Werk

Übergeordnetes Werk

Terms and Conditions

Contact

Polbahn und primäres z-Glied

Von **K. Ledersteger**, Wien

Der individuelle, systematische Verlauf der primären z-Glieder läßt sich durch strenge Elimination der Polkoordinaten nachweisen. Er erzeugt eine scheinbare Polbahn, die eine Funktion des Stationsnetzes ist. Man kann jedoch zeigen, daß die systematische Verfälschung der Polkoordinaten wahrscheinlich sehr gering ist, wenn das Stationsnetz genügend dicht und hinsichtlich seiner Längenverteilung annähernd symmetrisch ist. In diesem Falle läßt sich daher das Ausgleichsverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate rechtfertigen. Die aus den drei Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah abgeleiteten Polkoordinaten des Zeitraumes 1919—1931 sind aber nicht unwesentlich entstellt.

Im Verlauf der Diskussion der Polhöhenprobleme verlegte sich der Schwerpunkt der Untersuchungen immer mehr auf das Kimuraglied, da man erkannte, daß eine sichere Ableitung der Polkoordinaten eine gründliche Kenntnis der gesamten lokalen Komponente der Breitenvariation voraussetzt. Hier erhob sich als erste Schwierigkeit die enge Verknüpfung des z-Gliedes mit den Deklinationsfehlern der einzelnen Sterngruppen. Die Elimination dieser Deklinationsfehler läßt sich nun tatsächlich in aller Strenge auf verschiedenen Wegen erreichen. Aber diese Bemühungen haben gelehrt, daß die einfache Definition des Kimuragliedes als einer zusätzlichen Konstanten nicht mehr aufrecht gehalten werden kann. Vielmehr verbinden sich die Deklinationskorrektionen auf jeder Station mit einer individuell stark verschiedenen Jahresperiode, die wir als Summenkurve der periodischen Abendschwankung gewinnen und sekundäres z-Glied nennen wollen.

Eine Mißachtung dieses Umstandes führt bei den Ausgleichsrechnungen auf Grund der Fehlergleichungen:

$$\varphi_i + v_i = x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i + z \qquad (i = 1 \ldots 6) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

zu einer empfindlichen Verfälschung der Polkoordinaten*). Läßt sich eine derartige Verfälschung durch das sekundäre z-Glied auch ohne weiteres vermeiden, indem man bloß seinen Mittelwert benutzt oder gar dem Ansatz (1) die gänzlich unreduzierten Mittel aus Abend- und Nachtbeobachtungen zugrundelegt, so erhebt sich sofort eine neue Schwierigkeit. Denn diese Mittel enthalten das gleichfalls durch die Deklinationsfehler entstellte primäre z-Glied, im wesentlichen eine reelle Jahresperiode, und ein reiner Analogieschluß zwingt zu der berechtigten Annahme, daß auch das primäre z-Glied individuelle Verschiedenheiten aufweist und daher

*) K. Ledersteger: Der Einfluß des Kimuragliedes auf die Polkoordinaten. Zeitschr. f. Geophysik **12**, 48—58 (1936).

der Ansatz eines allen Stationen gemeinsamen Kimuragliedes zumindest die Jahresperiode der Polbahn verfälschen wird. In Wirklichkeit treten an Stelle von (1) die Stationsgleichungen:

$$\varphi_i = \left(\frac{\varphi_a + \varphi_n}{2}\right)_i = x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i + \zeta_i\,, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so daß strenge bei n Stationen n Gleichungen mit $(n + 2)$ Unbekannten vorliegen. Die individuellen, primären ζ_i-Größen enthalten selbstverständlich neben den Deklinationsfehlern der jeweiligen Gruppenkombination noch rein zufällige Fehler. Es ist nun sehr wahrscheinlich, daß die ζ_i infolge ihres lokal verschiedenen systematischen Verlaufs bei der rein formalen Darstellung:

$$\zeta_i = x' \cos \lambda_i + y' \sin \lambda_i + z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

auf gleichfalls systematische Werte x' und y', d. h. auf eine scheinbare Polbahn führen würden, die eine Funktion des Stationsnetzes ist.

Bei der üblichen Ableitung der Polkoordinaten werden gemäß (1) bekanntlich bloß drei Unbekannte angesetzt. Es ist klar, daß die jeweils verbleibenden Reste eine Darstellung nach (3) nicht mehr gestatten, daß demnach in diesem Falle die scheinbare Polbahn zur Gänze in die berechneten Koordinaten x und y eingeht. Die systematische Verfälschung der Polbahn durch die primären z-Glieder läßt sich somit nur vermeiden, wenn es gelingt, die Polkoordinaten zu bestimmen, ohne hierbei automatisch die scheinbare Polbahn von den primären z-Gliedern abzuspalten. Es ist diese Forderung natürlich gleichbedeutend mit einem Verzicht auf die Methode der kleinsten Quadrate.

Vorerst aber wollen wir die seit Wanach üblich gewordene getrennte Behandlung der beiden Gruppen jeder Kombination kurz skizzieren. Da die Abend- und Nachtwerte bloß um 2 Stunden auseinanderliegen, erhält man an Stelle von (2):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{a,i} &= x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i + \zeta_{a,i} \\ \varphi_{n,i} &= x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i + \zeta_{n,i} \\ (\varphi_a - \varphi_n)_i &= (\zeta_a - \zeta_n)_i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\,a)$$

Wanach hat nun bei seiner Methode das z-Glied gänzlich unterdrückt und bloß die Deklinationskorrektionen der einzelnen Gruppen eingeführt, hingegen alle aus den Deklinationsfehlern nicht erklärbaren Unterschiede zwischen Abend- und Nachtgruppe zur Vermeidung der Schlußfehler in die Polkoordinaten verlegt. Seine Gleichungen sind daher:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{a,i} &= x_a \cos \lambda_i + y_a \sin \lambda_i - \varDelta\,\delta_a \\ \varphi_{n,i} &= x_n \cos \lambda_i + y_n \sin \lambda_i - \varDelta\,\delta_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Man erkennt, daß diese $\varDelta\,\delta$ mit den negativen primären z-Gliedern der einzelnen Gruppen, freilich nur im Mittel über alle Stationen und Jahre, ident sind. Mahnkopf will im 6. Band der Resultate des Internationalen Breitendienstes dieser

Tatsache gerecht werden, indem er die Mittelung über mehrere Jahre fallen läßt, also teilweise zeitliche Variabilität zugesteht. Hingegen hält er an der Gleichheit dieser „Deklinationskorrektionen" für die zwei Beobachtungsabschnitte jeder Gruppe fest, identifiziert also das Stationsmittel der ζ_a jeweils mit dem Mittel der ζ_n der vorhergehenden Epoche. Die Unterschiede in den Ergebnissen der getrennten Ausgleichung bleiben daher bestehen und die Minimumslösungen für x_a, y_a und x_n, y_n gehören gar nicht der zweifach unendlichen Schar der möglichen Lösungen des Systems (2a) an.

Um die Minimumslösung der Gleichungen (2a) zu gewinnen, haben wir vielmehr mit:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{a,i} &= a_i x + b_i y + z_a \\ \varphi_{n,i} &= a_i x + b_i y + z_n \\ a_i &= \cos\lambda_i;\ b_i = \sin\lambda_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1\,\mathrm{a})$$

die Normalgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} 2[aa]x + 2[ab]y + [a]\,(z_a + z_n) &= [a(\varphi_a + \varphi_n)] \\ 2[ba]x + 2[bb]y + [b]\,(z_a + z_n) &= [b(\varphi_a + \varphi_n)] \\ [a]x + [b]y + n\cdot z_a &= [\varphi_a] \\ [a]x + [b]y + n\cdot z_n &= [\varphi_n] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1\,\mathrm{b})$$

Man erkennt, daß die arithmetischen Mittel $\left(\frac{\varphi_a + \varphi_n}{2}\right)$ unmittelbar dieselben Polkoordinaten x und y liefern, während als z das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(z_a + z_n)$ resultiert. Zusammen mit der Differenz:

$$z_a - z_n = \frac{1}{n}\,[(\varphi_a - \varphi_n)]$$

ist damit gleichfalls z_a und z_n bestimmt. Jedoch wäre auch diese Lösung nur berechtigt, wenn man die Abweichungen der ζ_i vom Mittelwert z als zufällige Fehler betrachten dürfte. So aber macht der systematische Charakter dieser Differenzen $(\zeta_i - z)$ im Verein mit der geringen Zahl der Stationen die Methode der kleinsten Quadrate illusorisch.

Es erübrigt sich an dieser Stelle, den Beweis für die Beeinflussung der Polbahn durch die primären z-Glieder an verschiedenen Kombinationen der Breitenstationen zu erbringen. In Band VI der „Ergebnisse" sind ja auf S. 223 ff derartige Vergleiche enthalten. Daselbst sind die Differenzen der Koordinaten, die nach (1) aus einer verschiedenen Anzahl von Stationen abgeleitet wurden, in ihren Jahresperioden und Jahresmitteln zusammengestellt. Da in diesen Differenzen natürlich die tatsächliche Polbahn ausfällt, muß ihr systematisches Verhalten der scheinbaren Polbahn zugeschrieben werden. Letztere ist ja, wie schon erwähnt, eine Funktion des Stationsnetzes. Einen verläßlicheren Maßstab für die Brauchbarkeit der Resultate und den systematischen Einfluß der scheinbaren Polbahn erhalten wir aber, wenn wir die Polkoordinaten aus demselben Stationsnetz nach verschiedenen Methoden ableiten. Wir wählen die hinsichtlich der Verteilung der geographischen Längen annähernd symmetrische Kombination der fünf Stationen:

Mizusawa	$\lambda_1 = -141^0 08'$;	$a_1 = -0.779$,	$b_1 = -0.628$
Tschardjui	$\lambda_2 = -63^0 29'$;	$a_2 = +0.446$,	$b_2 = -0.895$
Carloforte	$\lambda_3 = -8^0 19'$;	$a_3 = +0.990$,	$b_3 = -0.145$
Gaithersburg	$\lambda_4 = +77^0 12'$:	$a_4 = +0.222$,	$b_4 = +0.975$
Ukiah	$\lambda_5 = +123^0 13'$:	$a_5 \quad -0.548$,	$b_5 = +0.837$

Denn nur für ein symmetrisches Stationsnetz liefert die Methode der kleinsten Quadrate ein Ergebnis, bei dem keine Richtung einseitig bevorzugt ist. Bei strenger Symmetrie führt der Ausgleich nach (1) auf die Lösung:

$$x = \sum_i \frac{a_i}{[a\,a]} \cdot \varphi_i; \qquad y = \sum_i \frac{b_i}{[b\,b]} \varphi_i; \qquad z = \sum_i \frac{1}{n} \varphi_i \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

während unsere fünf Stationen die expliziten Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= -0.440\ \varphi_1 + 0.135\ \varphi_2 + 0.435\ \varphi_3 + 0.124\ \varphi_4 - 0.254\ \varphi_5 \\ y &= -0.276\ \varphi_1 - 0.309\ \varphi_2 - 0.014\ \varphi_3 + 0.344\ \varphi_4 + 0.255\ \varphi_5 \\ z &= +0.237\ \varphi_1 + 0.200\ \varphi_2 + 0.172\ \varphi_3 + 0.182\ \varphi_4 + 0.209\ \varphi_5 \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (6)$$

liefern.

Um für die Differenzen $(\zeta_i - z)$ die Minimumsbedingung umgehen zu können beachten wir, daß die Gleichungen (1) bei drei Stationen eine eindeutige und restlose Lösung zulassen. Setzt man zur Abkürzung:

$$A = a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2),$$

so findet man ganz allgemein:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= (b_2 - b_3)\ \varphi_1 + (b_3 - b_1)\ \varphi_2 + (b_1 - b_2)\ \varphi_3 \\ A_y &= (a_3 - a_2)\ \varphi_1 + (a_1 - a_3)\ \varphi_2 + (a_2 - a_1)\ \varphi_3 \\ A_z &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\ \varphi_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\ \varphi_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ \varphi_3 \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (7)$$

Wie in (6) sind auch hier die Koeffizientensummen in x und y Null und in z gleich eins. Wir wenden uns zuerst dem z-Glied zu. Führt man in die Gleichung für das der Kombination entsprechende mittlere primäre z-Glied für φ_i die Werte aus (2) ein, so erhält man:

$$z = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Da stets:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0,$$

sind die numerischen z-Beträge sowohl von der tatsächlichen wie auch von der scheinbaren Polbahn unabhängig. Trotzdem stellt aber z eine strenge Beziehung zwischen den drei individuellen ζ_i-Werten dar. Für die zehn möglichen Kombinationen von je drei Stationen des gegebenen Netzes resultieren die mittleren, primären z-Glieder:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= +0.772\ \zeta_1 - 0.689\ \zeta_2 + 0.917\ \zeta_3 \\
z_2 &= +0.284\ \zeta_1 + 0.278\ \zeta_2 + 0.438\ \zeta_4 \\
z_3 &= -0.064\ \zeta_1 + 0.537\ \zeta_2 + 0.527\ \zeta_5 \\
z_4 &= +0.424\ \zeta_1 + 0.264\ \zeta_3 + 0.312\ \zeta_4 \\
z_5 &= +0.302\ \zeta_1 + 0.402\ \zeta_3 + 0.296\ \zeta_5 \\
z_6 &= +0.657\ \zeta_1 + 0.909\ \zeta_4 - 0.566\ \zeta_5 \\
z_7 &= +0.840\ \zeta_2 - 0.533\ \zeta_3 + 0.693\ \zeta_4 \\
z_8 &= +0.443\ \zeta_2 + 0.070\ \zeta_3 + 0.487\ \zeta_5 \\
z_9 &= +0.489\ \zeta_2 + 0.081\ \zeta_4 + 0.430\ \zeta_5 \\
z_{10} &= +0.743\ \zeta_3 - 0.773\ \zeta_4 + 1.030\ \zeta_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Gleichungen (2) führen nach Elimination der tatsächlichen Polkoordinaten x und y auf $(n-2)$ Relationen zwischen den n Größen ζ_i. Von den zehn Gleichungen (9) sind daher nur drei unabhängig. Wählt man z. B. willkürlich ζ_1 und ζ_3, so liefern z_1, z_4 und z_5 die restlichen ζ_i. Zwei beliebige Stationsgleichungen (2) ergeben dann eindeutig die zugehörigen „Polkoordinaten" x und y. Eine triviale Lösung ist durch $\zeta_i = \varphi_i$ oder durch $x = y = 0$ gegeben.

Es liegt nun nahe, das mittlere primäre z-Glied durch $\frac{1}{10}\sum z_k$ oder durch:

$$z_M = +0.238\ \zeta_1 + 0.190\ \zeta_2 + 0.186\ \zeta_3 + 0.166\ \zeta_4 + 0.220\ \zeta_5 \quad . . \quad (10)$$

zu definieren und numerisch aus:

$$z_M = +0.238\ \varphi_1 + 0.190\ \varphi_2 + 0.186\ \varphi_3 + 0.166\ \varphi_4 + 0.220\ \varphi_5$$

zu berechnen. Man sieht, daß sich diese Relation nur ganz geringfügig von der dritten Gleichung (6) unterscheidet. Bringt man z_M als gemeinsamen Bestandteil aller ζ_i von den Ausgangswerten φ_i in Abzug:

$$\varphi_i' = \varphi_i - z_M .$$

so beweist der stark systematische Verlauf der restlichen z_k:

$$z_k' = z_k - z_M$$

unabhängig von den Polkoordinaten den schon früher betonten systematischen Charakter der Differenzen $(\zeta_i - z_M)$, also die Existenz scheinbarer Polbahnen.

Ebenso wie z lassen sich die Polkoordinaten x und y als die arithmetischen Mittel von je zehn Gleichungen (7) definieren. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= -0.705\ \varphi_1 + 0.453\ \varphi_2 + 0.252\ \varphi_3 \\
x_2 &= -0.839\ \varphi_1 + 0.719\ \varphi_2 + 0.120\ \varphi_4 \\
x_3 &= -0.935\ \varphi_1 + 0.790\ \varphi_2 + 0.145\ \varphi_5 \\
x_4 &= -0.476\ \varphi_1 + 0.682\ \varphi_3 - 0.206\ \varphi_4 \\
x_5 &= -0.396\ \varphi_1 + 0.591\ \varphi_3 - 0.195\ \varphi_5 \\
x_6 &= +0.126\ \varphi_1 + 1.338\ \varphi_4 - 1.464\ \varphi_5 \\
x_7 &= -0.944\ \varphi_2 + 1.577\ \varphi_3 - 0.633\ \varphi_4 \\
x_8 &= -0.581\ \varphi_2 + 1.026\ \varphi_3 - 0.445\ \varphi_5 \\
x_9 &= +0.094\ \varphi_2 + 1.178\ \varphi_4 - 1.272\ \varphi_5 \\
x_{10} &= +0.143\ \varphi_3 + 1.014\ \varphi_4 - 1.157\ \varphi_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

und:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= +0.510\ \varphi_1 - 1.660\ \varphi_2 + 1.150\ \varphi_3 \\
y_2 &= -0.101\ \varphi_1 - 0.449\ \varphi_2 + 0.550\ \varphi_4 \\
y_3 &= -0.537\ \varphi_1 - 0.124\ \varphi_2 + 0.661\ \varphi_5 \\
y_4 &= -0.327\ \varphi_1 - 0.425\ \varphi_3 + 0.752\ \varphi_4 \\
y_5 &= -0.621\ \varphi_1 - 0.093\ \varphi_3 + 0.714\ \varphi_5 \\
y_6 &= -0.703\ \varphi_1 - 0.211\ \varphi_4 + 0.914\ \varphi_5 \\
y_7 &= -0.647\ \varphi_2 + 0.190\ \varphi_3 + 0.457\ \varphi_4 \\
y_8 &= -0.910\ \varphi_2 + 0.589\ \varphi_3 + 0.321\ \varphi_5 \\
y_9 &= -0.523\ \varphi_2 + 0.676\ \varphi_4 - 0.153\ \varphi_5 \\
y_{10} &= -0.795\ \varphi_3 + 1.589\ \varphi_4 - 0.794\ \varphi_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

Zum Unterschied von der Minimumslösung (6) setzen wir

$$\xi = \frac{1}{10} \sum x_k \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{10} \sum y_k$$

und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta &= -0.322\ \varphi_1 + 0.053\ \varphi_2 + 0.427\ \varphi_3 + 0.281\ \varphi_4 - 0.439\ \varphi_5 \\
\eta &= -0.178\ \varphi_1 - 0.431\ \varphi_2 + 0.062\ \varphi_3 + 0.381\ \varphi_4 + 0.166\ \varphi_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

Da wir bereits wissen, daß jedem Wertesystem ζ_i, das drei Bestimmungsgleichungen (9), etwa wieder z_1, z_4 und z_5, befriedigt, ein Wertepaar x und y koordiniert ist, muß sich der Unterschied der beiden Lösungen (6) und (13) auf je zwei weitere hypothetische Bestimmungsgleichungen für die ζ_i zurückführen lassen. Tatsächlich würden die Gleichungen (6) und (11) bis (13) stets die wahren Polkoordinaten liefern, wenn man überall die φ_i durch die Differenzen $(\varphi_i - \zeta_i)$

ersetzen könnte. Damit ergeben sich die willkürlichen Bestimmungsgleichungen der Lösung (6):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -0.440\,\zeta_1 + 0.135\,\zeta_2 + 0.435\,\zeta_3 + 0.124\,\zeta_4 - 0.254\,\zeta_5 \\ 0 &= -0.276\,\zeta_1 - 0.309\,\zeta_2 - 0.014\,\zeta_3 + 0.344\,\zeta_4 + 0.255\,\zeta_5 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (6\,\mathrm{a})$$

und der Lösung (13):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -0.322\,\zeta_1 + 0.053\,\zeta_2 + 0.427\,\zeta_3 + 0.281\,\zeta_4 - 0.439\,\zeta_5 \\ 0 &= -0.178\,\zeta_2 - 0.431\,\zeta_2 + 0.062\,\zeta_3 + 0.381\,\zeta_4 + 0.166\,\zeta_5 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (13\,\mathrm{a})$$

Die Gleichungen (6a) lassen sich natürlich auch aus der Minimumsbedingung ableiten. Denkt man sich in (9) das mittlere z-Glied jeweils subtrahiert, bildet also:

$$\varphi_i' = \varphi_i - z_M, \quad z_k' = z_k - z_M \quad \text{und} \quad \zeta_i' = \zeta_i - z_M,$$

so folgt aus z_1, z_4 und z_5 unmittelbar:

$$\begin{aligned} \zeta_2' &= -1.120\,\varphi_1' - 1.331\,\varphi_3' + 1.000\,\varphi_2' + 1.120\,\zeta_1' + 1.331\,\zeta_3', \\ \zeta_4' &= +1.359\,\varphi_1' + 0.846\,\varphi_3' + 1.000\,\varphi_4' - 1.359\,\zeta_1' - 0.846\,\zeta_3'. \\ \zeta_5' &= +1.020\,\varphi_1' + 1.358\,\varphi_3' + 1.000\,\varphi_5' - 1.020\,\zeta_1' - 1.358\,\zeta_5'. \end{aligned}$$

Damit findet man:

$$\begin{aligned} [\zeta'\zeta'] = {} & 5.142\,\zeta_1'^2 + 5.331\,\zeta_3'^2 + 8.051\,\zeta_1'\zeta_3' + \zeta_1'(-8.284\,\varphi_1' - 8.051\,\varphi_3' \\ & + 2.240\,\varphi_2' - 2.718\,\varphi_4' - 2.040\,\varphi_5') + \zeta_3'(-8.051\,\varphi_1' - 8.662\,\varphi_3' \\ & + 2.662\,\varphi_2' - 1.692\,\varphi_4' - 2.716\,\varphi_5') \end{aligned}$$

und durch Differentiation nach ζ_1' und ζ_3':

$$\left.\begin{aligned} 2.000\,\zeta_1' + 2.240\,\zeta_2' - 2.718\,\zeta_4' - 2.040\,\zeta_5' &= 0 \\ 2.000\,\zeta_3' + 2.662\,\zeta_2' - 1.692\,\zeta_4' - 2.716\,\zeta_5' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (6\,\mathrm{b})$$

wenn man bedenkt, daß die Klammerausdrücke durch Addition und Multiplikation aus den Ausdrücken z_k' hervorgegangen sind, in denen man nachträglich φ_i' und ζ_i' vertauschen darf. Die Koeffizientensummen in (6b) sind -0.518 und $+0.254$, so daß durch Addition von $0.518\,z_M$, bzw, $-0.254\,z_M$ mit:

$$z_M = +0.237\,\zeta_i + 0.200\,\zeta_2 + 0.172\,\zeta_3 + 0.182\,\zeta_4 + 0.209\,\zeta_5$$

zwei Relationen zwischen den ζ_i folgen, die sich leicht in die Gleichungen (6a) transformieren lassen.

Die Lösung (13) hat vor dem Minimumsansatz den Vorzug, daß sie die scheinbare Polbahn des hier zugrunde gelegten Stationsnetzes nicht a priori mit der wahren Polbahn vereinigt. Aber letzten Endes stellen sowohl (6a) wie (13a) den ζ_i aufgezwungene Bedingungen dar, wie sie sich leider nicht vermeiden lassen, wenn man eine eindeutige Lösung anstrebt. Aller Wahrscheinlichkeit nach gibt es nämlich für ζ_i neben (9) keine weiteren, für alle Epochen gültigen Beziehungen. Trotzdem ist die Annahme naheliegend, daß die Differenzen $(x - \zeta)$ und $(y - \eta)$ wenn schon nicht die scheinbare Polbahn selbst, so doch zumindest einen Anhaltspunkt für die Größenordnung der scheinbaren Polbahn der primären z-Glieder geben. Aus dem Material des 3. Bandes der „Resultate des Internationalen Breitendienstes", der den Zeitraum 1900 bis 1906 behandelt, erhält man gemäß:

$$\left.\begin{aligned} x - \xi &= -0.118\ \varphi_1 + 0.082\ \varphi_2 + 0.008\ \varphi_3 - 0.157\ \varphi_4 + 0.185\ \varphi_5 \\ y - \eta &= -0.098\ \varphi_1 + 0.122\ \varphi_2 - 0.076\ \varphi_3 - 0.037\ \varphi_4 + 0.089\ \varphi_5 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

die Differenzen in Einheiten 0″.001:

$x - \xi$:

t	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	Summe
0.05		+ 19	— 10	— 4	— 2	— 13	+ 1	— 9
.12		+ 25	— 13	— 4	+ 1	+ 3	+ 13	+ 25
.19		+ 14	— 7	— 10	+ 3	— 12	+ 1	— 11
.25		+ 5	+ 8	— 25	+ 1	+ 7	+ 21	+ 17
.32		0	— 4	— 6	— 11	0	+ 8	— 13
.40		0	— 8	— 18	— 11	+ 8	+ 21	— 8
.48		+ 6	— 11	— 17	— 2	+ 9	+ 2	— 13
.56		+ 10	+ 1	— 9	— 5	+ 8	0	+ 5
.67		+ 17	+ 2	— 12	— 5	+ 12	— 2	+ 12
.78		+ 10	— 14	— 1	+ 4	+ 22	— 6	+ 15
.89		+ 3	— 19	— 23	+ 14	— 4	— 10	— 39
.97	(+ 32)	+ 6	— 15	— 13	+ 14	+ 7	— 13	— 14
Summe		+ 115	— 90	— 142	+ 1	+ 47	+ 36	— 33

$y - \eta$:

t	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	Summe
0.05		+ 12	— 8	— 7	+ 4	— 5	0	— 4
.12		+ 11	— 11	+ 6	+ 5	+ 8	+ 8	+ 27
.19		+ 8	— 4	+ 3	+ 8	— 1	+ 1	+ 15
.25		— 5	+ 5	— 6	+ 17	+ 2	+ 15	+ 28
.32		— 1	0	+ 1	+ 3	— 5	+ 4	+ 2
.40		+ 6	0	— 11	0	— 4	+ 8	— 1
.48		+ 6	— 5	— 6	+ 4	0	— 7	— 8
.56		+ 8	+ 5	— 2	— 5	— 3	— 6	— 3
.67		+ 8	— 8	— 12	— 4	0	— 10	— 26
.78		+ 7	— 11	— 5	+ 4	+ 7	— 13	— 11
.89		+ 2	— 18	— 14	+ 9	+ 2	— 16	— 35
.97	(+ 9)	+ 5	— 9	— 2	+ 9	+ 7	— 8	+ 2
Summe		+ 67	— 64	— 55	+ 54	+ 8	— 24	— 14

In diesen Differenzen sind systematische Gänge angedeutet. Sie liegen aber durchweg innerhalb der Unsicherheit der Polkoordinaten und man darf mit einiger Wahrscheinlichkeit schließen, daß für unser Stationsnetz eine systematische Entstellung der Polkoordinaten durch die ζ-Beträge nicht zu fürchten ist. Die stark systematischen Koordinatendifferenzen, die sich beim Übergang von sechs bzw. fünf Stationen auf die drei Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah ergeben, müssen dann, die Richtigkeit obiger Argumentation vorausgesetzt, der Hauptsache nach der scheinbaren Polbahn dieses verringerten Stationsnetzes zugeschrieben werden. Dies ist von großer Bedeutung, da die im 6. und 7. Bande der „Resultate des I. B.“ gegebenen Polkoordinaten der Jahre 1919 bis 1931 nur aus jenen drei Stationen abgeleitet werden konnten. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß die erwähnten Koordinatendifferenzen neben einer Jahresperiode noch eine fünfjährige Periode enthalten*). Genau so, wie aus der Jahresperiode und der ersten Wittingschen Störung eine Periode von 5.1 Jahren resultiert, kann auch umgekehrt die hier auftretende Periode eine Variabilität der Chandlerschen Periode nach sich ziehen. Diese wichtige Frage wird sich natürlich nur lösen lassen, indem man für die Jahre 1900 bis 1914 beide Stationsnetze parallel behandelt und die Ergebnisse einer harmonischen Analyse unterwirft.

Die geringen Differenzen in den beiden vorhergehenden Tabellen könnten den Anschein erwecken, daß die Polkoordinaten schon viel sicherer bekannt sind, als man gewöhnlich annimmt. Berechnet man aber statt der Mittelwerte ξ und η sämtliche x_k und y_k, so läßt sich zeigen, daß eher das Gegenteil der Fall ist. Zur Bestätigung dieser Behauptung greifen wir einen besonders krassen Fall heraus, wie ihn die Epoche 1899.97 darbietet. Für diese Epoche sind folgende φ-Werte als Differenzen gegen die Mittelwerte des Zeitraums 1900 bis 1906 gegeben:

$$\varphi_1 = -25, \quad \varphi_2 = -35, \quad \varphi_3 = +42, \quad \varphi_4 = -42, \quad \varphi_5 = +136.$$

Die Minimumslösung (6) liefert:

$$x = -15, \quad y = +37, \quad z = +15$$

und damit:

$$\zeta_1' = -28, \; \zeta_2' = -10, \; \zeta_3' = +47, \; \zeta_4' = -90, \; \zeta_5' = +81.$$

Hingegen erhalten wir aus (11), (12) und (9):

$$\begin{array}{lll}
x_1 = +\;12 & y_1 = +\;94 & z_1 = +\;43 \\
x_2 = -\;9 & y_2 = -\;5 & z_2 = -\;35 \\
x_3 = +\;15 & y_3 = +\;108 & z_3 = +\;54 \\
x_4 = +\;49 & y_4 = -\;41 & z_4 = -\;13 \\
x_5 = +\;8 & y_5 = +\;109 & z_5 = +\;50 \\
x_6 = -\;258 & y_6 = +\;151 & z_6 = -\;132 \\
x_7 = +\;125 & y_7 = +\;11 & z_7 = -\;81 \\
x_8 = +\;3 & y_8 = +\;100 & z_8 = +\;54 \\
x_9 = -\;226 & y_9 = -\;31 & z_9 = +\;38 \\
x_{10} = -\;194 & y_{10} = -\;208 & z_{10} = +\;204 \\
\xi = -\;47 & \eta = +\;29 & z_M = +\;18
\end{array}$$

*) a. a. O. S. 57.

Die Streuung beträgt in x 383, in y 359 und in z 336 Einheiten! Es liegt nahe, diese Werte unter dem der Methode der kleinsten Quadrate zugrunde liegenden Gesichtspunkte zu betrachten, daß das Kimuraglied für alle Stationen gleich ist. Dann läßt sich die starke Streuung durch eine alleinige Abweichung auf der Station Gaithersburg erklären. Die vier Kombinationen der vier übrigen Stationen geben nämlich:

$$\begin{array}{lll} x_1 = +12 & y_1 = +\ 94 & z_1 = +43 \\ x_3 = +15 & y_3 = +108 & z_3 = +54 \\ x_5 = +\ 8 & y_5 = +109 & z_5 = +50 \\ x_8 = +\ 3 & y_8 = +100 & z_8 = +54 \end{array}$$

und im Mittel:

$$\bar{x} = +10 \qquad \bar{y} = +103 \qquad \bar{z} = +50$$

Mit diesen Werten erhält man:

$$\zeta_1' = -3, \ \zeta_2' = +3, \ \zeta_3' = -3, \ \zeta_4' = -194, \ \zeta_5' = +5,$$

und man könnte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ als die richtige Lösung betrachten, wenn nicht auch die zur Kontrolle herangezogene Station Cincinnati einen großen Rest: $\zeta' = -115$ geben würde. Sicher liefert aber der Ausgleich nach (6) für die vier Stationen Mizusawa, Tschardjui, Carloforte und Ukiah ebenso wie die eindeutige Lösung für die drei Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah Polkoordinaten, die ganz nahe bei $\bar{x}$ und $\bar{y}$ liegen. In $(x - x)$ und $(y - \bar{y})$ zeigt sich also der starke Einfluß der individuellen ζ-Beträge besonders deutlich.

Schließlich sei noch der Versuch erwähnt, eine der beiden fehlenden Relationen zwischen den ζ_i aus dem Umstand abzuleiten, daß die zwei Stationen Tschardjui und Ukiah nahezu diametral liegen. Man kann tatsächlich aus der strengen Beziehung:

$$z_3 + z_8 = -0.064\,\zeta_1 + 0.980\,\zeta_2 + 0.070\,\zeta_3 + 1.014\,\zeta_5$$

auf dem Wege sukzessiver Approximation ζ_5 und damit alle ζ_i sowie die Koordinaten x und y in Funktion von ζ_2 ausdrücken und findet dann wieder ein eindeutiges Formelsystem, indem man für die $[\zeta'\,\zeta']$ ein relatives Minimum ansetzt. Aber der Fehler, den der funktionale Zusammenhang zwischen ζ_2 und ζ_5 nach sich zieht, geht mit dem sieben- bis achtfachen Betrag in die übrigen ζ_i und in die Polkoordinaten ein, so daß auch dieser Weg kein größeres Vertrauen verdient.

Das Ergebnis dieser Untersuchung läßt sich daher kurz folgendermaßen zusammenfassen. Die primären z-Glieder erzeugen infolge ihrer lokalen Verschiedenheit eine scheinbare Polbahn, die natürlich stets vom zugrunde gelegten Stationsnetz abhängt. Der störende Einfluß, d. h. die Verfälschung der Polkoordinaten dürfte aber um so geringer sein, je größer die Zahl der Stationen ist. Da man einmal gezwungen ist, die zwei fehlenden Relationen zwischen den ζ_i durch hypothetische Annahmen zu ersetzen, bleibt bei genügend großer Zahl der Stationen das Ausgleichsverfahren noch immer die nächstliegende Lösung. Hingegen wächst offensichtlich die systematische Entstellung der Polbahn mit sinkender Stationszahl und dürfte bei drei Stationen ihr Maximum erreichen. Dies ist um so bedauerlicher, als die Polkoordinaten der Jahre 1919 bis 1931 nur auf den drei Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah beruhen. Die Größe dieser systematischen Verfälschung kann nur durch Gegenüberstellung der aus allen sechs und diesen drei Stationen ermittelten Polkoordinaten abgeschätzt werden, welche Arbeit bereits in Angriff genommen wurde.

Ein neues piezoelektrisches Vertikalseismometer

Von **St. v. Thyssen** — (Mit 3 Abbildungen)

Ein piezoelektrisches Vertikalseismometer wird beschrieben, dessen piezoelektrisches Material aus Seignettesalz besteht. Die Empfindlichkeit gegenüber Feuchtigkeit wird vermieden. Das Gewicht des Seismometers beträgt etwa 0.3 kg.

An dieser Stelle möchte ich kurz über ein neuartiges piezoelektrisches Vertikalseismometer*) berichten, das sich durch seine einfache Bauweise auszeichnet und für seismische Arbeiten im Felde geeignet ist.

Bekanntlich werden piezoelektrische Seismographen schon seit längerer Zeit hergestellt und haben sich teilweise auch für seismische Feldarbeiten als geeignet erwiesen. Bei den meisten Konstruktionen wird als piezoelektrisches Material Quarz gewählt. Dieses Material wird trotz der nur mäßigen Piezoelektrizität seiner vorzüglichen mechanischen Eigenschaften wegen anderen piezoelektrischen Substanzen (wie z. B. Seignettesalz) gegenüber bevorzugt. In derartigen piezoelektrischen Seismographen werden Quarzkristalle parallel zur neutralen Achse im Rhythmus der zu messenden Schwingungen gedrückt. Die auf diese Weise auf den Belegen entstehenden elektrischen Spannungen werden nach Verstärkung registriert. Verschiedene Autoren und Patentschriften berichten über solche Schwingungsmesser**).

Alle diese Geräte leiden darunter, daß das zur Anwendung gelangende piezoelektrische Material bei geringen Erschütterungen nur sehr schwache Spannungen erzeugt, wie dies beispielsweise bei Quarz der Fall ist, so daß eine beträchtliche Verstärkung oder eine hochempfindliche Meßapparatur***) erforderlich ist. Ist aber das piezoelektrische Material besonders gut erregbar†), wie z. B. Seignettesalz,

*) Nach Angaben des Verfassers von der Seismos, Hannover, gebaut.

) Kluge u. Linckh: Zeitschr. d. Ver. D. Ing. **73, S. 1311—1314, 1929; Ambronn: World Petroleum Congress London 1933, Nr. 18; Herrmann u. Meisser: Zeitschr. f. Geophysik **3**, 152 (1935); siehe auch DRP. 417989 und DRP. 459926.

***) Meisser: Physik. Zeitschr. Heft 38, Nr. 17 (1937).

†) Meissner u. Bechmann: Zeitschr. f. techn. Physik **11**, S. 430—434, 1928.