

## Werk

**Jahr:** 1938

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:14

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0014

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0014](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0014)

**LOG Id:** LOG\_0035

**LOG Titel:** Das Verhalten noch freistehender Brückenpfeiler bei Schwingungen und deren Abhängigkeit vom Untergrund

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Das Verhalten noch freistehender Brückenpfeiler bei Schwingungen und deren Abhängigkeit vom Untergrund

Von O. Förtsch, Göttingen. — (Mit 6 Abbildungen)

Es wurden die noch freistehenden Pfeiler der Reichsautobahnbrücke über die Werra zu freien und erzwungenen Biegeschwingungen angeregt. Aus der Eigenperiode und den Dimensionen wurde der Elastizitätsmodul ermittelt. Desgleichen wurde er bei den erzwungenen Schwingungen aus dem Resonanzausschlag und der Dämpfung der Pfeilerschwingung errechnet. Daraus konnten Rückschlüsse gezogen werden auf die Gründung der Pfeiler und ihr Verhalten bei Wind und Erschütterungen. Im zweiten Teil der Arbeit wurden an geklemmten Stäben die bei den Pfeilern benutzten Methoden zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls nachgeprüft. Hierbei wurde der Einfluß der Klemmung näher untersucht.

Die Teilstrecke Göttingen—Kassel der Reichsautobahn trifft 2 km unterhalb Hedemünden auf das Werratal. Zur Überquerung desselben war der Bau einer Brücke nötig. Diese verbindet mit einer Länge von 400 m und einer Höhe von 60 m die beiden Hänge des Tales miteinander. Getragen wird sie von vier Pfeilern, die in 100 m Abstand voneinander stehen. Über die Größe und Gestalt der ersten beiden Pfeiler der Brücke gibt Fig. 1 Auskunft. Sie sind aus Hochofenzement, Kies, Basalt, Steinschlag und Sand gebaut. Außen sind sie mit einer 40 cm starken Sandsteinmauer verblendet. Zwei nebeneinanderliegende 12 m hohe Stahlkonstruktionen von 10 m Breite verbinden die Pfeiler oben miteinander. Auf jeder Konstruktion liegt eine Fahrbahn.

Vor dem Bau der Brücke wurde der Untergrund des Baugeländes gemeinsam von der Deutschen Gesellschaft für Bodenmechanik, Berlin, und vom Geophysikalischen Institut, Göttingen, untersucht. Dem Boden wurden mit einer Schwingmaschine elastische Schwingungen bis zur Frequenz 40/sec aufgeprägt. Dabei wurde die  $\alpha$ -Zahl des Bodens, d. h. die Frequenz, bei der die Amplitude der Schwingung unter der Maschine am größten ist, bestimmt und die durch die Schwingung verursachte Setzung des Untergrundes gemessen. Mit Hilfe von Seismographen

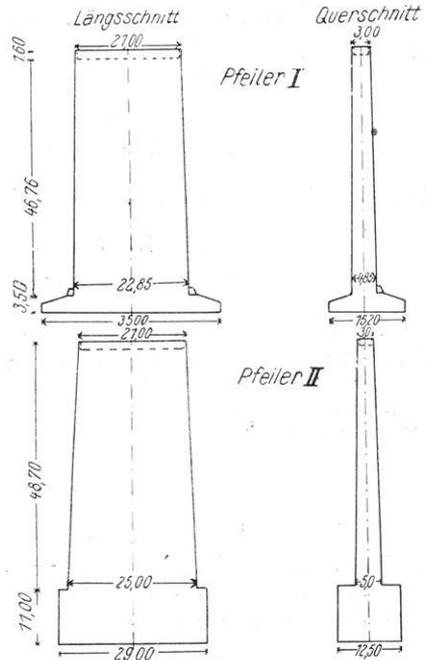


Fig. 1. Ausmaße der Pfeiler I (oben) und II (unten) der Werrabrücke

konnte man die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Phase) der elastischen Wellen von der Maschine fort beobachten. Weiterhin wurden im Boden durch Sprengungen Kompressionswellen erzeugt und deren Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt.

Geologisch gehört das Baugelände zur Buntsandsteinformation. An den Hängen tritt der Sandsteinfelsen zutage. In der Talsohle liegt er in 8 bis 9 m Tiefe. Darüber sind Schuttmassen der Werra gelagert. Es sind in der Hauptsache Lehm und Letten mit Sandstein vermischt, Sand, Ton, Kies, Geröll und Schlamm. Von den an den Hängen frei liegenden Felsen sind die obersten 2 bis 3 m verwittert und haben dadurch an Festigkeit verloren. Die Untersuchungen mit der Schwingmaschine auf verwittertem Gestein an der Stelle, wo heute der Pfeiler I steht, ergaben die  $\alpha$ -Zahl 32/sec und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der von der Maschine erregten Wellen  $v = 450$  bis  $600$  m/sec. Der unverwitterte Sandstein zwischen Pfeiler III und IV besaß dagegen die Geschwindigkeit  $v = 1100$  m/sec. Die Kompressionswelle der Sprengungen pflanzte sich in ihm mit  $1950$  m/sec fort. In einer Tiefe von 20 m erreichte sie die Geschwindigkeit  $v = 3500$  m/sec. Legt man für die Dichte des Buntsandsteins den Wert  $\rho = 2.38$  g/cm<sup>3</sup> zugrunde, so berechnen sich aus den Beobachtungsergebnissen die Elastizitätskonstanten:

$$\begin{aligned} \text{Poissonmodul} & \dots\dots\dots m = 3.78 \\ \text{Schubmodul} & \dots\dots\dots G = 29000 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Elastizitätsmodul} & \dots\dots E = 115000 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Für die zulässige Druckbelastung ergibt sich daraus für

$$\begin{aligned} \text{unverwitterten Sandstein} & \dots\dots 6-8 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{verwitterten Sandstein} & \dots\dots 4.5 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Die Messungen auf den abgelagerten Schuttmassen im Tale lieferten die in Tabelle 1 zusammengestellten Werte für die  $\alpha$ -Zahl des Bodens und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen. Daraus wurde nach einem empirisch bestimmten Zusammenhang die zulässige Bodenbelastung ermittelt.

Tabelle 1

Bodenart	Eigen- schwingungszahl	Ausbreitungs- geschwindigkeit	Zulässige Bodenpressung
Mehlsand (Werratal) . . . .	18.5—29.3/sec	100—110 m/sec	1 kg/cm <sup>2</sup>
Kies (Pfeiler II) . . . . .		270 m/sec	4.0 kg/cm <sup>2</sup>
Kies (Pfeiler III) . . . . .		180 m/sec	2.5 kg/cm <sup>2</sup>

Tabelle 2 enthält die von der Baukommission vorausberechneten Werte für die Belastung des Bodens durch die Brücke. Daraus ersieht man, daß die Pfeiler nicht auf die obersten Schichten gegründet werden konnten. Beim Pfeiler I mußten wenigstens diese abgeräumt werden, bis man auf unverwittertes Gestein kam. Die Schuttmassen im Tale besitzen bei weitem nicht die Tragfähig-

keit, wie sie für die Brücke nötig ist. Die Fundamente der Pfeiler der Talsohle müssen mindestens 9 m tief reichen.

Tabelle 2

	Tatsächliche statische Druckbelastung	Tatsächliche Druckbelastung + zusätzliche Druckbelastung durch Wind, Verkehr usw.
Pfeiler I . . . . .	6.34 kg/cm <sup>2</sup>	8.04 kg/cm <sup>2</sup>
Pfeiler II . . . . .	5.44 kg/cm <sup>2</sup>	7.06 kg/cm <sup>2</sup>
Pfeiler III . . . . .	5.35 kg/cm <sup>2</sup>	7.16 kg/cm <sup>2</sup>

Neben der bis jetzt besprochenen vertikalen Druckbelastung von Pfeiler und Untergrund, die statisch wirkt, tritt noch eine dynamische Beanspruchung der Pfeiler in horizontaler Richtung auf. Sie wird durch Kräfte verursacht, die nach Größe und Richtung veränderlich sind und die die Pfeiler zu Schwingungen anregen. Solche treten bei Erschütterungen und periodischen elastischen Schwingungen des Untergrundes, wie Verkehrserschütterungen auf Straßen unter der Brücke, Erdbeben, Sprengungen usw. auf. Neben diesen gibt es noch Kräfte, die an den Pfeilern oben angreifen. Dies sind vor allem Winddruck und Erschütterungen der Brücke durch darüberfahrende schwere Lastwagen. Um einen Einblick über das Verhalten der Pfeiler solchen horizontal wirkenden Kräften gegenüber zu erhalten, wurden auf Pfeiler I und II zunächst Messungen gemacht, als sie noch frei für sich standen. Hierüber soll berichtet werden.

### I. Freie und erzwungene Schwingungen der Brückenpfeiler

**1. Messungen.** a) *Auf Pfeiler I.* Der Zweck dieser Messung sollte die Beobachtung der Querschwingungen des freistehenden Pfeilers bei Anregung durch bekannte Kräfte sein. Zur Aufzeichnung der Amplituden der Schwingungen dienten zwei langperiodige Horizontalseismographen. Die 10 kg schwere Masse dieser Apparate hängt an zwei dünnen Blattfedern. Durch Neigung der Grundplatte mittels der Fußschrauben läßt sich jede Eigenschwingungsdauer  $T_0 < 10$  sec einstellen. Die Dämpfung erfolgt durch eine einstellbare Luftdämpfung. Die Vergrößerung der Seismographen wurde durch Eichung auf dem Schütteltisch bestimmt. Bei der Aufstellung auf dem Pfeiler (Durchmesser der Achse, die den Registrierspiegel trägt, 6 mm, Lichtweg 1 m) war sie 800fach. Die Aufzeichnung der Schwingungen erfolgte photographisch. Der Registrierapparat stand in 1 m Entfernung vom Seismographen. Die Geschwindigkeit des Filmtransportes war 5 cm/sec. Als Zeitmaßstab wurden die Sekundenkontakte einer Uhr mitregistriert. Die Seismographen waren so aufgestellt, daß die Schwingungsebene des einen quer zur, die des anderen in Richtung der Längsseite des Pfeilers lag. Die Eigenschwingungsdauer der Apparate war dabei auf  $T_0 = 4$  sec eingestellt.

Die Anregung des Pfeilers zu Biegeschwingungen geschah durch zwei Personen. Sie bewegten sich rhythmisch im Takte der Eigenschwingungsdauer des Pfeilers hin und her. Dadurch wurde er zu Schwingungen großer Amplitude aufgeschaukelt.

Der Lichtzeiger ging weit über den Film hinweg. Als die Personen stillstanden, klang die Schwingung gedämpft aus. Ferner wurde der Pfeiler noch durch einen auslaufenden Exzenter angeregt. Als Exzenter diente ein Rad eines Fahrrades, auf dessen Felge ein Gewicht von 2.8 kg geschraubt wurde. Die Achse des Rades war starr mit dem Pfeiler verbunden. Das Rad wurde mit der Hand rasch angedreht und die Bewegung des Pfeilers beim Auslaufen aufgezeichnet. Die anfängliche Umdrehungszahl war 1.5/sec.

b) *Auf Pfeiler II.* Bei Pfeiler II wurde sowohl oben auf demselben wie an dessen Fuß gemessen. An beiden Stationen wurde je ein langperiodiger ( $T_0 = 5$  sec) und ein kurzperiodiger ( $T_0 = 0.2$  sec) Seismograph aufgestellt. Die Schwingungsebene sämtlicher Apparate lag quer zur Längsseite des Pfeilers. Sonst war der Aufbau der Stationen derselbe wie bei den Messungen auf Pfeiler I.

Durch rhythmisches Bewegen einer Person in der Eigenschwingungsdauer des Pfeilers wurde dieser zu Querschwingungen angeregt. Während der Arbeitszeit am Tage lief auf dem Baugelände eine Maschine mit der Umdrehungsgeschwindigkeit von vier Umläufen pro Sekunde. Sie erzeugte im Boden sinusförmige elastische Wellen. An beiden Beobachtungsstationen wurde die Schwingung von 4/sec aufgezeichnet. Auf dem Pfeiler war die Amplitude etwa doppelt so groß wie an dessen Fuße. Man kann jedoch nicht sagen, daß der Pfeiler eine Bodenschwingung von 4/sec oben mit der Vergrößerung 2 mitmacht. Die Bodenstation stand nicht wie der Pfeiler auf Fels, sondern auf angeschüttetem Boden. Durch die Maschinenschwingung wurde die Eigenperiode des Pfeilers angeregt. In der Aufzeichnung des langperiodigen Seismographen war sie der ersteren überlagert.

**2. Auswertung der Messungen.** a) *Pfeiler I.* α) Elastizitätsmodul aus der Eigenfrequenz. Aus der Registrierung beim Aufschaukeln des Pfeilers durch zwei Personen und Ausschwingen desselben ergibt sich dessen Eigenfrequenz als Mittel aus vielen Werten zu  $\nu_0 = 1.03 \text{ sec}^{-1} \pm 0.02 \text{ sec}^{-1}$ . Der mittlere Fehler dieses Wertes liegt innerhalb der Auswertgenauigkeit des Films. Bei Anregung des Pfeilers mittels des auslaufenden Exzenters ist die Frequenz im Resonanzfalle zu  $\nu_0 = 1.01 \text{ sec}^{-1}$  gemessen. Als Eigenfrequenz des Pfeilers I ist somit

$$\nu_0 = 1.02 \text{ sec}^{-1} \pm 0.02$$

anzunehmen.

Beim Ausschwingen des Pfeilers sank die Maximalamplitude pro Schwingung im Mittel auf den 1.085. Teil ab. Daraus berechnet sich die Dämpfung (Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maximalamplituden nach verschiedenen Seiten) zu  $\epsilon = 1.042 : 1$ .

Die Pfeiler sind im Fundament fest mit der Unterlage verbunden. Man kann sie als einseitig eingeklemmte Stäbe ansehen. Die Grundfrequenz der Querschwingung eines solchen Stabes von gleichbleibendem Querschnitt ist [1]

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\beta_0^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

Dabei ist  $\beta_0 = 1.875$ ,  $l$  = Länge des Stabes,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $\rho$  = Dichte des Stabmaterials,  $F$  = Querschnitt und  $J$  = äquatoriales Trägheitsmoment des Stabes.  $J$  ist definiert durch

$$J = \iint_F r^2 df.$$

$r$  bedeutet hierbei den senkrechten Abstand eines Flächenelements des Stabquerschnittes von der Achse, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und senkrecht zur Schwingungsebene des Pfeilers liegt. Für den rechteckigen Querschnitt ist, wenn  $a$  = Dicke und  $b$  = Breite des Stabes ist,

$$J = \int_0^b 2 \int_0^{a/2} r^2 dr db = 2b \frac{(a/2)^3}{3} = \frac{a^3 b}{12}.$$

Es ist demnach:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\beta_0^3}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{a^3 b}{12 \cdot a b}},$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta_0^3}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Der Ableitung dieser Formel liegt die einfache Balkentheorie zugrunde. Unberücksichtigt blieben dabei die Schubkraft und das Rotationsträgheitsmoment, die bei der Biegung auftreten. Die Größe des Einflusses dieser beiden auf die Schwingungsdauer hat Timoshenko [2] berechnet. In seiner Bezeichnungweise ist die Eigenkreisfrequenz eines Stabes

$$p = 2\pi \nu_0 = \frac{\alpha^2 \beta_0^3}{l^2}.$$

Bei Berücksichtigung von Schubkraft und Rotationsträgheitsmoment geht die Formel über in

$$p = \frac{\alpha^2 \beta_0^3}{l^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta_0^3 r^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right].$$

$G$  = Torsionsmodul,  $r^2 = \frac{J}{F}$ ,  $k'$  ist eine von der Form des Querschnittes abhängige

Konstante. Für den rechteckigen Querschnitt ist  $k' = 2/3$  und  $r^2 = \frac{a^2}{12}$ . Nimmt man an, daß  $E = 8/3 G$ , so ist

$$\frac{E}{k'G} = 4.$$

Die Korrektur der Schubkraft ist viermal so groß wie die des Rotationsträgheitsmoments.

Ist die Länge des Stabes  $l$  zehnmal so groß wie seine Dicke  $a$ , so ist

$$\frac{1}{2} \frac{\beta_0^3 r^2}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{\beta_0^3}{12} \frac{1}{100} = 1.46 \cdot 10^{-3}.$$

Das Korrektionsglied ist also  $5 \cdot 0.00146 = 0.0073$  oder  $0.73\%$ . Es ist kleiner als die Meßgenauigkeit und braucht nicht berücksichtigt zu werden.

Wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, verjüngen sich die Pfeiler von unten nach oben. Dadurch wird die Eigenfrequenz gegenüber einem unverjüngten Stab vergrößert. Durch die fehlende Masse am freien Ende wird das Trägheitsmoment verkleinert. Die Eigenfrequenz eines verjüngten Stabes berechnet sich aus der eines Stabes von demjenigen gleichbleibenden Querschnitt, der den Einspannbedingungen unterliegt, durch Multiplikation mit einem Faktor, in welchem die Verjüngung zum Ausdruck kommt. In der obigen Formel für  $\nu_0$  ändert sich beim verjüngten Stabe der Querschnitt und das äquatoriale Trägheitsmoment. Die Eigenfrequenz hängt von deren Abnahme von unten nach oben ab. Die Größe der Abnahme des Querschnitts wird dargestellt durch [1]

$$\xi = \frac{F_a - F_e}{F_a}$$

und die Abnahme des Trägheitsmomentes durch

$$\eta = \frac{J_a - J_e}{J_a}$$

und

$$\eta' = \frac{1}{J_a} \left( \frac{J_a + J_e}{2} - J_{\text{Mitte}} \right),$$

wobei sich der Index  $a$  auf die eingespannte Grundfläche und der Index  $e$  auf die freie Deckfläche des Pfeilers bezieht. Der Faktor, mit dem die für den Stab mit gleichbleibendem Querschnitt berechnete Eigenfrequenz multipliziert werden muß, ist

$$V = \sqrt{\frac{1 - \eta\sigma - \eta'\sigma'}{1 - \xi\tau}}.$$

$\sigma$ ,  $\sigma'$  und  $\tau$  sind Konstante. Ihr Wert ist:

$$\sigma = 0.193, \quad \sigma' = 0.493, \quad \tau = 0.807.$$

Die Formel für die Eigenfrequenz unserer Pfeiler lautet also

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\beta_0^2}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot V.$$

Darin sind alle Größen bekannt bis auf den Elastizitätsmodul  $E$  und die Dichte  $\rho$ . Da die Pfeiler vorwiegend aus Buntsandstein gebaut sind und die Dichte der anderen beigemischten Materialien nicht sehr von der des Sandsteins abweicht, kann man für  $\rho$  ohne Bedenken den Wert von Buntsandstein benutzen. Wie bereits erwähnt, ist dieser  $\rho = 2.38 \text{ g/cm}^3$ . Aus der obigen Beziehung läßt sich nun mit Hilfe der gemessenen Eigenfrequenz der Elastizitätsmodul der Pfeiler berechnen.

$$E = \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot l^4 \cdot \rho \cdot \nu_0^2}{a^2 \cdot \beta_0^4 \cdot V^2}.$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte für den Pfeiler I erhält man

$$E = 1.52 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2.$$

β) Elastizitätsmodul aus der Dämpfung. Bevor ich zur eigentlichen Berechnung des Elastizitätsmoduls des Pfeilers aus der Dämpfung komme, muß ich zunächst die Gleichung der elastischen Linie desselben ableiten. Das Koordinatensystem sei so gelegt, daß der Ursprung mit dem Mittelpunkt des eingespannten Querschnittes übereinstimmt. Die  $z$ -Achse zeige nach oben, die  $x$ -Achse liege parallel zur Schmal-, die  $y$ -Achse parallel zur Breitseite des Pfeilers. Nach dem Bernouillischen Theorem [3] lautet die Differentialgleichung für die elastische Linie:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = - \frac{M}{EJ},$$

$M$  = Biegemoment,  $E$  = Elastizitätsmodul und  $J$  = äquatoriales Trägheitsmoment. Die am freien Ende des Pfeilers angreifende Kraft  $P$  ruft ein Moment

$$M = -P(l - z)$$

hervor. Demnach ist

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{P(l - z)}{EJ}.$$

Infolge der Verjüngung ist  $J$  nicht konstant, sondern eine Funktion von  $z$ . Es ist für den rechteckigen Querschnitt mit den Seiten  $a$  und  $b$ , wenn die Schwingungsebene parallel zur Schmalseite  $a$  liegt,

$$J = (a^3 b) : 12.$$

Bezieht sich der Index  $a$  auf den eingespannten Querschnitt, so läßt sich schreiben:

$$\begin{array}{l} a = a_a (1 - hz/l) \\ b = b_a (1 - kz/l) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} h, k = \text{Konstanten.}$$

Für  $J$  ergibt sich damit die Beziehung

$$J = J_a (1 - hz/l)^3 (1 - kz/l).$$

Die Differentialgleichung für die elastische Linie lautet nun:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{P}{E J_a} \cdot \frac{l - z}{(1 - hz/l)^3 \cdot (1 - kz/l)}.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus die folgende Gleichung für die elastische Linie:

$$\begin{aligned} x = & \frac{P l^3}{E J_a h^2} \left[ - \frac{(1 - h) \cdot (hz/l)^2}{2(h - k)(1 - hz/l)} \right. \\ & - \frac{h(1 - k)}{(h - k)^2} (\ln(1 - hz/l) + hz/l) - \frac{hk(1 - k)}{(h - k)^3} ((1 - hz/l) \ln(1 - hz/l) \\ & \left. + hz/l) + \frac{h^2(1 - k)}{(h - k)^3} ((1 - kz/l) \ln(1 - kz/l) + kz/l) \right]. \end{aligned}$$

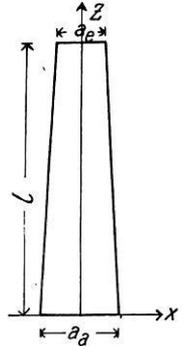


Fig. 2.  
Lage des Koordinatensystems im Pfeiler

Bei der Integration ist zu beachten, daß für  $z = 0$  sowohl  $dx/dz = 0$  wie  $x = 0$  sein muß. Daraus ergeben sich die beiden Integrationskonstanten.

Die Größen  $h$  und  $k$  berechnen sich, wenn sich der Index  $e$  auf den freien Querschnitt des Pfeilers ( $z = l$ ) bezieht, aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_e &= a_a (1 - h), \\ b_e &= b_a (1 - k) \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} h &= \frac{a_a - a_e}{a_a}, \\ k &= \frac{b_a - b_e}{b_a}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte aus der Fig. 1 ergibt sich

$$h = 0.382 \quad \text{und} \quad k = 0.081.$$

Die Gleichung für die Durchbiegung des freien Endes des Pfeilers I lautet nach Einführung der numerischen Werte von  $h$  und  $k$

$$f = \frac{P l^3}{3 E J_a} \cdot 1.78.$$

Ungefähr die gleiche Abbiegung würde durch die gleiche Kraft bei einem Stabe aus dem Material des Pfeilers auftreten, der den konstant bleibenden Querschnitt der Pfeilermitte besäße. Es ist nämlich

$$J_a/J_{\text{Mitte}} = 1.85.$$

In Fig. 5 ist der Verlauf der Amplitude und in Fig. 3 der Verlauf der Maximalamplitude bei einem Auslauf des Exzenters dargestellt. Der Versuch wurde mehrfach wiederholt. Die Maximalamplitude auf dem Film stieg auf 8 mm an. Der Fehler dieses Wertes ist  $\pm 0.1$  mm. 8.0 mm Ausschlag auf dem Film entsprechen einer Abbiegung des Pfeilers um  $10 \mu$ . Würde das Rad ständig mit der Eigenfrequenz des Pfeilers umlaufen, so bliebe die Maximalamplitude immer konstant. Die Energie, die durch die Eigendämpfung des Pfeilers bei der Schwingung verzehrt wird, wird ständig durch das Rad nachgeliefert. Würde dieses in der Resonanz plötzlich angehalten, so würde die Pfeilerschwingung gedämpft ausklingen. Die Abnahme der Maximalamplitude nach der ersten Periode beträgt, wenn der Resonanzausschlag mit  $h$  bezeichnet wird

$$f = h (1 - 1 : \varepsilon^2).$$

Für den Pfeiler I ist diese Abnahme

$$f = 10 (1 - 1 : 1.085) = 0.81 \mu.$$

Der Exzenter muß also den Pfeiler in der Resonanz pro Schwingung um den Betrag  $f$  abbiegen, damit die Maximalamplitude konstant bleibt.

Die Kraft, die nötig ist, um den als einen einseitig eingeklemmten Stab behandelten Pfeiler um den Betrag  $f$  abzubiegen, ist

$$P = \frac{3 f E J_a}{1,78 \cdot l^3},$$

$$P = \frac{f E a_a^2 b_a}{1,78 \cdot 4 l^3}.$$

Die Fliehkraft des Exzenters in der Resonanz des Pfeilers ist

$$Z = \omega_0^2 r m_e$$

und ebenso groß der Maximalwert ihrer wirksamen Komponente senkrecht zur Längsrichtung des Pfeilers.  $m_e$  bedeutet die exzentrische Masse,  $r$  ihr Abstand von der Drehachse.

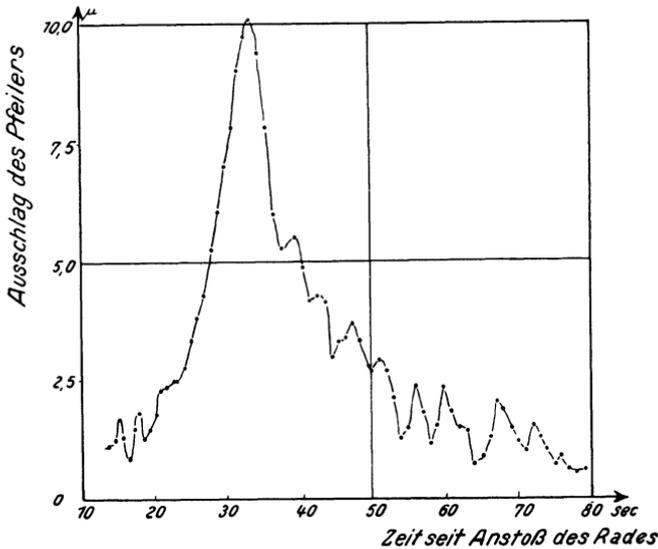
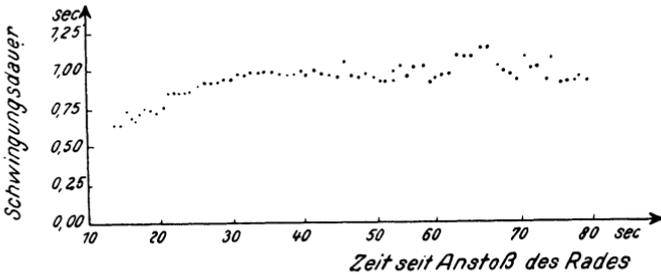


Fig. 3. Zeitlicher Verlauf der Schwingungsdauer und der Amplitude des Pfeilers I beim Auslauf des Exzenters. Als Abszisse ist die Zeit aufgetragen, die seit dem Anstoß des Exzenters verfließen ist

Genaue Untersuchungen über erzwungene Schwingungen bei Stäben und über die bestehenden Wechselwirkungen der auftretenden Kräfte sind noch nicht angestellt worden. Versuchsweise habe ich die Kraft  $P$ , die nötig ist, um den Pfeiler um den Betrag  $f$  abzubiegen, gleich der Fliehkraft des Exzenters  $Z$  gesetzt. Es ergibt sich daraus:

$$\omega_0^3 r m_e = \frac{E a_a^3 b_a f}{1.78 \cdot 4 \cdot l^3}.$$

Da in dieser Gleichung alle Größen bekannt sind bis auf den Elastizitätsmodul  $E$ , läßt er sich daraus bestimmen.

$$E = \frac{1.78 \cdot 4 \cdot \omega_0^3 r m_e \cdot l^3}{a_a^3 b_a f}.$$

$$E = \frac{1.78 \cdot 4 \cdot 4 \pi^2 \nu_0^3 r m_e l^3 \varepsilon^3}{a_a^3 b_a h (\varepsilon^2 - 1)} \dots \dots \dots (A)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung wird bestätigt durch die Ergebnisse, die sich aus ihr errechnen. Sowohl bei Pfeiler I wie bei den Laboratoriumsversuchen, die im zweiten Teil der Arbeit besprochen werden, lieferte sie richtige Werte des Elastizitätsmoduls.

Die Formel

$$\omega^2 r m_e = \frac{E a_a^3 b_a f}{1.78 \cdot 4 \cdot l^3}$$

zur Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der Dämpfung und dem Resonanzausschlag entspringt der Gleichsetzung zweier Kräfte ohne strengen Beweis für die Zulässigkeit dieser Gleichsetzung.

Ich versuchte auf verschiedenen Wegen zu einer strengen physikalischen Ableitung der Formel zu gelangen. Dabei benutzte ich die allgemein bekannten Gedankengänge. In allen Fällen ergab sich jedoch ein Endresultat, das sich von der Gleichung (A) auf S. 182 um einen Faktor  $\pi$  auf der rechten Seite unterschied.

$$E = \frac{1.78 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu_0^3 r m_e l^3 \varepsilon^3}{a_a^3 b_a h (\varepsilon^2 - 1)} \cdot \pi \dots \dots \dots (B)$$

Dieses Ergebnis erhielt ich einmal durch Berechnung der Arbeit, die die Komponente der Zentrifugalkraft in Richtung der Schwingungsebene des Pfeilers an diesem bei einer Schwingung im Falle der Resonanz leistet. Ferner berechnete ich den Energiebetrag, um den die gesamte Schwingungsenergie des Pfeilers pro Periode durch die Dämpfung abnimmt. Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke lieferte die obige Formel.

Eine andere Methode der Ableitung der Formel war folgende:

Läuft der Exzenter mit der Eigenfrequenz  $\nu_0$  des Pfeilers um, so schaukelt er diesen zu Schwingungen bis zum Resonanzausschlag  $h_{\max}$  auf. Dividiert man  $h_{\max}$  durch die Resonanzüberhöhung, die man aus dem gemessenen Dämpfungsverhältnis berechnen kann ( $\mathfrak{B} = \frac{\pi}{\ln \varepsilon^2}$ ), so erhält man den statischen Aus-

schlag  $h_{s_1}$ , d. h. die Abbiegung des Pfeilerendes, die eine horizontal gerichtete an diesem angreifende statische Kraft  $P$  hervorruft, welche gleich ist dem Maximalwert der Komponente  $Z$  der Exzenterkraft in Richtung der Schwingungsebene des Pfeilers bei der Umlauffrequenz  $\nu_0$ . Diese Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der Exzenterkraft und dem so berechneten statischen Ausschlag führt zur Formel (B) auf S. 182.

Diese theoretischen Formeln definieren also die Resonanzüberhöhung

$$\mathfrak{B} = \frac{\pi}{\ln \varepsilon^2} = \frac{h_{\max}}{h_{s_1}}.$$

$$h_{s_1} = h_{\max} \frac{\ln \varepsilon^2}{\pi} \sim h_{\max} \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \sim h_{\max} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\pi}, \text{ da } \frac{2}{\varepsilon^2 + 1} \sim 1.$$

Unsere Gebrauchsformel (A) setzt ebenfalls  $Z = P$ , aber  $h_{s_2} = \Delta h_{\max}$ , worin  $\Delta h_{\max}$  die Abnahme der Resonanzamplitude infolge der Dämpfung während der ersten Periode ist, wenn der Exzenter plötzlich fortgenommen würde und  $h_{s_2}$  den statischen Ausschlag für  $P = Z$  bedeutet.

$$\Delta h_{\max} = h_{\max} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} \sim h_{\max} (\varepsilon^2 - 1),$$

$$h_{s_2} = \Delta h_{\max} = h_{\max} (\varepsilon^2 - 1).$$

Die so errechneten Werte von  $h_{s_1}$  und  $h_{s_2}$  unterscheiden sich also um den oben erwähnten Faktor  $\pi$ .

$$\frac{h_{s_1}}{h_{s_2}} = \frac{h_{\max} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\pi}}{h_{\max} (\varepsilon^2 - 1)} = \frac{1}{\pi}.$$

Durch statische Belastung mit  $P = Z$  wurde nun an einseitig geklemmten Stäben  $h_s$  bestimmt. Es entspricht dem  $h_{s_2}$  und nicht dem  $h_{s_1}$ . Der gemessene Wert ist rund dreimal größer als der berechnete  $h_{s_1}$ .

Die Experimente bestätigten also nicht die theoretische Gleichung (B), sondern (A) von S. 182. Ich wandte diese außer bei der Messung auf Pfeiler I auch, wie schon erwähnt, bei Untersuchungen an einseitig eingeklemmten Stäben im Laboratorium an. Dabei variierte ich die Versuchsbedingungen auf die mannigfaltigsten Arten. Die Versuche sind im zweiten Teil der Arbeit beschrieben. Ohne Ausnahme lieferte die Benutzung der Formel (A) von S. 182 richtige Werte. Zur Aufklärung der Diskrepanz zwischen der theoretisch abgeleiteten Beziehung und der experimentell gefundenen bedarf es noch weiterer theoretischer Überlegungen und Versuche.

Setzt man die Zahlenwerte für den Pfeiler I in die Gleichung (A) von S. 182 ein, so ergibt sich für den Elastizitätsmodul

$$E = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2.$$

Dieser Wert stimmt mit dem aus der Eigenperiode berechneten ( $1.52 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$ ) gut überein. Er liegt in den Grenzen, die sonst für Buntsandstein angegeben werden.

Bei Anregung des Pfeilers durch zwei Personen zeigte sich, daß er auch in Richtung seiner Längsseite in Schwingung gerät. Er wurde nicht in der Mitte, sondern seitlich angeregt. Die Amplitude der Schwingung in Richtung der Längsseite war etwa zehnmal kleiner als die quer zu dieser. Sie hinkte bei gleicher Schwingungsdauer um 0.07 sec hinter dieser her. Eine Verfälschung der Eigenperiode des Pfeilers tritt dabei nicht ein.

b) *Pfeiler II.* Wie schon erwähnt, wurde bei diesem Pfeiler die Eigenperiode von unten durch die Maschinenschwingung angeregt. Sie erreichte oben Maximalamplituden von  $5 \mu$ . Die Frequenzen der einzelnen Schwingungen streuen in weiten Grenzen. Durch die überlagerte Schwingung wird die Genauigkeit der Bestimmung der Eigenfrequenz herabgedrückt. Auch kann der Pfeiler durch die dauernde Anregung nicht ungestört schwingen. Mittelwerte aus zehn Schwingungen jedoch lieferten stets den gleichen Wert. Die Grundfrequenz des Pfeilers II wurde zu  $\nu_0 = 0.83 \text{ sec}^{-1}$  gemessen. Der mittlere Fehler ist  $\pm 0.02 \text{ sec}^{-1}$ .

Aus der Eigenfrequenz und den Dimensionen des Pfeilers II (Fig. 1) berechnet sich nach der bei Pfeiler I abgeleiteten Formel

$$E = \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot l^4 \cdot \rho \cdot \nu_0^2}{a^2 \cdot \beta_0^4 \cdot V^2}$$

sein Elastizitätsmodul

$$E = 0.98 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2.$$

Dieser Wert weicht von dem, der für Pfeiler I ermittelt wurde, beträchtlich ab. Das rührt einmal daher, daß bei der Anregung von unten die Eigenfrequenz sich etwas kleiner ergibt als bei der Anregung von oben. Hier sei auf den Laboratoriumsversuch auf S. 186 verwiesen. Pfeiler II hat im Gegensatz zu Pfeiler I ein hohes Fundament, das nur von lockeren Schuttmassen umgeben ist. Es wird daher sicherlich nicht nur der Pfeiler für sich schwingen, sondern mit dem Fundament zusammen. Er ist demnach als nicht ideal eingespannt zu betrachten. Zahlenmäßig kann man, wie später eingehend erörtert wird, die elastische Einspannung durch die Größe  $\Delta l$  ausdrücken, um die der Stab länger sein müßte, damit er bei idealer Einspannung dieselbe Eigenfrequenz hätte. Um für Pfeiler II denselben Wert für den Elastizitätsmodul zu erhalten wie für Pfeiler I, muß  $\Delta l = 5 \text{ m}$  sein. Diese Zahl ist gar nicht unwahrscheinlich.

Die beiden Elastizitätsmodule brauchen aber keineswegs gleich zu sein. Das Material, aus dem die Pfeiler gebaut sind, ist bei beiden verschieden. Da bei der Biegung hauptsächlich die äußeren Teile, also die Verblendung, beansprucht werden, sind die erhaltenen Elastizitätskonstanten wohl die des Sandsteins. Für verschiedene Sandsteine variieren diese aber zwischen ziemlich großen Grenzen. Reich[4] gibt folgende Werte an:

Grünsandstein . . . . .	$E = 0.80 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$
Keupersandstein . . . . .	$E = 0.95 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$
Buntsandstein . . . . .	$E = 1.02-1.67 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$

Zum Bau der Pfeiler wurden Sandsteine aus verschiedenen Gegenden benutzt. Ferner wird auch das Füllmaterial nicht die gleiche Zusammensetzung und Festigkeit haben. Ein Teil des Unterschiedes der Elastizitätsmodule kann dadurch erklärt werden. Nach Tabelle 2 ist die Druckbelastung des Pfeilers I größer als die des Pfeilers II. Pfeiler I wird daher von vornherein schon fester gebaut worden sein. Darauf deuten auch die verschiedenen Dämpfungswerte hin. Für Pfeiler I ist  $\varepsilon = 1.04 : 1$ , für Pfeiler II ist  $\varepsilon = 1.06 : 1$ . Später zu beschreibende Laboratoriumsversuche zeigten, daß die Dämpfung von Stäben gleichen Materials bei gleicher Einspannung immer denselben Wert hat.

**3. Verhalten der Pfeiler bei Wind und Erschütterungen.** Nach Hütte I [1] ist die

Druckfestigkeit von Sandstein . . . . .	$\sigma_{zul} = 150-3200 \text{ kg/cm}^2$
Biegefestigkeit von Steinen . . . . .	$\sigma'_{zul} = 1/6 \sigma_{zul}$
Biegefestigkeit von Beton . . . . .	$\sigma'_{zul} = 1/6-1/4 \sigma_{zul}$

Um überschlagsmäßig die Größenordnung der Bruchfestigkeit der Pfeiler zu bekommen, wähle ich aus dem angegebenen Bereich einen Mittelwert aus. Er sei  $\sigma_{zul} = 360 \text{ kg/cm}^2$ . Die Biegefestigkeit ist dann  $\sigma'_{zul} = 60 \text{ kg/cm}^2 = 0.6 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2$ . Die höchst zulässige Abbiegung eines einseitig eingespannten Stabes durch eine an seinem freien Ende angreifende Kraft ist

$$f_1 = \frac{2 \cdot \sigma'_{zul} \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot a}.$$

Bei gleichmäßig über den Stab verteilter Kraft ist

$$f_2 = \frac{\sigma'_{zul} \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot a}.$$

$l$  = Pfeilerhöhe,  $a$  = Pfeilerdicke,  $E$  = mittlerer Elastizitätsmodul der Pfeiler. Durch Einsetzen der Zahlenwerte für die Pfeiler erhält man bzw.

$$f_1 = \frac{2 \cdot \sigma'_{zul} \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot a} = 14.8 \text{ cm},$$

$$f_2 = \frac{\sigma'_{zul} \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot a} = 11.1 \text{ cm}.$$

Im ersten Falle ist die zur Abbiegung um den Betrag  $f$  nötige Kraft

$$P_{zul} = \frac{f_1 E a^3 b}{4 l^3} = 750 \text{ t}.$$

Im zweiten Falle ist sie

$$P_{zul} = \frac{2 f_2 E a^3 b}{3 l^3} = 1500 \text{ t}.$$

Eine horizontal gerichtete, am freien Ende des Pfeilers angreifende Kraft von 750 t könnte für ihn schon schädlich sein. Als solche kommt in erster Linie

ein seitlicher Schub der Fahrbahn in Frage. Er darf sicher nicht bis zur Hälfte des Vertikaldruckes der Stahlkonstruktionen anwachsen.

Eine am ganzen Pfeiler angreifende Kraft stellt der Winddruck dar. Zunächst nehme ich an, die Windrichtung sei senkrecht zur Breitseite des Pfeilers. Der Staudruck pro  $\text{cm}^2$  ist

$$p = 1/2 \rho v^2.$$

Gefährlich wird ein Gesamtdruck von  $P_{\text{zul}} = 1500 \text{ t}$ . Dem entspricht ein Druck auf die Flächeneinheit des Pfeilers

$$p_{\text{zul}} = P_{\text{zul}} : l \cdot b = 1.45 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2.$$

Zur Erzeugung eines solchen Staudruckes ist die Windgeschwindigkeit

$$v_{\text{zul}} = \sqrt{\frac{2 \cdot p_{\text{zul}}}{\rho}} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ cm/sec} = 150 \text{ m/sec}$$

erforderlich. Berücksichtigt man auch den Sog, der meist größer ist als der Stau, so erhält man, wenn man ihn etwa doppelt so groß annimmt als den Stau,

$$v_{\text{zul}} \cong 100 \text{ m/sec.}$$

Die maximal vorkommenden Windstärken betragen 40 bis 50 m/sec. Solange also der Wind nur statisch auf die Pfeiler wirkt, ist keine Gefahr vorhanden.

Der Wind strömt aber nicht laminar. Im Gegenteil, er ist meist sogar sehr böig. Verfeinerte Windregistrierungen im Geophysikalischen Institut Göttingen haben gezeigt, daß die Windstärke bevorzugt mit Perioden um 1 sec schwankt. Dadurch können die Pfeiler leicht zu großen Amplituden aufgeschaukelt werden. Bis zu einer Aufschaukelung zu gefährlichen Amplituden kommt es jedoch nicht. Eine periodische Kraft braucht bei einer Dämpfung  $\varepsilon = 1.04$  bis 1.06 15 bis 30 Perioden dazu. Solange bläst der Wind nicht mit konstanter Schwankung. Zur Aufschaukelung bis zur gefährlichen Durchbiegung ist eine periodische Kraft von etwa 100 t oder  $10^{11}$  dyn nötig. Die Windstärke müßte periodisch 20 bis 30 sec lang, um 20 bis 30 m/sec schwanken. Eine solche Windstruktur kommt in der Natur nicht vor. Es ist auch zu bedenken, daß die Pfeiler im Tale geschützt stehen und parallel zu diesem gebaut sind. Der Winddruck allein vermag den Pfeilern nicht gefährlich zu werden. Ihm kann jedoch, wenn sie bereits durch andere Kräfte beansprucht sind, als auslösende Ursache einer Katastrophe eine große Bedeutung zukommen.

Bevor ich auf das Verhalten der Pfeiler bei Erschütterungen des Untergrundes eingehe, möchte ich ein Experiment im Laboratorium beschreiben. Ein Stab aus Eschenholz wurde einseitig geklemmt und auf einen Schütteltisch geschraubt. Ein an- und auslaufendes Exzenterrädchen bewegte die Platte des Schütteltisches sinusförmig hin und her. Dabei durchlief es alle Frequenzen zwischen 5 und 20/sec. Die Bewegungen des Tisches und die des Stabendes wurden optisch aufgezeichnet. Die Amplitude des Schütteltisches blieb für alle Frequenzen konstant. Fig. 4 zeigt den Verlauf der Maximalamplitude des Stabendes in Abhängigkeit von der Frequenz. Als Ordinate ist das Verhältnis der Bewegung des freien Endes

zur Bewegung der Platte aufgetragen. In der Resonanz ist die Vergrößerung 82fach. Die Dämpfung des Holzstabes ist  $\varepsilon = 1.0225$ . Diesem Wert entspricht bei einem schwingungsfähigen Gebilde eine theoretische Resonanzüberhöhung von 71.5. In Anbetracht der Tatsache, daß bei so geringen Dämpfungen die Vergrößerung in der Resonanz sich sehr stark ändert, stimmen die Werte gut überein.

Der Versuch ergab eine Änderung der Eigenperiode bei Anregung von unten und bei Anregung von oben. Als die Schüttelplatte arretiert war, und der Stab oben angezupft wurde, war seine Eigenfrequenz  $\nu_0 = 12.2/\text{sec}$ . Die Resonanzkurve hat dagegen ihr Maximum bei  $11.6/\text{sec}$ . Dieselbe Frequenz hatte der Stab, als die Platte durch Auftreten auf den Boden erschüttert wurde.

Die gleichen Verhältnisse haben wir bei den Pfeilern der Werrabrücke. Der Untergrund führt bei Erdbeben, Sprengungen, Verkehrserschütterungen usw. periodische Bewegungen aus. Wie die Messungen auf Pfeiler II zeigten, machte auch das freie Ende die Bodenbewegungen vergrößert mit. Ebenso wurden die Erschütterungen einer Ramme unten und oben aufgezeichnet. Die Resonanzkurve der Pfeiler sieht ähnlich aus wie die des Holzstabes. Der Dämpfung des Pfeilers I,  $\varepsilon = 1.042$ , entspricht eine Resonanzvergrößerung von 37. Bei Pfeiler II ist die Dämpfung  $\varepsilon = 1.06$  und die Resonanzüberhöhung 28. Gefährlich für die Pfeiler ist eine Bodenschwingung von der Periode 1 sec. Sie muß dann allerdings schon eine Maximalamplitude von etwa 5 mm erreichen. Solche riesigen Schwingungen von 1 sec kommen aber außer bei großen Nahbeben nicht vor.

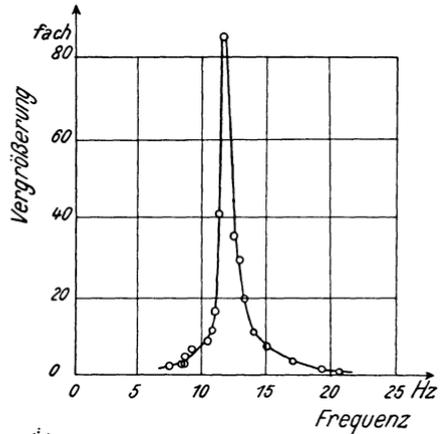


Fig. 4. Resonanzkurve des Eschenholzstabes bei Anregung von unten. Als Ordinate ist das Verhältnis der Amplitude des freien zur Amplitude des geklemmten Stabendes aufgetragen

## II. Bestimmung des Elastizitätsmoduls an Stäben zur Prüfung der bei den Pfeilern verwandten Methoden

Eine Bestätigung, daß man die Pfeiler als einseitig eingeklemmte Stäbe behandeln kann, und daß die benutzten Methoden zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls die richtigen Werte liefern, ist bereits durch die Übereinstimmung der aus ihnen gewonnenen Ergebnisse für den Pfeiler I gegeben. Weiterhin wurden an einseitig eingeklemmten Stäben verschiedenen Materials die einzelnen Methoden nachgeprüft. Ein Stab aus Eschenholz, ein Messing-, ein Stahl- und ein Glasstab wurden untersucht. Die Klemmung erfolgte mittels eines Schraubstockes. Die Auslenkung des Stabendes wurde durch ein Spiegelsystem auf Film aufgezeichnet.

**1. Die Methoden.** a) *Elastizitätsmodul aus der Eigenfrequenz einseitig eingeklemmter Stäbe.* Die Stäbe wurden mit der Hand angezupft und das Ausschwingen aufgezeichnet. Als Zeitmaßstab wurden die Schwingungen einer Stimmgabel von 50/sec mitregistriert. Zur Anregung des Stabes durch einen Exzenter und zur Aufzeichnung der Bewegung des Stabendes mußten an dieses Massen geschraubt werden. Sie bewirkten eine Vergrößerung des Trägheitsmomentes und daher Verkleinerung der Frequenz. Theoretisch wird durch die angehängten Kopfmassen der Beiwert  $\beta_0$  vermindert. Dieser hängt vom Verhältnis  $\alpha$  der Kopfmasse zur Masse des Stabes ab. Zwischen  $\alpha$  und  $\beta_0$  besteht nach Hort [5] die Beziehung

$$\frac{1}{\mathfrak{C}|\beta_0} - \beta_0 \alpha \sin \beta_0 + \cos \beta_0 (1 - \beta_0 \alpha \mathfrak{T}g\beta_0) = 0.$$

In Tabelle 3 sind zusammengehörige Werte von  $\alpha$  und  $\beta_0$  enthalten.

Tabelle 3

$\alpha$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
$\beta_0$	1.875	1.857	1.840	1.823	1.807
$\alpha$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$\beta$	1.792	1.777	1.763	1.749	1.736
$\alpha$	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14
$\beta_0$	1.723	1.711	1.699	1.688	1.677
$\alpha$	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19
$\beta_0$	1.666	1.655	1.645	1.635	1.626

Die Korrektur wegen Schubkraft und Rotationsträgheitsmoment kann auch hier vernachlässigt werden, da das Verhältnis Dicke zu Länge des Stabes immer *kleiner* als 1/20 ist und die Korrektur daher kleiner als 0.4% wird. Der Elastizitätsmodul berechnet sich also nach der Formel

$$E = \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot l^4 \cdot \rho \cdot \nu_0^2}{a^2 \cdot \beta_0^4}.$$

Die Genauigkeit, mit der man nach dieser Methode den Elastizitätsmodul bestimmen kann, beträgt beim Holzstab 3%, da sich bei der Bearbeitung des Materials Dicke und Breite des Stabes nicht genau konstant halten lassen. Beim Glas- und Stahlstab ist der Fehler nur 2.5%.

Die benutzte Formel wurde zuerst von Kohlrausch abgeleitet. Sie hat sich als sehr brauchbar erwiesen und liefert gute Ergebnisse. Sie kommt den tatsächlichen Verhältnissen sehr nahe. A. Esau und M. Hempel [6] fanden eine Übereinstimmung bis auf 1%. In einer anderen Arbeit [7] jedoch stellten sie bei Zusatzmassen am freien Ende große Unstimmigkeiten zwischen Rechnung und Messung fest. Th. Pöschl [8] meint jedoch, daß die Differenz nicht in der Rechnung, sondern in der Messung ihre Ursache hat. Sicherlich werden bei zu großen Kopflasten die Bedingungen der Theorie (starre Einspannung, punktförmige Kopfmasse) nicht mehr erfüllt. Bei den kleinen Kopflasten, wie ich sie benutzt habe, ist der Fehler, den Esau und Hempel gemessen haben, noch unter 1%.

Bei vielen Versuchen maß ich die Eigenfrequenz der Stäbe mit und ohne Zusatzmassen. Ich konnte dabei für  $E$  keine systematischen Unterschiede feststellen.

b) *Elastizitätsmodul aus der statischen Belastung einseitig eingeklemmter Stäbe.*

Bei der zweiten Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls griff am Stabende eine bekannte Kraft an, und die dazugehörige Abbiegung wurde gemessen. Die Kraft war stets ein angehängtes Gewicht. Nach Hütte I [1] besteht zwischen der Kraft  $P$  und der Ablenkung des Stabendes  $f$  der Zusammenhang

$$f = \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J \cdot 3} = \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{E \cdot a^3 \cdot b},$$

$$E = \frac{4 \cdot P \cdot l^3}{a^3 \cdot b \cdot f}.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie auf S. 181. Bei einigen Versuchen wurde statt der vergrößert aufgezeichneten Ablenkung des Stabes die bei der Biegung auftretende Verdrehung der Deckfläche gemessen. Zur Aufzeichnung derselben diente ein kleiner Spiegel, der an das Stabende geklebt war. Zwischen der Kraft  $P$  und dem Verdrehungswinkel  $\alpha$  besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J},$$

$$E = \frac{6 \cdot P \cdot l^2}{\operatorname{tg} \alpha \cdot a^3 \cdot b}.$$

Die Genauigkeit dieser Methode ist 2.5 bis 4.0%.

c) *Elastizitätsmodul aus dem Resonanzausschlag und der Dämpfung einseitig eingeklemmter Stäbe.* Das Wesen dieser Methode wurde bereits beschrieben. An Stäben sollte nachgeprüft werden, ob dieses Verfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls richtige Werte liefert und wie genau die Ergebnisse sind. Für die Messungen wurde an das Stabende ein Lagerbock geschraubt. In das dazugehörige Rädchen wurde am Rande eine Schraube gedreht. Die überstehende Masse bildete den Exzenter. Durch Abziehen eines auf die Achse des Rädchens aufgespulten Fadens wurde dieses auf große Umdrehungszahlen gebracht. Es lief dann langsam aus. Der Stab führte Schwingungen in der Frequenz des Rädchens aus. Die Maximalamplituden blieben jedoch zunächst klein. Je mehr sich die Exzenterfrequenz der Eigenfrequenz des Stabes näherte, desto größer wurde sie. Sie schwankte dabei immer etwas auf und ab, wie es auch auf dem Pfeiler der Fall war (Fig. 5). Als das Rädchen in die Resonanz kam, stieg die Maximalamplitude rasch an und nahm schnell wieder ab. Der rasche Abfall entsteht durch Schwebung zwischen der noch nachklingenden Eigenfrequenz und der erst wenig kleineren Erregerfrequenz des Exzenter. Beim Eschenholzstab zeigte sich, daß bereits vor der Resonanz die Eigenfrequenz sehr stark angeregt wurde. Es bildete sich vor der Resonanz ein Schwebungsmaximum und -minimum aus. Im Minimum sank die Maximalamplitude fast auf Null. In diesem Falle fiel der Resonanz-

ausschlag zu groß aus. Wurde davon die halbe Differenz der Ausschläge im Schwebungsmaximum und -minimum, also die Maximalamplitude der vor der Resonanz erregten Eigenschwingung, abgezogen, so ergab sich der richtige Resonanzausschlag.

Diese Methode versagte bei Stahl- und Messingstäben. Die Dämpfung von Holz und Glas ist  $\varepsilon = 1.01 : 1$ . Bei Metallstäben liegt sie dagegen um  $\varepsilon = 1.0025 : 1$ . Stäbe mit so geringer Dämpfung benötigen zur Aufschaukelung die Zeit vieler Perioden. Das auslaufende Rad läuft zu schnell über die Resonanz hinweg. Selbst bei Antrieb des Rädchens durch einen Motor wurde der volle Resonanzausschlag

nicht erreicht. Es gelingt nicht, das Rädchen während der erforderlichen Zeit konstant mit der Eigenperiode laufen zu lassen.

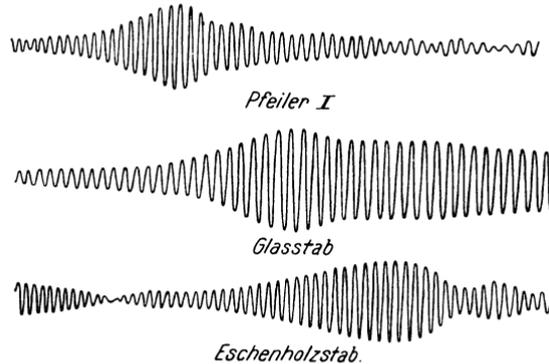


Fig. 5. Resonanzkurven verschiedener Stäbe beim Auslauf des Exzenters

Die Wägung oder Berechnung der tatsächlichen Exzentermasse wäre schwierig und sehr ungenau gewesen. Daher wurde der Versuch immer zweimal ausgeführt. Einmal lief das Rädchen mit Schraube, das andere Mal ohne dieselbe aus. Die Resonanzausschläge der beiden Versuche wurden

dann addiert. In diesem Falle mußte ich die Masse der Schraube als Exzentermasse  $m_e$  einsetzen. Bei einigen Messungen wurde beim zweiten Versuch auf die Schraube noch eine kleine Mutter gedreht. Sie bildete die Exzentermasse. Die Resonanzausschläge mußte ich bei diesen Messungen subtrahieren.

Hier sei nochmals kurz der formelmäßige Zusammenhang der Methode dargelegt. Die Exzenterkraft ist

$$Z = 4\pi^2 \cdot v_0^2 \cdot r \cdot m_e.$$

Die Abnahme der Maximalamplitude pro Periode beträgt

$$f = h - h : \varepsilon^2 = h (1 - 1/\varepsilon^2) = h \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}.$$

Zur statischen Abbiegung des Pfeilers um den Betrag  $f$  ist die Kraft

$$P = \frac{E a^3 b f}{4 l^3} = \frac{E \cdot a^3 \cdot b \cdot h \cdot (\varepsilon^2 - 1)}{4 \cdot l^3 \cdot \varepsilon^2}$$

nötig. Da beide Kräfte gleich gesetzt sind, ergibt sich für den Elastizitätsmodul  $E$

$$E = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot v_0^2 \cdot r \cdot m_e \cdot 4 \cdot l^3 \cdot \varepsilon^2}{a^3 \cdot b \cdot h \cdot (\varepsilon^2 - 1)}.$$

Die Genauigkeit des erhaltenen Ergebnisses ist 6 bis 8%. Der große Fehler rührt vom Faktor  $(\varepsilon^2 - 1)$  her.  $\varepsilon$  läßt sich nicht genauer bestimmen.

Gegenüber der Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Eigenfrequenz hat dieses Verfahren den Vorteil, daß man die Kopflast, die nicht immer leicht und genau zu bestimmen ist, nicht zu kennen braucht. Eine Abhängigkeit des Resultats von der Kopflast haben die Versuche nicht gezeigt.

d) *Elastizitätsmodul bei frei aufliegenden Stäben aus der Eigenfrequenz und bei statischer Belastung.* Um von den Einflüssen der Einspannung freizukommen, wurden die Stäbe noch auf eine vierte Art untersucht. Sie wurden an ihren Enden auf zwei Schneiden gelagert und in der Mitte belastet. Durch die Belastung biegt sich der Stab durch. Die Biegung wurde entweder durch den Betrag der Senkung der Stabmitte oder durch die Verdrehung der Endflächen gemessen. Für die beiden Fälle gelten die Beziehungen:

$$f = \frac{P l^3}{48 E J},$$

$$E = \frac{P l^3}{4 a^3 b f},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{P l^2}{E J 16},$$

$$E = \frac{3 P l^2}{4 a^3 b \cdot \text{tg } \alpha}.$$

Die Genauigkeit der Methode ist 3%.

Durch Anzupfen gelang es auch, die Stäbe bei dieser Lagerung zu Querschwingungen anzuregen. Jedoch müssen die Stäbe schon eine ziemliche Länge im Verhältnis zum Querschnitt haben, da sonst die Frequenzen sehr hoch liegen. Während im statischen Falle für die Stablänge nur der Abstand der Schneiden maßgebend ist, und überstehende Enden keine Rolle spielen, ändern diese im dynamischen Falle die Eigenperioden ähnlich wie die Kopflasten beim eingeklemmten Stab. Der Einfachheit halber bestimmte ich die Eigenfrequenzen nur in den Fällen, in denen der Stab auf seinen Enden gelagert war. Die Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der Periodenzahl pro Sekunde geschieht nach derselben Formel, die auch beim eingespannten Stab benutzt wird, nur hat die Konstante  $\beta_0$  einen anderen Wert. Sie ist hier  $\beta_0 = \pi$ . Die Formel lautet:

$$E = \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot l^4 \cdot \rho \cdot \nu_0^2}{a^2 \cdot \pi^4},$$

$$E = \frac{12 \cdot 4 \cdot l^4 \cdot \rho \cdot \nu_0^2}{a^2 \cdot \pi^2}.$$

Die Genauigkeit ist die gleiche wie beim eingeklemmten Stab.

Die mit diesem Verfahren erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 5 eingetragen. Die dynamischen Werte sind mit  $E_1$ , die statischen mit  $E_2$  bezeichnet.

Tabelle 4. Meßergebnisse an einseitig eingeklemmten Stäben

Nr.	Material	Stab- länge cm	$f_0$	Eigen- frequenz (Hz)	Dämpfung $\xi^2$	$E_1$ aus Eigen- frequenz	$E_2$ aus stat. Belastung	$E_3$ aus Dämpfung und Resonanz	$E$ dyn/cm <sup>2</sup>	$\lambda /$ cm	Bemerkungen
1	Esehenholz	91.7	1.659	10.48	1.0435	$1.047 \cdot 10^{11}$	$1.084 \cdot 10^{11}$	$1.12 \cdot 10^{11}$	$1.11 \cdot 10^{11}$	0.61	vertikal nach unten
2	"	76.7	1.692	13.77	1.0696	$0.953 \cdot 10^{11}$	$1.030 \cdot 10^{11}$	$1.11 \cdot 10^{11}$	$1.07 \cdot 10^{11}$	0.96	" "
3	"	84.0	1.645	12.16	1.0468	$1.03 \cdot 10^{11}$	$1.02 \cdot 10^{11}$	$1.08 \cdot 10^{11}$			" "
4	"	83.4	1.875	16.60	1.0357	$1.10 \cdot 10^{11}$	$1.08 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{11}$			" zwischen 2 mm Gummi
5	"	83.4	1.810	15.53	1.0441	$1.13 \cdot 10^{11}$	$1.17 \cdot 10^{11}$	$1.04 \cdot 10^{11}$			" " 10 " "
6	"	100.0	$\left. \begin{matrix} 1.875 \\ 1.759 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 12.40 \\ 10.83 \end{matrix} \right\}$	1.0389	$\left. \begin{matrix} 1.17 \cdot 10^{11} \\ 1.151 \cdot 10^{11} \end{matrix} \right\}$	$1.23 \cdot 10^{11}$	$1.31 \cdot 10^{11}$	$1.27 \cdot 10^{11}$	1.10	" oben $\frac{1}{3}$ Jahr früher (frisches Holz)
7	Glas	86.3	$\left. \begin{matrix} 1.718 \\ 1.645 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 9.015 \\ 8.251 \end{matrix} \right\}$	1.0236	$\left. \begin{matrix} 6.51 \cdot 10^{11} \\ 6.48 \cdot 10^{11} \end{matrix} \right\}$	$6.20 \cdot 10^{11}$	$7.48 \cdot 10^{11}$			" oben
8	"	95.6	1.663	7.015	1.0180	$6.75 \cdot 10^{11}$	$5.41 \cdot 10^{11}$	$9.88 \cdot 10^{11}$			" "
9	"	92.0	1.656	7.577	1.0392	$6.86 \cdot 10^{11}$	$6.51 \cdot 10^{11}$	$6.33 \cdot 10^{11}$			" "
10	Stahl	52.3	1.875	15.59		$1.96 \cdot 10^{12}$	$2.05 \cdot 10^{12}$		$2.10 \cdot 10^{12}$	0.45	" "
11	"	58.0	1.697	8.315		$1.90 \cdot 10^{12}$	$2.10 \cdot 10^{12}$		$2.23 \cdot 10^{12}$	1.06	" "
12	"	70.0	1.875	6.993		$1.91 \cdot 10^{12}$	$2.03 \cdot 10^{12}$		$2.11 \cdot 10^{12}$	0.61	" "
13	"	80.0	1.875	5.362		$1.92 \cdot 10^{12}$	$2.08 \cdot 10^{12}$		$2.17 \cdot 10^{12}$	1.18	" "
14	"	86.1	1.875	4.683		$1.96 \cdot 10^{12}$	$2.09 \cdot 10^{12}$		$2.17 \cdot 10^{12}$	1.05	" "
15	"	91.1	1.875	4.156		$1.94 \cdot 10^{12}$	$2.18 \cdot 10^{12}$		$2.33 \cdot 10^{12}$	2.04	" "
16	"	99.0	1.875	3.517		$1.93 \cdot 10^{12}$	$1.98 \cdot 10^{12}$		$2.00 \cdot 10^{12}$	0.43	" "
17	"	100.0	1.875	3.422		$1.91 \cdot 10^{12}$	$2.00 \cdot 10^{12}$		$2.06 \cdot 10^{12}$	0.09	" "
18	"	59.1	1.875	9.895		$1.95 \cdot 10^{12}$	$2.03 \cdot 10^{12}$		$2.08 \cdot 10^{12}$	0.47	" unten
19	"	71.6	1.875	6.805		$1.98 \cdot 10^{12}$	$2.09 \cdot 10^{12}$		$2.16 \cdot 10^{12}$	0.72	" "
20	"	82.5	1.875	5.153		$2.00 \cdot 10^{12}$	$2.08 \cdot 10^{12}$		$2.13 \cdot 10^{12}$	0.63	" "
21	"	97.4	1.875	3.689		$1.99 \cdot 10^{12}$	$2.10 \cdot 10^{12}$		$2.16 \cdot 10^{12}$	0.98	" "
22	Messing	50.0	1.875	9.549		$0.74 \cdot 10^{12}$	$1.01 \cdot 10^{12}$		$1.17 \cdot 10^{12}$	2.6	" oben
23	"	66.1	1.875	5.658		$0.79 \cdot 10^{12}$	$0.94 \cdot 10^{12}$		$1.03 \cdot 10^{12}$	2.1	" "

**2. Ergebnisse.** In der Tabelle 4 und 5 sind die wichtigsten Größen der Stäbe und die Meßergebnisse zusammengestellt. Die Dämpfung  $\epsilon^2$  ist das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maximalamplituden nach derselben Seite. Die nächsten Spalten in der Tabelle 4 enthalten die nach den unter a, b und c beschriebenen Methoden ermittelten Werte des Elastizitätsmoduls. Dabei zeigt sich auffällig, daß der Wert aus der Eigenperiode durchweg der kleinste ist, dann folgt der statische, und der aus der Dämpfung und der Resonanz berechnete ist am größten. Die Fig. 6 zeigt diesen Effekt deutlich. Auch die Umkehrung des Stabes (festes Ende oben, freies unten) ändert daran nichts. Die Stäbe wurden bei den einzelnen Untersuchungen in verschiedenen Schraubstöcken verschieden fest geklemmt. Der Effekt liegt also nicht an zu weicher Klemmung.

Die Formeln, nach denen  $E_1$  und  $E_2$  berechnet wurden, haben zur Voraussetzung, daß bei der Biegung nur das Material zwischen Klemmstelle und freies Ende beansprucht wird. Die größten Spannungen treten am eingespannten Querschnitt auf. Der fest-freie Stab von gleichbleibendem Querschnitt bricht bei statischer Biegung immer am festen Ende. Wenn also die Spannung an dieser Stelle am größten ist, so ist es nicht denkbar, daß sie im geklemmten Stabteil plötzlich auf Null sinkt. Es werden in Querschnitten in der Nähe der Klemmung noch Spannungen vorhanden sein, die auch auf das Material der Klemmbanken übergreifen. Auf das Verhalten der Stäbe gegenüber Biegung wirkt dies wie eine Verlängerung des Stabes. J. W. Geckeler [8] gibt für die Durchbiegung eines Stabes durch eine an seinem freien Ende angreifende Kraft die Beziehung:

$$f = \frac{P l^3}{3 E J} + \beta l.$$

Tabelle 5. Meßergebnisse an zweifach unterstützten Stäben

Nr.	Material	Länge cm	Eigenfrequenz (Hz)	$E_1$ aus der Eigenfrequenz	$E_2$ aus der stat. Belastung
1	Eschenholz	101.4	32.57	$1.05 \cdot 10^{11}$	$1.11 \cdot 10^{11}$
2	Glas	97.5	26.23	$7.60 \cdot 10^{11}$	$7.56 \cdot 10^{11}$
3	Glas	96.1			$7.38 \cdot 10^{11}$
4	Stahl	102.0	9.785	$2.14 \cdot 10^{12}$	$2.16 \cdot 10^{12}$
5	Stahl	70.8			$2.15 \cdot 10^{12}$
6	Stahl	102.0			$2.17 \cdot 10^{12}$

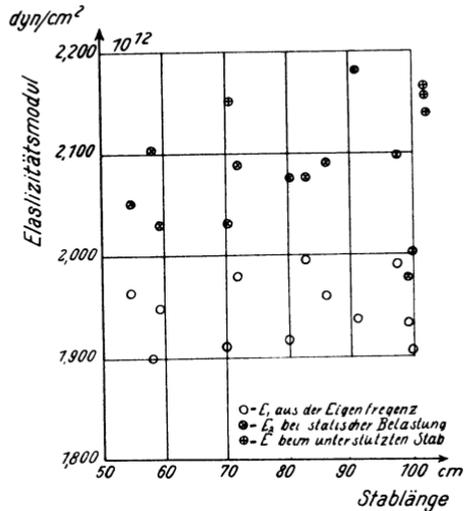


Fig. 6. Die gemessenen Elastizitätsmodule des Stahlstabes in Abhängigkeit von der Stablänge

$\beta$  ist eine Integrationskonstante. Das Glied  $\beta l$  hängt von der Einspannung ab. Rankine\*) bezeichnet es als „die von der Schubkraft herrührende zusätzliche Durchbiegung“.  $\beta$  ist empirisch zu bestimmen.

A. Thum und F. Wunderlich [9] beobachteten bei eingespannten Tragteilen Abweichungen zwischen den mit der „freien Länge“ (Abstand Klemmstelle—freies Ende) berechneten Durchbiegungen, Querschnittsneigungen und Spannungen und den gemessenen Werten. Die Ursachen sind die nicht idealen Einspannverhältnisse. Um mit den gewöhnlichen Formeln noch arbeiten zu können, setzten sie in diese nicht die freie Länge, sondern multiplizierten sie erst mit einem Faktor  $\alpha$ . Diesen nannten sie den „Einspannwert“. Er ist größer als 1 und ist immer empirisch zu bestimmen. Die Verfasser stellten eine Abnahme von  $\alpha$  mit größer werdender Stablänge fest.

Praktischer als  $\beta$  und auch als  $\alpha$  dünkt mir die Größe  $\Delta l$  zu sein, die ich zur Stablänge  $l$  addieren muß, um die Biegung mit der einfachen Formel behandeln zu können. Diese lautet dann im Falle statischer Belastung:

$$f = \frac{P(l + \Delta l)^3}{3 E J},$$

$$E = \frac{4 P(l + \Delta l)^3}{a^3 b f} \simeq \frac{4 P l^3}{a^3 b f} (1 + 3 \Delta l/l).$$

Im statischen Falle wirkt die Spannung nur in einer Richtung. Bei der Schwingung dagegen ist sie abwechselnd nach beiden Seiten gerichtet. In erster Näherung wird es wohl so sein, daß sich ihr Einfluß auf den geklemmten Stab verdoppelt. Den stärksten Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme liefern allerdings die mit ihr erzielten Ergebnisse. Die Formel für die Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der Eigenfrequenz lautet nun:

$$E = \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot \rho \cdot \nu_0^2 \cdot (l + 2 \Delta l)^4}{a^2 \cdot \beta_0^4}$$

$$\simeq \frac{12 \cdot 4 \pi^2 \cdot \rho \cdot \nu_0^2 \cdot l^4}{a^2 \cdot \beta_0^4} (1 + 8 \Delta l/l).$$

Die verbesserten Werte des Elastizitätsmoduls erhält man aus  $E_1$  und  $E_2$  durch Multiplikation mit einem Faktor. Es ist:

$$E = E_1 (1 + 8 \Delta l/l),$$

$$E = E_2 (1 + 3 \Delta l/l).$$

Durch Auflösung der beiden Gleichungen ergibt sich für  $E$  und  $\Delta l$

$$E = E_1 \left( 1 + \frac{8(E_2 - E_1)}{8E_1 - 3E_2} \right),$$

$$\Delta l = \frac{l(E_2 - E_1)}{8E_1 - 3E_2}.$$

---

\*) Applied Mechanics 1858.

In der zehnten und elften Spalte der Tabelle 4 sind die aus obigen Formeln errechneten Werte eingetragen. Daraus sieht man, daß  $E$  keinen systematischen Gang mit der Stablänge mehr zeigt. Der Mittelwert liegt bei Stahl wie bei Holz nahe bei den Werten, die in Tabelle 5 enthalten sind. Diese sind aber vom Einfluß der Klemmung frei, Dadurch werden die Annahmen über die Wirkung der Spannung im geklemmten Stabteil gerechtfertigt. Die erhaltenen Elastizitätsmodule sind als die des Materials anzusprechen.

Wie schnell die Spannung im eingespannten Ende des Stabes auf Null abfällt, kann man am Stahlstab entscheiden.  $E_1$  und  $E_2$  steigen mit der Stablänge stetig an bis  $l = 97$  cm. Die Werte aus  $l = 99$  cm und  $l = 100$  cm fallen dagegen um ein Beträchtliches ab. Die Gesamtlänge des Stabes ist 102 cm. Der Abfall kann dadurch erklärt werden, daß bei einem zu kurz eingeklemmten Stab am festen Endquerschnitt noch Spannungen auftreten. Ist dies der Fall, so wird der elastische Widerstand des Stabes herabgesetzt. Bei dem untersuchten Stahlstab reichen die Spannungen etwa 4 cm ins eingeklemmte Ende hinein.

Die Größe  $\Delta l$  ergibt sich bei allen Stäben größenordnungsmäßig zu  $1/100$  der Stablänge  $l$ . Eine Abhängigkeit von  $l$  ist nicht feststellbar.

Überraschenderweise stimmen die Elastizitätsmodule, die aus der Dämpfung und dem Resonanzschlag ermittelt sind, sehr gut mit den wahren überein. Der Einfluß der Klemmung scheint nicht vorhanden zu sein. Er ist sicherlich durch andere Effekte kompensiert. Der volle Resonanzausschlag wird theoretisch erst in unendlich langer Zeit erreicht. Die gemessene Amplitude wird demnach um einige Prozent zu klein ausfallen. In der Rechnung ergibt dies einen zu großen Wert des Elastizitätsmoduls.

Bemerkenswert sind die Versuche 4 und 5 der Tabelle 4. Hier wurde dieselbe Klemmvorrichtung wie bei den anderen Untersuchungen benutzt. Jedoch war zwischen die Stahlplatten und dem Stab auf jeder Seite eine 1 bzw. 5 mm starke Schicht Gummi eingelegt. Der Schraubstock wurde fest zusammengedreht. Die bei diesen Versuchen nach den drei Methoden ermittelten Elastizitätsmodule liegen alle dicht beieinander und sind im Mittel wenig kleiner als der wahre Wert. Dieses Ergebnis ist zunächst verblüffend. Gummi schmiegt sich besser an den Stab an. Es findet eine innigere Berührung statt. Andererseits ist durch die starke Pressung die Grenze der Elastizität des Gummis überschritten. Bei etwas gelockerter Klemmung führte der Stab keine reinen Schwingungen mehr aus. Durch die elastische Kraft des Gummis wurde gleichzeitig eine zweite Schwingung erzeugt, die sich der Eigenschwingung des Stabes überlagert.

Versuch 6 (Tabelle 4) wurde ausgeführt, als das Eschenholz noch frisch war. Die anderen Untersuchungen liegen zeitlich ein halbes Jahr später. Der große Unterschied des Elastizitätsmoduls ist durch die Austrocknung des Materials bedingt.

Die Ergebnisse am Glasstab streuen sehr. Sie sind unsicher. Wegen der Sprödigkeit des Materials ist eine gute Klemmung nicht möglich, da es leicht ausspringt und bricht.

Durch die Untersuchungen an den Stäben sollte zunächst, wie schon erwähnt, nachgeprüft werden, ob und inwieweit die Messungen auf den Pfeilern der Werrabrücke und deren Ergebnisse richtig und brauchbar sind. Vor allem galt es, die Methode zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Dämpfung und dem Resonanzausschlag, die ja bei den Pfeilern zuerst angewandt wurde, auf ihre Allgemeingültigkeit und Leistungsfähigkeit zu untersuchen. Weiterhin sollten die Versuche die Grundlage schaffen für Untersuchungen von Gesteinsproben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Erschütterungen im Boden hängt vom Elastizitätsmodul des Materials, durch welche die Welle läuft, ab. Jedoch ist noch nicht bewiesen, ob die Fortpflanzung genau nach den theoretischen Gesetzen erfolgt. Dies kann nachgeprüft werden durch Elastizitätsbestimmungen an Proben von Gesteinen, bei denen die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen bestimmt ist. Zweckmäßig gibt man für solche Bestimmungen den Proben die Gestalt von Stäben rechteckigen Querschnitts und wendet eine oder mehrere der vier oben aufgezählten Methoden an. Soweit es die Härte und Festigkeit des Materials erlaubt, fertige man am besten möglichst lange Stäbe an und untersuche diese mit den Methoden a und c. John M. Ide [10] fand, daß bei Gesteinen, die aus Schwingungen, also dynamisch, bestimmten Elastizitätsmodule größer sind als die statisch durch Kompression bestimmten. Er schreibt diesen Effekt dem Porenvolumen zu. Für die Ausbreitung elastischer Wellen kommt aber sicher nur der dynamische Wert in Frage. In der Technik werden dynamische Methoden zur Prüfung von Baustoffen benutzt. G. Grime und E. J. Eaton [11] formten aus Baustoffen Stäbe und bestimmten deren Elastizitätsmodul, indem sie sie einseitig einspannten und die Frequenzen der Biegeschwingungen zählten. Aus sprödem und bröckeligem Material kann man jedoch nur kurze Probestäbe ausschneiden. Sie können dann nur nach der Methode d behandelt werden. Man erhält aber auch damit brauchbare Ergebnisse. Ich untersuchte Stäbe aus sehr weichem Gestein. Die Bindung der einzelnen Mineralien war sehr gering. Die Stäbe konnten bei großer Vorsicht und Sorgfalt nicht länger als 10 cm geschnitten werden. Der Querschnitt war etwa  $1 \times 1$  cm. Ich legte sie mit den Enden auf zwei Schneiden und maß die Verdrehung der Endflächen bei Belastung der Stabmitte. Die Messungen ergaben Werte des Elastizitätsmoduls, die sehr wahrscheinlich sind. Eine Kontrolle nach einem anderen Verfahren liegt noch nicht vor.

**Zusammenfassung.** Beim Bau der Reichsautobahnbrücke über das Werratal bei Hedemünden wurden vom Geophysikalischen Institut in Göttingen Messungen der Biegeschwingungen der Pfeiler I und II angestellt, als diese noch frei für sich standen. Sie wurden zu freien und erzwungenen Schwingungen angeregt. Aus der Eigenperiode der freien Schwingungen konnte der Elastizitätsmodul der Pfeiler berechnet werden, indem sie als einseitig eingespannte Stäbe behandelt wurden. Ferner wurde nach einer neuen Methode bei den erzwungenen Schwingungen, die durch einen auslaufenden Exzenter erzeugt wurden, der Elastizitätsmodul aus dem Maximalausschlag in der Resonanz, der Dämpfung und der Exzenter-

kraft ermittelt. Die beiden Methoden lieferten übereinstimmende Ergebnisse. Die Werte für die beiden Pfeiler weichen jedoch beträchtlich voneinander ab. Der Grund hierfür ist in dem verschiedenen Untergrund und in den verschiedenen Fundamenten zu suchen. Aus dem Elastizitätsmodul wurde durch Rechnung das Verhalten der Pfeiler gegenüber äußeren Kräften, wie Wind und Erschütterungen, abgeschätzt.

Zur Nachprüfung der bei den Pfeilern benutzten Methoden zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurden sie im Laboratorium auf einseitig eingeklemmte Stäbe aus Holz, Glas und Metall angewandt. Der Elastizitätsmodul wurde aus der Eigenfrequenz, bei statischer Belastung und aus dem Resonanzausschlag und der Dämpfung bestimmt. Hierbei wurde der Einfluß der Klemmung auf die Ergebnisse der verschiedenen Methoden näher untersucht und gezeigt, wie man ihn rechnerisch berücksichtigen kann. Eine Verfälschung der Ergebnisse der drei Methoden durch die Klemmung trat nicht ein, als zwischen die Klemmvorrichtung eine Lage Gummi gelegt wurde. Die Methode der Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus dem Resonanzausschlag und der Dämpfung lieferte auch bei den Stäben richtige Werte. Die Größe des Resonanzausschlages ergab sich als unabhängig von den angeschraubten Kopflasten und unabhängig von der Einklemmung. Am Schluß der Arbeit wird darauf hingewiesen, wie man am besten den Elastizitätsmodul von Gesteinen im Laboratorium bestimmt.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Angenheister für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Desgleichen danke ich den Herren der Firma Polenski & Zöllner für ihr Entgegenkommen und Hilfe bei den Messungen an der Werrabrücke.

### Literatur

- [1] Hütte I, 26. Aufl.
- [2] Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik.
- [3] Auerbach u. Hort: Handb. d. techn. u. physik. Mech. **3**, 1.
- [4] H. Reich: Geophysik für Bergleute und Geologen. I. Teil.
- [5] W. Hort: Technische Schwingungslehre, 2. Aufl.
- [6] A. Esau u. M. Hempel: Über die Eigenfrequenz von einseitig eingespannten Stäben. Zeitschr. f. techn. Phys. **11** (1930), Nr. 1.
- [7] A. Esau u. M. Hempel: Über die Eigenfrequenzen einseitig eingespannter prismatischer Stäbe mit Zusatzmassen am freien Ende. Zeitschr. f. techn. Phys. **11** (1930), Nr. 5.
- [8] Th. Pöschl: Bemerkungen zu der Note von A. Esau u. M. Hempel über die Eigenfrequenz eines einseitig eingespannten Stabes. Zeitschr. f. techn. Phys. **11** (1930), Nr. 6.
- [9] A. Thum u. F. Wunderlich: Der Einspannwert. Zeitschr. d. VDI. **79** (1935), Nr. 38.
- [10] John M. Ide: Some Dynamic Methods for Determination of Young's Modulus. Rev. Scient. Instr. (N. S.) **6**, (1935), Nr. 10.
- [11] G. Grime u. E. J. Eaton: The Determination of Young's Modulus by Flexural Vibration. Phil. Mag. (7) **23** (1937), Nr. 152.

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Juni 1938.

---