im Streichen und wird durch unsere neuen magnetischen Untersuchungen wahrscheinlich gemacht auf weitere 1000 m. Auch sind kleinere, parallel streichende Nebengänge bekanntgeworden. Die Fig. 1 gibt die alte Lage-skizze des Ganges nach Beck [2], in welche das von uns erhaltene Störungsbild der Vertikalintensität (ΔZ) eingetragen wurde. Man sieht, daß dieses sich mit der früheren Vermutung recht gut deckt.