

## Werk

**Jahr:** 1938

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:14

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0014

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0014](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0014)

**LOG Id:** LOG\_0031

**LOG Titel:** Beiträge zur Theorie des Erdaufbaus

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

The cause of the earth's magnetism has been said to be a mystery, but with a more correct opinion on the increase of the temperature, we must not consider the demagnetizing temperature of magnetite (569°) to be at 20 km. depth into the rocks, but rather deep down into the magma.

The question can be seen from following points of view. All kinds of rocks are formed of magma. The primary magma is (according to the opinion in present time) basaltic, with the iron contents of basalt, about 10%. As the average content of iron of the rocks, at least down to known depths, is low, only a few procent, the greater part of the iron of the magma, which has formed the rocks, must have stayed below the crust, probably as Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> = magnetite, which has sunk into the magma till increased viscosity stopped the sinking. Thus we may believe that there exist into the magma enormous masses of magnetite, partly above the (present) depth to its demagnetizing temperature, giving rise to the earth's magnetism.

Falun, Sweden, May 1938.

---

## Beiträge zur Theorie des Erdaufbaus

Von H. Lorenz. — (Mit 3 Abbildungen)

1. Ableitung allgemeiner Bedingungen für die Dichteverteilung im Erdinnern. 2. Beweis für die Schollennatur der festen Kruste und Ermittlung der Dicke der Simaschicht aus der geothermischen Tiefenstufe. Entscheidung für einen gasförmigen Erdkern. Bestimmung der Dicken des Meeres- und Festlandblockes aus Messungen der Schwerezunahme mit der Tiefe und der Gesteinsdichten mit Rücksicht auf das Schwimmgleichgewicht (Isostasie). 3. Diskussion einiger Potenzgesetze für die Dichteverteilung; Entscheidung für den Helmertschen Ansatz und Bestimmung der Beiwerte aus den allgemeinen Bedingungen, der mittleren Erddichte und dem Trägheitsmoment. Allgemeingültigkeit der dimensionslosen Dichteformel für alle oberflächlich erstarrten kugelförmigen Weltkörper.

1. *Allgemeine Grundlagen.* Unter Vernachlässigung der Fliehbeschleunigung gegenüber der Schwere, sowie der Annahme des Erdaufbaues aus konzentrischen homogenen Kugelschalen ändert sich die Dichte  $\delta$  nur mit dem Radius  $r$  derart, daß die Masse einer Schale von der Dicke  $dr$  durch  $dm = 4\pi \delta r^2 dr$  gegeben ist.

Mit der Gesamtmasse innerhalb des Radius  $r$  und der Erdmasse  $m_0 = \frac{4}{3}\pi \delta_m a^3$  mit der mittleren Dichte  $\delta_m$ , dem Erdhalbmesser  $a$ , sowie der Oberflächenbeschleunigung  $g_a$  folgt dann die zu  $r$  gehörige Beschleunigung  $g$  aus

$$\frac{g}{g_a} = \frac{m}{m_0} \frac{a^2}{r^2} = \frac{3}{ar^2 \delta_m} \int_0^r \delta r^2 dr \dots \dots \dots (1)$$

Für die Oberfläche mit  $r = a$  und  $g = g_a$  vereinfacht sich diese Gleichung in

$$a^3 \delta_m = 3 \int_0^a \delta r^2 dr \dots \dots \dots (2)$$

eine Bedingung, der die radialveränderliche Dichte bei der durch Schweremessung gegebenen Mitteldichte  $\delta_m = 5.52 \text{ gcm}^{-3}$  jedenfalls genügen muß. Durch Ableitung von (1) folgt weiter

$$\frac{dg}{g_a} = \frac{a^2}{m_0} \left( \frac{dm}{r^2} - 2 \frac{m}{r^3} \frac{dr}{r} \right)$$

und daraus für eine Schicht  $dm = -\Delta m$  von der Dicke  $dr = -h$  unter der Oberfläche von der Dichte  $\delta_a$  mit  $r = a$  und  $m = m_0$  die Änderung  $\Delta g$  von  $g$  mit der Tiefe

$$\frac{\Delta g}{g_a} = 2 \frac{h}{a} - \frac{\Delta m}{m_0} = 2 \frac{h}{a} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_a}{\delta_m} \right) \dots \dots \dots (1a)$$

Da ferner das Trägheitsmoment einer Kugelschale um eine Achse  $d\Theta = \frac{2}{3} r^2 dm$  ist, so ergibt sich das gesamte Trägheitsmoment des Erdballs mit dem Trägheitsarm  $\alpha a$  zu  $\Theta_0 = \alpha^2 a^2 m_0$ , woraus durch Gleichsetzen mit dem Integral über  $d\Theta$  die weitere Bedingung

$$a^5 \alpha^2 \delta_m = 2 \int_0^a \delta r^4 dr \dots \dots \dots (3)$$

für die veränderliche Dichte  $\delta$  hervorgeht. Hierin ist für eine homogene Kugel mit  $\delta = \delta_m, \alpha^2 = \frac{2}{5} = 0.4$ , und für die Erde  $\alpha^2 = 0.392 \sim \frac{1}{3}$  durch die astronomische Feststellung der Präzession der Erdachse sowie durch die Abplattung und die Umdrehungsdauer in Übereinstimmung mit einer hierdurch bedingten Mondstörung gegeben.

Schließlich müssen wir aus der gegenüber der mittleren Dichte viel kleineren Gesteinsdichte von 2 bis  $2.8 \text{ g cm}^{-3}$  sowie des Meerwassers mit  $1.03 \text{ g cm}^{-3}$  an der Erdoberfläche eine Dichtesteigerung nach dem Innern mit einem Höchstwert im Erdmittelpunkt schließen, woraus sich eine dritte Bedingung

$$\left( \frac{d\delta}{dr} \right)_0 = \delta'_0 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ergibt, der die veränderliche Dichte  $\delta$  zu genügen hat.

Da der Erdkörper als ganzes sich im hydrodynamischen Gleichgewicht befindet, gilt für den Druck  $p$  an irgendeiner Stelle  $dp = -g\delta$  oder mit dem Mittelpunktsdruck  $p_0$

$$p_0 - p = \int_0^r g \delta dr \dots \dots \dots (5)$$

sowie unter Vernachlässigung des Luftdrucks an der Oberfläche

$$p_0 = \int_0^a g \delta dr, \quad p = \int_r^a g \delta dr \dots \dots \dots (5a)$$

Nehmen wir, wie schon in (1a) die Dicke  $h$  der Oberflächenschicht als klein gegen den Erdhalbmesser  $a$  an, so haben wir für die Verhältnisse ihres Volumens, ihrer Masse und ihres Trägheitsmoments zu diesen Werten der ganzen Erde

$$\frac{\Delta V}{r_0} = 3 \frac{h}{a}, \quad \frac{\Delta m}{m_0} = 3 \frac{\delta_a}{\delta_m} \frac{h}{a}, \quad \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0} = \frac{2}{\alpha^2} \frac{\delta_a}{\delta_m} \frac{h}{a} \sim 6 \frac{\delta_a}{\delta_m} \frac{h}{a} \dots (6)$$

Andererseits gilt für die Abplattung  $\alpha$  der Masse innerhalb  $r$  von der mittleren Dichte  $\delta_0$  bei einer gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mit hinreichender Annäherung

$$\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}, \quad \alpha_0 = \frac{\omega^2 a}{g_a}$$

oder mit (1)

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{r}{a} \frac{g_a}{g} = \frac{m_0 r^3}{m a^3} = \frac{\delta_m}{\delta_r} \dots \dots \dots (7)$$

woraus wegen des Dichtezuwachses nach innen mit  $\delta_r > \delta_m$  eine *Abnahme der Abplattung nach innen* hervorgeht.

2. *Die Erdkruste.* Auf der Erdoberfläche besitzt nur der im hydrodynamischen Gleichgewicht befindliche Ozeanspiegel eine mathematisch definierte Gestalt im Gegensatz zu den darüber herausragenden Festländern, deren unregelmäßige Erhebungen ebensolche des Meeresbodens entsprechen, die zum Teil als Inseln zutage treten. Die Meeresfläche verhält sich zur Landfläche ungefähr wie 12 : 5 = 2.4 : 1; bei einer mittleren Meerestiefe  $h_1 = 3.8$  km und einer mittleren Land-erhebung von 0.8 km über dem Wasserspiegel oder  $h_2 = 4.6$  km über dem ausgeglichenen Meeresboden hat der Wasserkörper ungefähr das doppelte Volumen wie der gesamte Landblock. Während nun die Wasserdichte  $\delta_1 = 1.03$  g cm<sup>-3</sup> bekannt ist, schwankt die Dichte der den Landblock und die Meeresunterlage bildenden Gesteine zwischen zwei für lockere Massen (Sand) und 2.8 g cm<sup>-3</sup> für sogenannte Urgesteine (Gneis, Granit). Diese Körper verhalten sich unter allseitig gleichem Druck von beliebiger Höhe schubspannungsfrei wie vollkommene Flüssigkeiten, können aber einseitige Drücke nur bis zu gewissen Bruchgrenzen ertragen. Würde die ganze Erdrinde von zwei mittleren Dichte  $\delta_a$  und einer Dicke  $h$  eine zusammenhängende Schale bilden, so würde der auf ihrer Innenseite lastende Druck  $p = g_a h \delta_a$  auf den Erdquerschnitt bezogen eine Kraft von  $\pi a^2 p = \pi a^2 g_a \delta_a h$  ergeben, die von der Schalenringfläche  $2\pi a h$  mit einer Druckspannung  $p_a$  aufzunehmen wäre, so zwar, daß

$$\pi a^2 g_a \delta_a h = 2\pi a h p_a \quad \text{oder} \quad p_a = \frac{1}{2} g_a \delta_a a \dots \dots (8)$$

Mit  $g_a = 981$  cm s<sup>-2</sup>,  $\delta_a = 2.5$  g cm<sup>-3</sup>,  $a = 6370$  km =  $6.37 \cdot 10^8$  cm gibt dies eine einseitige Druckspannung von  $p_a = 78 \cdot 10^{10}$  dyn cm<sup>-2</sup>  $\sim$  800000 kg cm<sup>-2</sup>, der

kein fester Körper gewachsen ist. Denn die Druckfestigkeit der Massengesteine von der Dichte bis  $2.8 \text{ g cm}^{-3}$  überschreitet selten  $3000 \text{ kg cm}^{-2}$  und erreicht nur beim dichtesten Basalt mit  $\delta = 3 \text{ g cm}^{-3}$  den Wert von  $5000 \text{ kg cm}^{-2}$ . Daraus folgt aber, daß die *Erdkruste aus einzelnen, nur lose zusammenhängenden Schollen bestehen kann, die auf einer dichteren flüssigen oder doch plastischen Unterlage schwimmen und in dieser je nach ihrer Eigendichte mehr oder weniger tief eintauchen*. Dieses Schwimmgleichgewicht der Erdkruste bezeichnet man nach Airy als *Isostasie*.

Die unter der festen Kruste ruhende zähe Flüssigkeitsschicht, das sogenannte *Sima*, besitzt gegenüber der Erdoberfläche eine sehr viel höhere Temperatur, die sich in der sogenannten *geothermischen Tiefenstufe*  $dT:dh$  in Bohrlöchern, durch heiße Quellen und durch Lavaausbrüche in Vulkanen verrät, die wahrscheinlich auf den relativ schwachen Berührungsstellen der Krustenschollen sitzen. Wenn auch der Druck, unter dem diese Ausbrüche erfolgen, durch chemische Umsetzungen und Dampfbildung aus eingesickertem Wasser verstärkt erscheint, so kann er doch nur eine Schale von wenigen km Dicke durchbrechen, wie wir bald sehen werden.

Die geothermische Tiefenstufe nimmt im allgemeinen mit der Tiefe ab und ihre Änderung läßt sich, wenn man die Kehrwerte einer von K. Wegener\*) aufgestellten Tafel benutzt, durch die empirische Gleichung

$$\frac{dT}{dh} = 19.78 + 5.86h, \quad T - T_a = 19.78h + 2.93h^2 \dots \dots (9)$$

darstellen. Dies gibt

für $h$	= 0	1	5	10	15	19.33	20	38 km
$dT/dh$	= 19.72	25.64	49.08	78.4	101.7	113.3	137	223 °/km
$dh/dT$	= 50.5	39	20.4	12.75	9.9	8.93	7.3	4.48 m/°
$T - T_a$	= 0	20.7	174.1	491	795	1488	1567	5000°

Danach ist schon bei 38 km eine Temperatur erreicht, bei der alle uns bekannten Stoffe nur im Gaszustand bestehen können, woraus wir schon in den tieferen Teilen des Sima, d. h. unterhalb 30 km, einen allmählichen Übergang in den als gasförmig vorzustellenden Erdkern annehmen müssen. Die oberen Schichten des Simas im plastischen, d. h. zähflüssigen Zustande dürfen wir demgegenüber als volumbeständig (inkompressibel) betrachten, und zwar mit einer schon bisher allgemein angenommenen aber später noch zu begründenden Dichte von  $\delta_a = 3.45 \text{ g cm}^{-3}$ . Es heißt das nichts anderes, als daß sich im oberen Sima die Druckverdichtung und die Wärmeausdehnung praktisch ausgleicht, was versuchsmäßig allerdings nur für das den Massengesteinen analoge Gußeisen hinreichend genau nachgewiesen ist.

Für die *äußere Erdkruste* mit ihrer überaus wechselvollen Zusammensetzung bestimmen wir die mittleren Dichten aus dem Schwerezuwachs mit der Tiefe nach Gl. (1a), die unter der Annahme einer Außendichte mehrfach zur Bestimmung

\*) K. Wegener: Die Physik der Erde, S. 17. Leipzig, J. A. Barth, 1934.

der Mitteldichte der Erde aus  $\Delta g : g_a$  benutzt wurde und zu widersprechenden Ergebnissen führte. Gehen wir dagegen umgekehrt von dem durch Vergleich der Anziehung von Probekörpern und des Erdballs, also rein physikalisch sehr zuverlässig ermittelten Werten  $\delta_m = 5.52 \text{ g cm}^{-3}$  aus, so erhalten wir die Krustendichte in der Umgebung der Beobachtungsstelle von der Tiefe  $h$  aus dem Schwerezuwachs  $\Delta g : g_a$ . Hierzu stehen uns zwei zuverlässige Messungen von Airy (1854) in Durham (England) und von Sterneek (1883) in Pribram (Böhmen) zur Verfügung, aus denen mit (1a) sich

Airy	$h = 383 \text{ m}$	$\frac{\Delta g}{g_a} = 52 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\delta}{\delta_m} = 0.378$	$\delta_a = 2.09 \text{ g cm}^{-3}$
v. Sterneek	$972 \text{ m}$	$88 \cdot 10^{-6}$	$0.475$	$2.61 \text{ g cm}^{-3}$

ergibt. Dazu ist zu bemerken, daß der Ausgangspunkt der ersten Messung auf der vom Meere umgebenen Insel England sich nahezu in Meereshöhe, im zweiten Falle dagegen mitten im Festland Europas, 509 m über dem Meeresspiegel, sich

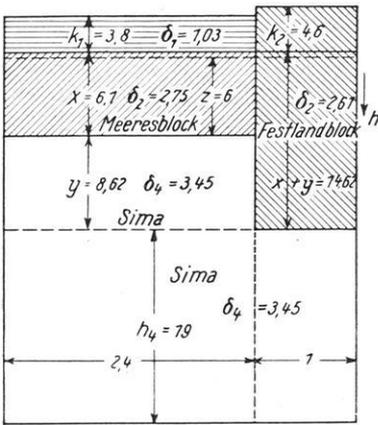


Fig. 1. Schichtendicken der Erdhülle

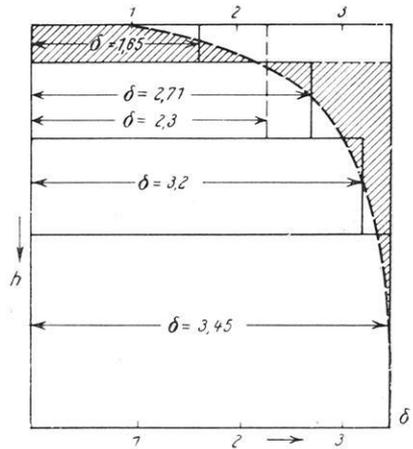


Fig. 2. Dichteänderung der Erdhülle

befand. Wir werden darum den ersten Wert  $\delta_a = 2.09$  als mittlere Krustendichte der vom Meere bedeckten Erdhülle, den zweiten  $\delta_2 = 2.61$  für die gesamte Festlandsmasse benutzen, während die Wasserdichte  $\delta_1 = 1.03 \text{ g cm}^{-3}$  und die des Simas  $\delta_4 = 3.45 \text{ g cm}^{-3}$  beträgt. Ferner sei in Fig. 1  $h_1 = 3.8 \text{ km}$  die mittlere Ozeantiefe,  $h_2 = 3.8 + 0.8 = 4.6 \text{ km}$  die mittlere Höhe des Festlandes über dem Meeresboden,  $x$  die Dicke der Gesteinsschicht von der Dichte  $\delta_3 = 2.75 \text{ g cm}^{-3}$  unter dem Meere,  $x + y$  die Dicke der Festlandsschicht unter dem Meere und  $z$  die Eintauchtiefe der ersteren in das Sima. Dann haben wir an Hand der Fig. 1 als hydrostatische Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 h_1 + \delta_3 x &= \delta_0 (x + h_1) = \delta_4 z \\ \delta_3 (h_2 + x + y) &= \delta_4 (y + z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

also

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_0} h_1 = 6,1; & z &= \frac{\delta_0 \delta_3 - \delta_1}{\delta_4 \delta_3 - \delta_0} h_1 = 6 \text{ km} \\ y &= \frac{\delta_2 - \delta_0}{\delta_4 - \delta_2} \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_0} h_1 + \frac{\delta_2 h_2 - \delta_1 h_1}{\delta_4 - \delta_2} = 8,62 \text{ km} \end{aligned} \right\} \dots (10a)$$

Daraus ergibt sich die *Tiefe des Ozeanblocks unter dem Meeresspiegel* zu

$$h_1 + x = 3.8 + 6.1 = 9.9 \text{ km}$$

und die Dicke des Festlandblocks  $h_2 + x + y = 19.3 \text{ km}$ , seine *Tiefe unter dem Meeresspiegel*

$$h_1 + x + y = 18.52 \text{ km.}$$

Die Längen  $z = 6 \text{ km}$  bzw.  $z + y = 14.62 \text{ km}$  bestimmen die *Eintauchtiefen der beiden Blöcke in das Sima*, dessen *ideelle Oberfläche* hiernach nur  $x - z = 0.1 \text{ km}$  unter dem ausgeglichenen Meeresboden bzw.  $3.9 \text{ km}$  unter dem mittleren Meeresspiegel liegt. Die dadurch bestimmte Außenschicht der *ganzen* Erdrinde von der mittleren Dicke  $4.1 \text{ km}$  hat eine mittlere Dichte von  $1.82$ , während die mittlere Dichte der Schicht über dem Meeresboden  $1.65$ , und über dem Boden des Meeresblockes  $x + h = 9.9 \text{ km}$  Dicke rund  $2.3$  beträgt. Der untere Teil dieser Schicht von der Dicke  $x$ , bezogen auf die ganze Oberfläche, hat die Dichte  $2.71$  und die letzte von der Dicke  $y$  bis zur Eintauchtiefe des Festlandblocks die Dichte  $3.2$ , während die mittlere Gesamtdichte der gesamten Oberflächenschicht bis zur Festlandtiefe, d. h. von der Dicke  $h_1 + x + y = 18.52 \text{ km}$ , rund  $2.72 \text{ gm}^{-3}$  beträgt.

Vereinigen wir diese Werte mit den zugehörigen mittleren Tiefen, so erhalten wir in Fig. 2 einen Dichteverlauf in der Erdrinde, der an der Oberfläche, bei rund  $1.03$  beginnend, tangential in die Simadichte  $3.45$  bei  $38 \text{ km}$  Tiefe übergeht. Dieser Verlauf legt es nahe, die ganze Erdrinde durch einen Block mit der Simadichte bis zu dessen ideeller Oberfläche unter Ausgleich der schraffierten Flächen des Diagramms zu ersetzen. Der darüber herausragende Teil von der Dicke  $h = 4.1 \text{ km}$  und der Dichte  $\delta = 1.82 \text{ gm}^{-3}$  entspricht nach (6) Verhältnissen des Volumens der Masse und des Trägheitsmoments zur Gesamterde von

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{510}, \quad \frac{\Delta m}{m_0} = \frac{1}{1530}, \quad \frac{\Delta \Theta}{\Theta_0} = \frac{1}{760}.$$

Diese Bruchteile liegen aber innerhalb der Fehlergrenzen der Gesamterde, so daß *der Ersatz der ganzen Erdkruste von der konstanten Dichte 3.45 von ihrer ideellen Oberfläche bis 38 km Tiefe* für die weitere Untersuchung gerechtfertigt erscheint. Das bedeutet aber nichts anderes als daß bei einem von da ab nach innen stehenden Dichteverlauf an der Oberfläche

$$\left( \frac{d\delta}{dr} \right)_{r=a} = \delta'_a = 0 \dots \dots \dots (11)$$

anzusetzen ist, womit für das Dichtegesetz selbst eine vierte Bedingung gegeben ist.

Die aus den vorstehenden Berechnungen hervorgehende Krustendicke von rund 10 km unter dem Weltmeere und 19 km unter dem Festlande sind erheblich kleiner als die bisherigen Annahmen der Geophysik, erklären aber besser als diese den Zusammenhang der Vulkantätigkeit mit dem Sima und die Verteilung der Vulkane auf Inseln und in der Küstennähe.

3. Die Dichteverteilung im Erdinnern. Wir kehren nunmehr zu den Formeln des ersten Abschnittes zurück und geben ihnen durch Einführung der Verhältniszahlen

$$\frac{r}{a} = \xi, \quad \frac{\delta}{\delta_m} = \eta, \quad \frac{g}{g_a} = \zeta, \quad \frac{p}{g_a \delta_m a} = \varphi \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{d\delta}{dr} = \delta_m \frac{d\eta}{dr} = \frac{\delta_m}{a} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\delta_m}{a} \eta'; \quad \frac{dg}{dr} = \frac{g_a}{a} \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{g_a}{a} \zeta' \dots \dots (12a)$$

die dimensionslose Form

$$\zeta = \frac{3}{\xi^2} \int_0^{\xi} \eta \xi^2 d\xi = \frac{1}{\xi^2} \int_0^{\xi} \eta d\xi^3 \dots \dots \dots (1b)$$

$$1 = 3 \int_0^1 \eta \xi^2 d\xi = \int_0^1 \eta d\xi^3 \dots \dots \dots (2a)$$

$$\alpha^2 = 2 \int_0^1 \eta \xi^4 d\xi = \int_0^1 \eta d\xi^5 \dots \dots \dots (3a)$$

$$\varphi = \int_{\xi}^1 \zeta \eta d\xi, \quad \varphi_0 = \int_0^1 \zeta \eta d\xi, \quad \varphi_0 - \varphi = \int_0^{\xi} \zeta \eta d\xi \dots \dots (5b)$$

Dazu kommen noch die Bedingungen für den Mittelpunkt und die Oberfläche

$$\eta'_0 = 0, \quad \eta'_a = 0 \dots \dots \dots (11a)$$

von denen die letzte für eine plastisch volumbeständige Kugelhülle gilt. Die vorstehenden Gleichungen sind von den jeweiligen Abmessungen unabhängig und gelten daher für alle ebenso aufgebauten Kugeln. Insbesondere ist für eine *homogene Kugel* mit  $\delta = \delta_m$ , d. h.  $\eta = 1$ , die Gl. (2a) sowie (4a) und (11a) identisch erfüllt, während aus (3a)  $\alpha^2 = 2/5 = 0.4$  als oberer Grenzwert ergibt. Weiter folgt hierfür aus (1b)  $\zeta = \xi$ , d. h.  $g a = g_a r$ , also innerhalb der Kugel ein von der Mitte mit  $g = 0$  bis zur Oberfläche mit dem Radius wachsende Beschleunigung und außerdem aus (5b) mit

$$\eta = 1, \quad \zeta = \xi, \quad \varphi = 1 - \frac{\xi^2}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2},$$

d. h.

$$p_0 = \frac{1}{2} g_a \delta_m a = 1,725 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}$$

für die Erde.

Den Bedingungen (2a), (3a) und der ersten Formel (11 a) genügt mit  $\delta_a = \eta_a \delta_m$ ,  $\delta_0 = \eta_0 \delta_m$  der Ansatz von Lipschitz mit dem Exponenten  $\nu > 1$

$$\eta_0 - \eta = (\eta_0 - \eta_a) \xi^\nu \dots \dots \dots (13)$$

der mit (2a) und (3a) auf

$$1 = \eta_0 + \frac{3(\eta_0 - \eta_a)}{\nu + 3} \dots \dots \dots (2b)$$

$$\alpha^2 = \frac{2}{3} \eta_0 - \frac{2(\eta_0 - \eta_a)}{\nu + 5} \dots \dots \dots (3b)$$

führt, und mit  $\alpha^2 = \frac{1}{3}$  für die Erde

$$\eta_0 = \frac{5}{4} \frac{\nu + 1}{\nu}, \quad \eta_0 - \eta_a = \frac{(\nu + 3)(\nu + 5)}{12\nu} \dots \dots \dots (13a)$$

und für die Oberfläche im Gegensatz zur zweiten Gl. (11 a)

$$\eta'_a = \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)_1 = -(\eta_0 - \eta_a) \nu = -\frac{(\nu + 3)(\nu + 5)}{12} < 0 \dots (14)$$

ergibt. Weiter erhalten wir aus (1a) für das *Beschleunigungsverhältnis*

$$\zeta = \eta_0 \xi - \frac{3(\eta_0 - \eta_a)}{\nu + 3} \cdot \xi^{\nu+1}; \quad \zeta' = \eta_0 - \frac{3(\nu + 1)(\eta_0 - \eta_a)}{\nu + 3} \cdot \xi^\nu \dots \dots (15)$$

und mit einem Höchstwert  $\zeta_1$  mit  $\xi' = 0$  für

$$\xi'_1 = \frac{(\nu + 3) \eta_0}{3(\nu + 1)(\eta_0 - \eta_a)} = \frac{5}{\nu + 5} \dots \dots \dots (15a)$$

und schließlich für das *Druckverhältnis* nach (5b)

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} \left[ \eta_0^2 \xi^2 - \frac{(\eta_0 - \eta_a) \eta_0 2(\nu + 6)}{(\nu + 2)(\nu + 3)} \cdot \xi^{\nu+2} + \frac{3(\eta_0 - \eta_a)^2}{(\nu + 1)(\nu + 3)} \cdot \xi^{2\nu+2} \right] (16)$$

mit

$$2 \varphi_0 = \eta_0^2 - \frac{2(\nu + 6)(\eta_0 - \eta_a) \eta_0}{(\nu + 2)(\nu + 3)} + \frac{3(\eta_0 - \eta_a)^2}{(\nu + 1)(\nu + 3)} \dots \dots (16a)$$

Setzen wir hierin mit der naheliegenden Annäherung für die Erde  $\eta_a = \frac{\delta_a}{\delta_m} = \frac{2.76}{5.52} = \frac{1}{2}$ , so ergibt sich aus (13)  $\eta_a = \frac{\delta_a}{\delta_m} = \frac{5}{2}$ , d. h.  $\delta_0 = 13.8 \text{ g cm}^{-3}$  und  $\nu = 1$ , also eine *lineare Dichteänderung* längs des Radius, die aber mit der ersten Bedingung (11 a) unverträglich ist und mit (14)  $\eta'_a = \frac{a}{\delta_m} \left( \frac{d\delta}{dr} \right)_a = -2, \frac{\delta'_a}{\delta_a} = -0.63 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$  ergeben würde. Ferner tritt hier der Höchstwert der Beschleunigung;  $\zeta_1 = g_1 : g_a = 25/24$  für  $\zeta_1 = r_1 : a = 5/6$  ein, während der Mittelpunktsdruck aus  $2 \varphi_a = 1.916$  sich zu  $p_0 = 3.3 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}$  ergibt.

Demgegenüber liefert der von Geologen und Geophysikern bevorzugte Ansatz von Roche

$$\eta_0 - \eta_l = (\eta_0 - \eta_a) \xi^2 \tag{17}$$

mit den obigen Formeln und  $\nu = 2$

$$\eta_0 = \frac{15}{2}, \quad \delta_0 = \frac{15}{8} \delta_m = 10.35 \text{ g cm}^{-3}, \quad \eta_a = \frac{5}{12}, \quad \delta_a = 2.3 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\xi_1 = \frac{r_1}{a} = \sqrt{\frac{5}{7}} = 0.245, \quad g_1 = 1.172 g_a, \quad 2 \varphi_0 = 1.753, \quad p_0 = 3.02 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-3}$$

$$\eta'_a = -2(\eta_0 - \eta_a) = -\frac{35}{12} \sim -3, \quad \frac{\delta'_a}{\delta_a} = \frac{\eta'_a}{a \eta_a} = -1.1 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

Wenn auch die aus dem Rocheschen Ansatz folgende Außendichte genau mit der im letzten Abschnitt ermittelten Dichte der Außenschicht von der Dicke 9.9 km übereinstimmt, so trifft dies doch, wie ein Blick auf Fig. 2 zeigt, in keiner Weise auf das zugehörige Dichtegefälle zu.

Um zu einer willkürfreien Dichteverteilung zu gelangen, setzen wir mit Helmert eine gerade Potenzreihe an, deren Festwerte der Zahl der Bedingungs-gleichung entspricht, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 - \eta &= \beta_1 \xi^2 + \beta_2 \xi^4 \\ - \eta' &= 2\beta_1 \xi + 4\beta_2 \xi^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \tag{18}$$

Die rechten Seiten dieser Ausdrücke verschwinden bedingungsgemäß für den Mittelpunkt  $\xi = 0$  und liefern für die Oberfläche  $\xi = 1$  und  $\eta'_a = 0$ , Gl. (11 a)  $\eta_0 - \eta_a = \beta_1 + \beta_2$ ,  $2\beta_1 + 4\beta_2 = 0$ , also

$$\beta_1 = 2(\eta_0 - \eta_a), \quad \beta_2 = -(\eta_0 - \eta_a) \dots \dots \dots \tag{18a}$$

so daß die gesuchte Druckverteilung

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 - \eta &= (\eta_0 - \eta_a) (2\xi^2 - \xi^4) \\ - \eta' &= 4(\eta_0 - \eta_a) (\xi - \xi^3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \tag{19}$$

einen Wendepunkt  $\eta'' = 0$  für  $\xi_2^2 = \frac{1}{2}$ , also  $\xi_2 = \frac{r_2}{a} = 0.578$  mit  $\eta_2 = 1.35$  besitzt. Eingesetzt in (2a) und (3a) ergibt dies

$$1 = \eta_0 - \frac{27}{35}(\eta_0 - \eta_a) \dots \dots \dots \tag{2c}$$

$$\alpha^2 = \frac{2}{5} \eta_0 - \frac{22}{63}(\eta_0 - \eta_a) \dots \dots \dots \tag{3c}$$

oder mit

$$\alpha^2 = \frac{1}{3}, \quad \eta_0 = \frac{\delta_0}{\delta_m} = \frac{145}{64} = 2.27, \quad \eta_a = \frac{\delta_a}{\delta_m} = \frac{5}{8} = 0.625, \quad \eta_{1/2} = 0.155,$$

also mit

$$\delta_m = 5.52, \quad \delta_0 = 12.52, \quad \delta_{1/2} = 9.56, \quad \delta_a = 3.45 \text{ g cm}^{-1}.$$

Den letzten Wert von  $\delta_a$ , der schon längst von der Geophysik für die Simaschicht angenommen ist, haben wir bereits im Abschnitt über den Bau der Erdrinde benutzt. Er findet also durch unseren Ansatz mit der Bedingung der Volumenbeständigkeit des Simas hier die erwünschte Bestätigung. Weiter erhalten wir aus (1b)

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{g}{g_a} = \eta_0 \xi - (\eta_0 - \eta_a) \left( \frac{6}{5} \xi^3 - \frac{3}{7} \xi^5 \right) \\ \zeta' &= \eta_0 - (\eta_0 - \eta_a) \left( \frac{18}{5} \xi^2 - \frac{15}{7} \xi^4 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1c)$$

und für  $\zeta' = 0$  die quadratische Gl. mit nur einer gültigen Wurzel

$$\frac{24}{21} = \frac{18}{5} \xi^2 - \xi^4; \quad \xi^2 = 0.24 - 0.25 = 0.59.$$

Daraus folgt aber für den Höchstwert von  $\zeta$  bzw.  $g$  die Lage  $\xi_1^2 = \frac{r_1^2}{a^2} = 0.59$ , oder  $r_1 = 0.77 a$  mit dem Betrage  $g_1 = 1.04 g$ . Die Kurve  $\zeta$  hat übrigens für  $\zeta' = 0$  einen Wendepunkt bei  $\xi^2 = 21/25$  oder  $\xi_2 = \frac{r_2}{a} = 0.916$ , also zwischen dem Höchstwert und der Oberfläche. Schließlich folgt für die *Druckänderung* im Erdinnern (5b)

$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi &= \frac{\eta_0^2 \xi^2}{2} - (\eta_0 - \eta_a) \eta_0 \left( \frac{4}{5} \xi^4 - \frac{5}{21} \xi^6 \right) + (\eta_0 - \eta_a)^2 \left( \frac{2}{5} \xi^6 - \frac{9}{35} \xi^8 + \frac{3}{70} \xi^{10} \right) \\ \varphi_0 &= \frac{\eta_0^2}{2} - \frac{59}{105} (\eta_0 - \eta_a) \eta_0 + \frac{13}{70} (\eta_0 - \eta_a)^2 \dots \dots \dots (5c) \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der obigen Werte für  $\eta_0, \eta_a$  der Mittelpunktsdruck und der für  $\xi = \frac{1}{2}$ .

$$2 \varphi_0 = 1.947,$$

$$\text{also } p_0 = 3.355 \cdot 10^6 \text{ kg cm}^{-2}$$

$$2 \varphi_{1/2} = 0.505,$$

$$\text{also } p_{1/2} = 8.611 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Der durch (5c) gegebene Druckverlauf  $\eta: \varphi_0 - p:p_0$  ist mit dem der Dichte  $\eta: \eta_0 = \delta: \delta_0$  nach (2c) und der Erdbeschleunigung  $g/g_0 = \zeta$  nach (1c) in der Fig. 3 vereinigt aufgetragen, und dürfte, da alle diese Formeln keine Materialkonstanten enthalten, für alle oberflächlich erstarrten Weltkörper, also im Sonnensystem für die inneren Planeten und

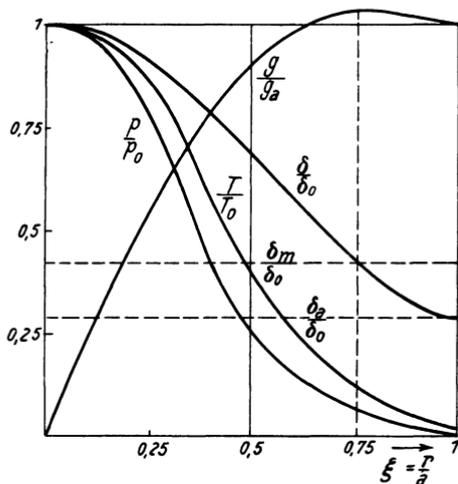


Fig. 3. Radiale Änderung der Dichte, des Druckes, der Temperatur und der Beschleunigung im Erdinnern

die großen Monde, zutreffen. Insbesondere für den Erdmond hätte man mit  $\delta_m = 3.33 \text{ g cm}^{-3}$  eine Außendichte von  $\delta_a = 5/8 \delta_m = 2.08$ , also die des Sandes zu erwarten, was mit dem Albedo des Mondes übereinstimmt.

Dürfen wir den Erdkern als gasförmig nach der Gl.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \frac{T}{T_0} \dots \dots \dots (20)$$

auffassen, so erhalten wir mit  $p = 12000 \text{ kg cm}^{-2}$ ,  $\delta = 3.45 \text{ g cm}^{-3}$   $T = 5000^0$  unter der Simaschicht für

$$r = 0.5 a, \quad \delta_{\frac{1}{2}} = 9.56 \text{ g cm}^{-2}, \quad T_{\frac{1}{2}} = 145500^0$$

$$r = 0 \quad \delta_0 = 12.52 \text{ g cm}^{-2}, \quad T_0 = 382200^0$$

mit einem in Fig. 3 ebenfalls eingetragenen, etwas über der Druckkurve liegenden Verlauf, der aber keiner einheitlichen Polytrope wie in Gaskugeln entspricht. Damit erledigen sich die in einer früheren Abhandlung\*) über den Erdball angestellten Rechnungen, in denen unberechtigterweise der Druck aus einer Polytrope und das Trägheitsmoment aus der Äquatorneigung gegen die Ekliptik bestimmt wurde.

## Ein neuer statischer Schweremesser zur Messung und Registrierung lokaler und zeitlicher Schwereänderungen

Von **A. Graf**, Berlin (Askania-Werke). — (Mit 13 Abbildungen)

Es wird ein neues Gravimeter beschrieben, welches, ohne daß irgendwelche Änderungen vorgenommen werden müssen, sowohl lokale wie zeitliche Schwereänderungen zu messen und zu registrieren gestattet. Das Meßprinzip beruht auf der elektrischen Bestimmung der Verlängerung einer Vertikalschraubenfeder bei einer Schwereänderung. Masse und Feder hängen frei und es werden keinerlei Gelenke benötigt (etwa Schneiden, Federgelenke, Fäden usw.); das System arbeitet daher völlig reibungsfrei und gewährt damit eine sehr hohe Einstellsicherheit. Astasierung ist nicht vorhanden, die Schwingungszeit ist daher klein (etwa 1 sec); somit entfällt die lästige Abhängigkeit des Skalenwertes von der Einstellung. Der Eichwert ist innerhalb weiter Grenzen (über 1500 mgl) konstant, die Meßskala also linear. Die Eichung ist lediglich bestimmt durch das Verhältnis von Masse + halbem Federgewicht zum Eichgewicht. Die Genauigkeit des Skalenwertes ist also in erster Linie abhängig von der Genauigkeit, mit der das Eichgewicht bestimmt werden kann. Da das Gravimeter luftdicht abgeschlossen ist, so bleiben Luftdruckschwankungen ohne Einfluß auf die Messung. Die Neigungsempfindlichkeit ist sehr gering und beträgt bei günstigster (Minimum-) Justierung für beide horizontale Richtungen bei einer Neigung um 90'' weniger als 0,1 mgl. Die Ablesung der Schwereänderung erfolgt an einem Lichtmarkengerät (ohne Verstärker) oder an einer Meßtrommel. Die Empfindlichkeit kann in weiten Grenzen

\*) H. Lorenz: Die Äquatorneigungen der Sonne und Planeten, Astr. Nachr. **261**, Nr. 6263 (1937). Für die Kritik an meinen Ausführungen bin ich außer Herrn Dr. Küssner in Göttingen und Herrn Prof. Dr. A. Prey (Wien), Astr. Nach. **264**, Nr. 6316 (1937), verpflichtet.