

Werk

Jahr: 1938

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:14

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0014

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0014

LOG Id: LOG_0050

LOG Titel: Vorträge, gehalten auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, vom 19. bis 22. Oktober 1938 in Jena

LOG Typ: section

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Stellvertretende Vorsitzende: A. Defant, Prof. Dr., Direktor des Instituts für Meereskunde, Berlin NW 7, Georgenstr. 34—36.

L. Weickmann, Prof. Dr., Direktor des Geophysikalischen Instituts der Universität Leipzig, Talstr. 38.

Schatzmeister: G. Fanslau, Dr. phil. habil., Berlin-Charlottenburg, Oldenburgallee 19, II.

Schriftleiter der Zeitschrift für Geophysik: G. Angenheister, Prof. Dr., Direktor des Geophysikalischen Instituts Göttingen, Herzberger Landstr. 180.

Weitere Vorstandsmitglieder: O. Barsch, Berggrat Prof. Dr., Berlin N 4, Invalidenstraße 44. Privat: Berlin-Charlottenburg 5, Dahlmannstr. 27; H. Benndorf, Prof. Dr., Phys. Institut der Universität Graz (Steiermark); L. Mintrop, Prof. Dr., Breslau, Schloßplatz 2; R. Schwinner, Prof. Dr., Graz, Schillerstraße 5; E. Tams, Prof. Dr., Wissenschaftl. Rat a. d. Hauptstation f. Erdbebenforschung, Hamburg 36, Jungiusstr. 9; R. Tomaschek, Prof. Dr., Dresden-A 24, Bismarckplatz 18, Physikal. Institut der Techn. Hochschule.

Rechnungsprüfer: O. Hoelper, Ober-Reg.-Rat Dr., Direktor d. Meteorolog. Observatoriums, Potsdam, Telegraphenberg; G. Wüst, Prof. Dr., Berlin-Frohnau, Am Kaiserpark 39.

Vorträge, gehalten auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, vom 19. bis 22. Oktober 1938 in Jena

Zur Elektrodynamik des rotierenden Erdmagneten

Von **Teodor Schlomka**, Hannover. — (Mit 2 Abbildungen.)

Nach einleitenden Ausführungen über die „Unipolarinduktion“ wird darauf hingewiesen, daß bei der Rotation des Erdmagneten elektrische Feldstärken auftreten, die Ladungsverteilungen im Erdinnern, an der Erdoberfläche, in der mitrotierenden Atmosphäre und an ihrer äußeren Grenze erzeugen. Die Methoden zur Berechnung dieser Ladungsverteilungen werden ausführlich dargelegt. Der Einfluß der erhaltenen Raum- und Flächenladungen auf das luftelektrische Feld wird diskutiert. Zum Schluß wird eine Berechnung der elektromagnetischen Energieausstrahlung des rotierenden Erdmagneten gegeben.

A. Problemstellung. Läßt man die beiden Enden U und V eines ruhenden Leitungsdrahtes UGV an zwei verschiedenen Stellen eines rotierenden Magneten schleifen, so fließt im allgemeinen ein elektrischer Strom J im Leitungsdraht (Fig. 1). Diese 1832 von Faraday entdeckte Erscheinung trägt heutzutage den Namen „Unipolar-Induktion“, und zwar deshalb, weil der Induktionsstrom J

im Leitungsdraht nur dann fließt, wenn die Schleifstellen U und V unsymmetrisch zu den beiden Magnetpolen liegen, wenn sie mehr in der Nähe des *einen* der beiden Pole angebracht sind. (Das Maximum des Unipolarstromes tritt auf, wenn die eine Schleifstelle V gleich weit von den beiden Magnetpolen entfernt ist, während die andere Schleifstelle U unmittelbar an dem einen der beiden Magnetpole anliegt.)

Über die Tatsache des Unipolarinduktionsstromes besteht keinerlei Zweifel; über seine Ursache sind die Physiker aber schon 100 Jahre lang verschiedener Meinung.

Die eine Gruppe läßt das magnetische Induktionsfeld $\mathfrak{B}$ starr mit dem Magneten mitrotieren; durch das „Schneiden“ des Leiterstückes UGV wird dann dort

eine elektrische Feldstärke

$$\left[\frac{-\mathbf{v}^{(B)}}{c} \cdot \mathfrak{B} \right] \text{ erzeugt } (\mathbf{v}^{(B)} =$$

Geschwindigkeit der $\mathfrak{B}$ -Linien beim „Schneiden“).

Die zweite Gruppe da-

gegen läßt die ebenfalls

als physikalisch existierend

angesehenen $\mathfrak{B}$ -Linien an

der Rotation nicht mit teil-

nehmen, so daß sie UGV

jetzt nicht „schneiden“; ein

„Schneiden“ erfolgt dann

aber im Magnetinnern; es

tritt daher dort eine elek-

trische Feldstärke $\left[\frac{\mathbf{v}^{(M)}}{c} \cdot \mathfrak{B} \right]$

auf ($\mathbf{v}^{(M)}$ = Geschwindigkeit

der einzelnen Magnetteile).

Eine dritte Gruppe wie-

der verzichtet überhaupt auf

das Bild des $\mathfrak{B}$ -Linienschnei-

dens und hält sich lediglich

an das Induktionsgesetz

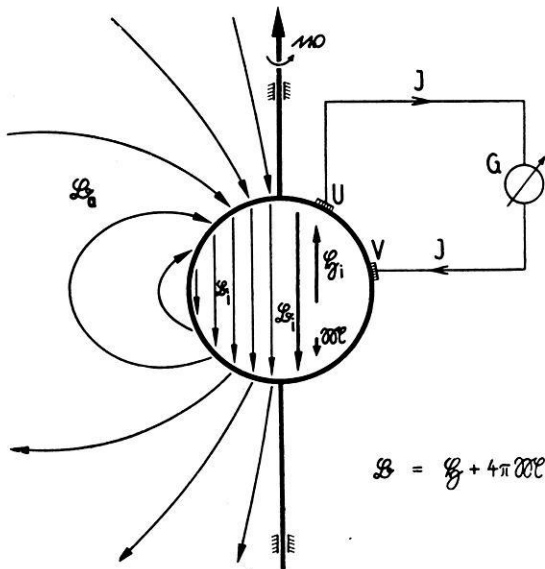


Fig. 1. Unipolarinduktion bei homogen magnetisierter Kugel. Der Drehvektor $\mathbf{w}$ ist der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ parallel. U und V sind die Schleifstellen. Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion $\mathfrak{B}$ und magnetischer Feldstärke $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{B}_a = \mathfrak{H}_a$; $\mathfrak{B}_i = \frac{8\pi}{3} \cdot \mathfrak{M} = -2 \cdot \mathfrak{H}_i$.

$$\oint \mathfrak{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \cdot \int \mathfrak{B} \cdot d\mathbf{f};$$

sie muß aber dabei als vom Induktionsfluß durchsetzte Fläche eine sich dauernd vergrößernde Fläche in Rechnung setzen, die gebildet wird von der Fläche UGV und einer sich immer mehr aufwickelnden Fläche, die von einer auf der Magnetoberfläche gezogenen anfänglichen Verbindungslinie der Schleifstellen U und V bei der Rotation überstrichen wird.

Eine vierte Gruppe verzichtet ebenso auf die unmittelbare Angabe der den Strom J treibenden elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und begnügt sich mit der aus dem Induktionsgesetz erschlossenen Angabe der bei der Rotation auftretenden Wirbel von $\mathfrak{E}$.

Eine fünfte Gruppe schließlich überträgt die nach der speziellen Relativitätstheorie zu jedem *linear bewegten* Magneten gehörende elektrische Polarisierung ohne weiteres auf den Fall des *rotierenden* Magneten und zieht die Relativität der Zeit zur Erklärung der Unipolarinduktion heran.

Zu diesen *rein physikalischen* Fragen soll demnächst an anderem Ort Stellung genommen werden; hier sei nur auf ein damit in engstem Zusammenhang stehendes *geophysikalisches* Problem eingegangen:

Die Erde ist ein rotierender Magnet, dessen Magnetisierungsachse nicht mit der Rotationsachse zusammenfällt; welche Folgerungen ergeben sich hieraus:

1. in bezug auf das Auftreten elektrischer Ladungen im Erdinnern, an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre?

2. in bezug auf das für einen mitrotierenden Beobachter ja tatsächlich vorhandene luftelektrische Feld in der freien Atmosphäre?

3. in bezug auf die elektromagnetische Energieausstrahlung des rotierenden Erdmagneten?

Zur vereinfachten mathematischen Behandlung dieser Fragen betrachten wir die Erde als homogen magnetisierte Kugel des Radius R und der Magnetisierung $\mathfrak{M}$. Der Winkel zwischen $\mathfrak{M}$ und dem Drehvektor ω sei ψ (Fig. 2). Die Atmosphäre bis zur Höhe h oberhalb des Erdbodens mache die Rotation des Erdkörpers vollkommen mit. Der angrenzende Raum $r > R + h$ sei absolutes Vakuum.

B. Grundgleichungen und Vereinfachungen. Die Antwort auf die eben gestellten drei Fragen hängt natürlich z. T. davon ab, welcher Ansicht über die Ursache der Unipolarinduktion man sich anschließt. Das im folgenden benutzte

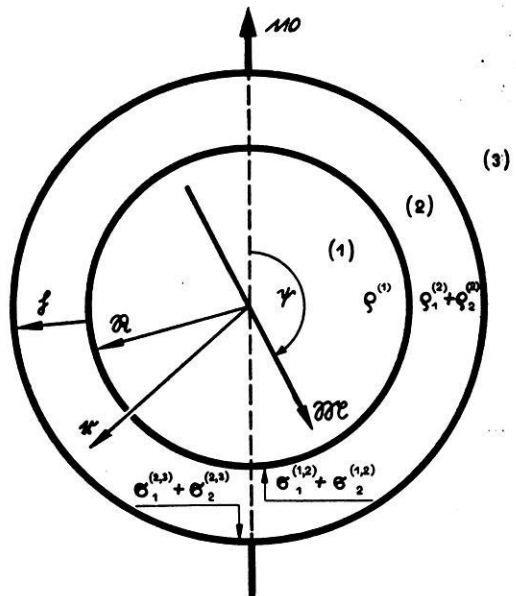


Fig. 2. Der rotierende Erdmagnet. Raum (1) = Erdkörper; Raum (2) = mitrotierende Atmosphäre; Raum (3) = angrenzendes Vakuum. ρ = bei der Rotation auftretende Raumladungsdichte; σ = bei der Rotation auftretende Flächenladungsdichte

Verfahren deckt sich in Strenge mit keinem der obenerwähnten fünf Standpunkte. Das einzige, was wir zugrunde legen, sind die beiden Maxwell'schen Originalgleichungen für die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ [1]. Ihre Kombination liefert:

$$\mathfrak{E} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} \right] - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Darin bedeuten φ das elektrostatische Skalarpotential, $\mathfrak{A}$ das elektromagnetische Vektorpotential, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Materie oder Ladung gegenüber dem Ruhssystem, und $\partial/\partial t$ die zeitliche Änderung an einem im Ruhssystem festgehaltenen Punkte. Als Ruhssystem wählen wir das in der Astronomie verwendete Inertialsystem, in dem die Fixsterne im Mittel ruhen.

Die drei Teile der elektrischen Feldstärke wollen wir in Übereinstimmung mit einem früheren Vorschlag [2] folgendermaßen benennen:

$$\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} \right] = \mathfrak{E}_{kin} = \text{elektrokinetische Feldstärke} . \quad . \quad (1a)$$

$$- \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \mathfrak{E}_{ton} = \text{elektrotonische Feldstärke} . \quad . \quad . \quad (1b)$$

$$- \text{grad } \varphi = \mathfrak{E}_{stat} = \text{elektrostatische Feldstärke} . \quad . \quad . \quad (1c)$$

Die beiden in (1) auftretenden Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ sind bei Beschränkung auf quasistationäre Vorgänge gegeben durch

$$\varphi_{quasistat} = \int \varrho \frac{d\tau}{a} - \text{Div } \mathfrak{P} \cdot df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mathfrak{A}_{quasistat} = \frac{1}{c} \cdot \int \mathbf{j} + \frac{c}{a} \cdot \text{rot } \mathfrak{M} \cdot d\tau + \frac{1}{c} \cdot \int \mathbf{j}_fl + \frac{c}{a} \cdot \text{Rot } \mathfrak{M} \cdot df \quad . \quad . \quad (3)$$

mit ϱ = wahre Raumladungsdichte, σ = wahre Flächenladungsdichte, $\mathbf{j}$ = räumliche Stromdichte, $\mathbf{j}_fl$ = Flächenstromdichte, $\mathfrak{P}$ = elektrische Polarisierung, $\mathfrak{M}$ = magnetische Polarisierung = Magnetisierung und a = Abstand des Aufpunktes vom Volumenelement $d\tau$ bzw. vom Flächenelement df .

Es ist oft bequemer, $\mathfrak{E}$ nicht nach Gleichung (1) zu berechnen, sondern nach der unter Benutzung bekannter Vektorbeziehungen leicht erhältlichen [3] umgeformten Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \left[\frac{\mathbf{v}'}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} \right] - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi + \text{grad} \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{c} \right) . \quad . \quad . \quad (4)$$

Darin bedeutet $\mathbf{v}'$ die Geschwindigkeit der Materie oder Ladung gegenüber einem irgendwie bewegten System; $\frac{\partial'}{\partial t}$ ist die zeitliche Änderung an einem in diesem bewegten System festgehaltenen Punkte;

$$\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr} = \mathbf{v}_0 + [\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

vernachlässigt werden können, berechnen unter dieser Voraussetzung ϱ und σ und überzeugen uns dann nachher davon, daß diese Annahme tatsächlich zu Recht besteht.

Die Auswertung [4] des so vereinfachten, über die Erdoberfläche zu erstreckenden Integrals

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\text{Rot } \mathfrak{M}}{a} \cdot df \quad (9b)$$

liefert

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \cdot [\mathfrak{M}r] \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}^{(3)} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3 \cdot r^3} \cdot [\mathfrak{M}r] \quad (10)$$

wobei wir, wie immer im folgenden, durch die rechts oben stehenden eingeklammerten Indizes 1, 2 und 3 auf den Erdkörper, die mitrotierende Atmosphäre und den ruhenden Außenraum hinweisen (vgl. Fig. 2).

C. Gang der Rechnung. Der Grund für das Auftreten von Ladungsverteilungen ist folgender: Bei Beginn der Rotation wirken zunächst die elektrotonische und die elektrokinetische Feldstärke. $\mathfrak{E}_{ton}$ tritt auf, weil infolge der Rotation an im Fixsternsystem (Ruhsystem) festgehaltenen Punkten zeitliche Änderungen des Vektorpotentials vorhanden sind. $\mathfrak{E}_{ton}$ wirkt sowohl auf ruhende, als auch auf mitrotierende Materie oder Ladung; der Bewegungszustand des Substrats ist für die Berechnung des elektrotonischen Feldstärkeanteils bedeutungslos. Er spielt dagegen die entscheidende Rolle bei der elektrokinetischen Feldstärke, die den Bewegungszustand der betrachteten Materie oder Ladung voll erfaßt; $\mathfrak{E}_{kin}$ wirkt eben nur auf Materie oder Ladung, die sich gegen das Ruhsystem bewegt*).

Die bei der Rotation auf ein mitrotierendes Substrat wirkende gesamte primäre Feldstärke $\mathfrak{E}_{prim} = \mathfrak{E}_{kin} + \mathfrak{E}_{ton}$ ist nun, wie (6) mit $\varphi = 0$ zeigt, gegeben durch

$$\mathfrak{E}_{prim} = \text{grad} \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{c} \right) \quad (11)$$

$\mathfrak{E}_{prim}$ ist also eine *Gradientenfeldstärke* und kann daher in einem Leiter durch das elektrostatische Feld der von ihr hervorgerufenen Ladungsverteilung kompensiert werden. Da $\mathfrak{E}_{prim}$ außerdem noch an jeder Stelle des mitrotierenden Substrats *zeitunabhängig* ist, spielt die Größenordnung der elektrischen Leitfähigkeit des Substrats keine Rolle, wenn man nur die bei konstantem $\mathbf{w}$ sich schließlich aus-

*) Es ist deshalb auch in der Literatur üblich, nur die beiden (auf ein im Ruhsystem ruhendes Substrat einwirkenden) Feldstärkeanteile $\mathfrak{E}_{ton} + \mathfrak{E}_{stat}$ als „elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}^{**}$ “ zu bezeichnen, den Einfluß des Bewegungszustandes durch eine zusätzliche Gleichung für die Kraftdichte: $\mathfrak{F} = \varrho \cdot \left(\mathfrak{E}^{*} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathfrak{B} \right] \right)$ zu erfassen und den Ausdruck $\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathfrak{B} \right]$ dann als „beim bewegten Substrat auftretende elektrische *Scheinfeldstärke*“ zu bezeichnen. Auf die Durchrechnung irgendeines speziellen Problems hat diese nur etwas andersartige Bezeichnungsweise natürlich keinen Einfluß.

bildende Ladungsverteilung ermitteln will. Das ist aber im vorliegenden Problem der Fall. Wir können daher für unseren Zweck den Erdkörper und die mitrotierende Atmosphäre als vollkommene Leiter ansehen. Nach Eintritt des stationären Zustandes (nach Ausbildung der Ladungsverteilung) wird also das gesamte elektrische Feld im Erdinnern und in der mitrotierenden Atmosphäre Null sein: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{kin} + \mathfrak{E}_{ion} + \mathfrak{E}_{stat} = 0$. Daraus folgt nach (1) und (6):

$$\text{grad } \varphi = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} \right] - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \text{grad} \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{c} \right) \dots \dots (12)$$

Hiermit ergibt sich aus der Poissonschen Gleichung

$$-4\pi \varrho = \Delta \varphi \equiv \text{div grad } \varphi \dots \dots \dots (12a)$$

und wegen der aus (10) resultierenden Beziehung $\text{div } \mathfrak{A} = 0$:

$$-4\pi \varrho = \text{div} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} \right] = \Delta \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{c} \right) \dots \dots (13)$$

Mit $\mathbf{v} = [\mathbf{w}\mathbf{r}]$ und dem $\mathfrak{A}^{(1)}$ -Wert von (10) erhält man [4] als Raumladungsdichte innerhalb des Erdkörpers:

$$\varrho^{(1)} = - \frac{1}{3} \frac{wM}{c} \cdot \cos \psi \dots \dots \dots (14)$$

Entsprechend liefert (13) unter Verwendung des $\mathfrak{A}^{(2)}$ -Wertes von (10) als Raumladungsdichte $\varrho^{(2)} = \varrho_1^{(2)} + \varrho_2^{(2)}$ innerhalb der mitrotierenden Atmosphäre [4]:

$$\varrho_1^{(2)} = - \frac{2}{c} \frac{wM}{c} \cdot \cos \psi \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \dots \dots (15)$$

$$\varrho_2^{(2)} = - \frac{wM}{c} \cdot \sin \psi \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \sin (2\vartheta) \cdot \cos \lambda \dots \dots (16)$$

Dabei ist ϑ der Winkelabstand vom geographischen Nordpol und λ die geographische Länge in einem mit der Erde mitrotierenden Kugelkoordinatensystem, bei dem die Magnetisierungsachse in die Meridianebene $\lambda = 0$ fällt.

Die an der Erdoberfläche auftretende Flächenladungsdichte $\sigma^{(1,2)}$ kann aus der (12a) entsprechenden Gleichung

$$-4\pi \sigma = \text{Div grad } \varphi \equiv \mathbf{n}^{(1,2)} \cdot \{ \text{grad } \varphi^{(2)} - \text{grad } \varphi^{(1)} \} \dots \dots (17)$$

ermittelt werden. Es ist der Normalen-Einheitsvektor $\mathbf{n}^{(1,2)} = \mathfrak{R}/R$; $\text{grad } \varphi^{(2)}$ und $\text{grad } \varphi^{(1)}$ sind aus (12) mit (10) zu entnehmen. Man hat also:

$$-4\pi \sigma^{(1,2)} = \frac{\mathfrak{R}}{R} \cdot \left\{ \text{grad} \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr}^{(2)} \cdot \frac{\mathfrak{A}^{(2)}}{c} \right) - \text{grad} \left(\mathbf{v}_{f\ddot{u}hr}^{(1)} \cdot \frac{\mathfrak{A}^{(1)}}{c} \right) \right\} \dots \dots (18)$$

bzw.

$$-4\pi \sigma^{(1,2)} = \frac{\mathfrak{R}}{R} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\mathbf{v}^{(2)}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A}^{(2)} \right) - \left[\frac{\mathbf{v}^{(1)}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{A}^{(1)} \right] \right] - \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}^{(1)}}{\partial t} \right) \right\} (19)$$

$\mathfrak{U}^{(2)}$ und $\mathfrak{U}^{(1)}$ stehen nun nach (10) stets senkrecht zu $\mathbf{r}$; mithin ist auch $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}$ stets zu $\mathbf{r}$ senkrecht. Gleichung (19) vereinfacht sich so zu:

$$-4\pi\sigma^{(1,2)} = \frac{\Re}{R} \cdot \left\{ \left[\frac{\mathbf{v}^{(2)}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{U}^{(2)} \right] - \left[\frac{\mathbf{v}^{(1)}}{c} \cdot \text{rot } \mathfrak{U}^{(1)} \right] \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Die Ausrechnung von (18) oder (20) ergibt dann [4] für die an der Erdoberfläche auftretende Flächenladungsdichte $\sigma^{(1,2)} = \sigma_1^{(1,2)} + \sigma_2^{(1,2)}$:

$$\sigma_1^{(1,2)} = \frac{wM}{c} \cdot R \cdot \cos \psi \cdot \sin^2 \vartheta \dots \dots \dots (21)$$

$$\sigma_2^{(1,2)} = -\frac{wM}{2c} \cdot R \cdot \sin \psi \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos \lambda \dots \dots \dots (22)$$

Die Berechnung der auf dem äußeren Rande der mitrotierenden atmosphärischen Schicht auftretenden Flächenladungsdichte $\sigma^{(2,3)}$ kann nicht nach der im Anschluß an Gleichung (17) entwickelten Methode erfolgen, weil $\mathfrak{E}^{(3)}$ im allgemeinen von Null verschieden ist, weil also auch infolgedessen die Gleichung (12) im Medium 3 nicht gilt. Hier führt nun folgendes Verfahren zum Ziel:

In den Leitern 1 und 2 gilt nach (12):

$$\text{grad} \left(\varphi - \mathbf{v}_{\text{führ}} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{c} \right) = 0 \dots \dots \dots (23)$$

Dabei ist φ das Potential aller Ladungsdichten, also das von $\varrho^{(1)}$, $\sigma_1^{(1,2)}$, $\sigma_2^{(1,2)}$, $\varrho_1^{(2)}$, $\varrho_2^{(2)}$ und der noch unbekannten Flächenladungsdichte $\sigma^{(2,3)}$. Aus (23) folgt demnach:

$$\varphi_{\sigma^{(2,3)}} = \left(\mathbf{v}_{\text{führ}} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{c} \right) - \varphi_{\varrho^{(1)}} - \varphi_{\sigma_1^{(1,2)}} - \varphi_{\sigma_2^{(1,2)}} - \varphi_{\varrho_1^{(2)}} - \varphi_{\varrho_2^{(2)}} + K. \quad (24)$$

Die Potentiale auf der rechten Seite kann man unter Benutzung von (14), (21),

(22), (15) und (16) berechnen; ebenso ist $\left(\mathbf{v}_{\text{führ}} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{c} \right)$ nach (8) und (10) angebbar.

Es ist also die ganze rechte Seite bis auf die Konstante K bekannt. Mit anderen Worten: Das von der gesuchten Flächenladungsdichte $\sigma^{(2,3)}$ in den Leitern 1 und 2 erzeugte Potential ist nach (24) bis auf die Konstante K bestimmt. Wegen der Stetigkeit des Potentials kennt man dann auch den Wert des von $\sigma^{(2,3)}$ auf der Grenzfläche (2, 3) erzeugten Potentials $\bar{\varphi}_{\sigma^{(2,3)}}$. Man entwickelt nun dieses Potential nach Kugelfunktionen:

$$\bar{\varphi}_{\sigma^{(2,3)}} = f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) \dots \dots \dots (25)$$

und erhält dann sofort nach bekannten Methoden der Potentialtheorie [5] die gesuchte Flächenladungsdichte:

$$\sigma^{(2,3)} = \frac{1}{4\pi \cdot (R + h)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \cdot Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (26)$$

(Der Wert von K wird dadurch bestimmt, daß die Summe aller von $\varrho^{(1)}$, $\sigma_1^{(1,2)}$, $\sigma_2^{(1,2)}$, $\varrho_1^{(2)}$, $\varrho_2^{(2)}$ und $\sigma^{(2,3)}$ herrührenden Ladungen insgesamt Null ergeben muß.)

Die Durchführung [4] liefert für die auf dem äußeren Rande der mitrotierenden atmosphärischen Kugelschale auftretende Flächenladungsdichte $\sigma^{(2,3)} = \sigma_1^{(2,3)} + \sigma_2^{(2,3)}$:

$$\sigma_1^{(2,3)} = -\frac{2wM}{3c} \cdot \frac{R^3}{(R+h)^3} \cdot \cos \psi \cdot \cos^2 \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\sigma_2^{(2,3)} = -\frac{wM}{3c} \cdot \frac{R^3}{(R+h)^3} \cdot \sin \psi \cdot \sin (2\vartheta) \cdot \cos \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Nachträglich haben wir uns jetzt noch davon zu überzeugen, daß die allen ϱ - und σ -Berechnungen zugrunde liegende Voraussetzung (vgl. den vorletzten Absatz des Abschnittes B) zu Recht besteht. Zum vereinfachten Größenordnungsvergleich kondensieren*) wir die auf der Kugel des Radius $R+h$ befindlichen Flächenladungsdichten $\sigma_1^{(2,3)}$ und $\sigma_2^{(2,3)}$ auf die Kugel des Radius R . Ebenso denken wir uns die $\varrho^{(1)}$, $\varrho_1^{(2)}$ und $\varrho_2^{(2)}$ entsprechenden Raumladungen als Flächenladungen auf der Kugel des Radius R kondensiert. Wir erhalten dann dort eine Flächenladungsdichte σ^* der Größenordnung $w \cdot M \cdot R/c$, deren Beitrag $\sigma^* \cdot v$ zum Vektorpotential die Größenordnung $M \cdot w^2 \cdot R^2/c$ hat. Die Größenordnung von $c \cdot \text{Rot } \mathfrak{M}$ hingegen ist $c \cdot M$. Die Beiträge aller Konvektionsstromdichten $\varrho \cdot v$ bzw. $\sigma \cdot v$ zum Vektorpotential können also dann gegen den Beitrag $c \cdot \text{Rot } \mathfrak{M}$ des Magnetisierungsstromes vernachlässigt werden, wenn

$$\left(\frac{w \cdot R}{c}\right)^2 \ll 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ist. Bei Benutzung der im nächsten Abschnitt angegebenen Zahlenwerte von w , R und c erhält man $(w \cdot R/c)^2 = 2.4 \cdot 10^{-12}$. Die Ungleichung (29) ist also durchaus erfüllt; unsere zur Gleichung (9b) führende Annahme war demnach zulässig.

D. Unipolarinduktion und Lufterlektrizität. Die Tatsache, daß die Erde ein rotierender Magnet ist, hat im Laufe der letzten 100 Jahre des öfteren Anlaß gegeben zu Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Unipolarinduktion und Lufterlektrizität. Wir gehen auf die heute nur noch historisches Interesse beanspruchenden diesbezüglichen Arbeiten von Faraday (1832), Plücker (1852), Riecke (1877), Edlund (1878, 1884, 1888), Exner-Czermak (1886), Hoppe (1886, 1902), Budde (1887), Lecher (1894) und Vollgraff (1904) nicht näher ein. Nur zu zwei neueren Arbeiten von Wait-Sverdrup (1927) und Hosi (1937) sei kurz Stellung genommen.

*) „Kondensieren“ = Radiales Verschieben von Ladungen. — Daß die zu (9b) führende Vernachlässigung zulässig ist, läßt sich natürlich auch ohne Benutzung des „Kondensierens“ durch unmittelbares Ausrechnen des von allen Konvektionsstromdichten erzeugten Vektorpotentialfeldes zeigen; doch führt dies Verfahren auf z. T. recht umständliche Rechnungen.

Die von uns berechneten Ladungsdichten geben natürlich Anlaß zu einem elektrostatischen Feld. Aber diesem elektrostatischen Feld $\mathfrak{E}_{stat}$ wird durch ein elektrodynamisches Feld $\mathfrak{E}_{dyn} = \mathfrak{E}_{kin} + \mathfrak{E}_{ton}$ überall das Gleichgewicht gehalten. Das Gesamtfeld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{kin} + \mathfrak{E}_{ton} + \mathfrak{E}_{stat}$ ist an jeder Stelle des rotierenden Erdkörpers und der mitrotierenden Atmosphäre exakt gleich Null. Die Unipolarinduktion liefert daher auch nicht die Spur eines Beitrages zu dem ja tatsächlich in der freien Atmosphäre vorhandenen „luftelektrischen“ Feld. Und ebenso kann die Unipolarinduktion natürlich auch keinerlei Strom im Erdinnern erzeugen, wie Hosi [6] irrtümlich meint.

Tabelle der Raum- und Flächenladungsdichten

(Benutzte Zahlenwerte: $R = 6.37 \cdot 10^8$ cm; $h = 5 \cdot 10^7$ cm; $M = 8 \cdot 10^{-2}$ cm $^{-1/2} \cdot$ g $^{1/2} \cdot$ sec $^{-1}$; $w = 7.29 \cdot 10^{-5}$ sec $^{-1}$; $\varphi = 168.5^\circ$; $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm $^1 \cdot$ sec $^{-1}$; die Ladungsdichten sind in elektrostatischen Einheiten angegeben.)

	Von den elektrodynamischen Kräften der Erdrotation herrührend:	Nach luftelektrischen Messungen oder Extrapolationen:
Flächenladungsdichte an der äußeren Grenze der mitrotierenden Atmosphäre	$\sigma_1^{(2,3)} = + 7 \cdot 10^{-8} \cdot \cos^2 \vartheta$ $\sigma_2^{(2,3)} = - 7 \cdot 10^{-9} \cdot \sin(2 \vartheta) \cdot \cos \lambda$	Unbekannt
Raumladungsdichte in der mitrotierenden Atmosphäre	$\varrho_1^{(2)} = + 4 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right)$ $\varrho_2^{(2)} = - 4 \cdot 10^{-17} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \sin(2 \vartheta) \cdot \cos \lambda$	$\varrho_{80 \text{ km}} = + 3 \cdot 10^{-19}$ $\varrho_{50 \text{ km}} = + 7 \cdot 10^{-16}$ $\varrho_{30 \text{ km}} = + 1 \cdot 10^{-13}$ $\varrho_{15 \text{ km}} = + 7 \cdot 10^{-12}$ $\varrho_{6 \text{ km}} = + 8 \cdot 10^{-11}$ $\varrho_{1 \text{ km}} = + 3 \cdot 10^{-10}$ $\varrho_{1 \text{ m}} = + 1 \cdot 10^{-7}$
Flächenladungsdichte an der Erdoberfläche	$\sigma_1^{(1,2)} = - 1 \cdot 10^{-7} \cdot \sin^2 \vartheta$ $\sigma_2^{(1,2)} = - 1 \cdot 10^{-8} \cdot \sin(2 \vartheta) \cdot \cos \lambda$	$\sigma = - 3 \cdot 10^{-4}$
Raumladungsdichte im Erdinnern	$\varrho^{(1)} = + 3 \cdot 10^{-16}$	Null

Wait und Sverdrup [7] betrachten nur einen Teil des gesamten elektrischen Feldes, nämlich nur die elektrokinetische Feldstärke*). Wenn man so vorgeht, dann kann man natürlich elektrische Felder erhalten, die zu Strömen in der Atmosphäre Anlaß geben; denn $\mathfrak{E}_{ton}$ und $\mathfrak{E}_{kin}$ sind im allgemeinen ganz oder teilweise Raumwirbel-Felder. Aber auf die mitrotierende Atmosphäre wirken eben stets alle drei Teile der elektrischen Feldstärke gemeinsam, und deren Summe ist überall

*) Und diese dazu noch nur an zwei speziellen Stellen, nämlich nur unmittelbar über den beiden erdmagnetischen Polen! Außerdem werden den einzelnen Raumkomponenten des berechneten Feldes geeignet erscheinende Vorzeichen gegeben (!). Schließlich wird noch der „Strom“ proportional der Summe von sechs Skalarkomponenten der elektrischen Feldstärke gesetzt (!).

zu jeder Zeit Null. Die Unipolarinduktion erzeugt daher auch nicht in der Atmosphäre irgendwelche Ströme, weder zeitlich konstante, noch zeitlich veränderliche.

Im übrigen sind, wie die tabellarische Gegenüberstellung zeigt, die elektrodynamisch hervorgerufenen Ladungsdichten in den uns zugänglichen Gebieten um einige Größenordnungen kleiner als die aus lufterlektrischen Messungen erschlossenen Ladungsdichten [8].

E. Die Energieausstrahlung der Erde. Durch die Äquatorebene $\vartheta = 90^\circ$ und durch die Meridianebene $\lambda = \pm 90^\circ$ wird die Erdkugel in vier Quadranten geteilt. Der Ausdruck $\sin(2\vartheta) \cdot \cos \lambda$ hat in je zwei derartigen *nebeneinander* liegenden Quadranten *entgegengesetztes* und in je zwei *schräg gegenüberliegenden* Quadranten *gleiches* Vorzeichen. Die Ladungsdichten $\sigma_2^{(1,2)}$, $\varrho_2^{(2)}$ und $\sigma_2^{(2,3)}$ (Gleichungen 22, 16, und 28) enthalten nun alle den Faktor $\sin(2\vartheta) \cdot \cos \lambda$, geben der Erde also eine quadrupolartige Ladungsverteilung. Diese Quadrupol-Ladungsverteilung rotiert starr mit der Erde mit und bewirkt daher eine elektromagnetische Energieausstrahlung. Es erhebt sich die Frage, ob diese auf Kosten der mechanischen Rotationsenergie der Erde erfolgende Energieausstrahlung so groß ist, daß sie die Tageslänge merklich beeinflussen kann.

Im Hinblick auf eine kürzlich an anderem Orte erschienene diesbezügliche Arbeit [9] können wir uns hier kurz fassen. Die Erde strahlt aus zwei Gründen elektromagnetische Energie aus: Sie stellt sowohl einen rotierenden elektrischen Quadrupol, als auch einen rotierenden magnetischen Dipol dar. Es läßt sich nun durch eine Abschätzung zeigen, daß die Energieausstrahlung des rotierenden elektrischen Quadrupols etwa 10^6 mal kleiner ist als die Ausstrahlung, die von der durch die Rotation verursachten Änderung des magnetischen Momentes $\mathfrak{m}$ der Erde herrührt ($\mathfrak{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \mathfrak{M}$). Man kann sich also auf die Berechnung dieses Ausstrahlungsanteils beschränken.

Die Ausstrahlung eines magnetischen Dipols mit zeitlich veränderlichem Moment $\mathfrak{m}$ ist nun bekanntlich gegeben durch

$$W = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ddot{\mathfrak{m}}^2}{c^3} \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad \dots \quad (30)$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\ddot{\mathfrak{m}} = [\mathfrak{w} \dot{\mathfrak{m}}] = [\mathfrak{w} [\mathfrak{w} \mathfrak{m}]] = \mathfrak{w} \cdot (\mathfrak{w} \mathfrak{m}) - \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{w}^2.$$

Daraus folgt:

$$\ddot{\mathfrak{m}}^2 = \mathfrak{w}^2 \cdot ((\mathfrak{w} \mathfrak{m})^2 - (\mathfrak{m} \mathfrak{w})^2) = \mathfrak{w}^4 \cdot \mathfrak{m}^2 \cdot \sin^2 \psi \quad \dots \quad (31)$$

Einsetzen von (31) in (30) ergibt:

$$W = \frac{2 \mathfrak{w}^4 \mathfrak{m}^2 \sin^2 \psi}{3 c^3} \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad \dots \quad (32)$$

Hieraus erhält man für die bei konstanter Winkelgeschwindigkeit in T sec ausgestrahlte Energie:

$$E = \frac{2 m^2 w^4 T \sin^2 \psi}{3 c^3} = \frac{32 \pi^2 M^2 R^6 w^4 T \sin^2 \psi}{27 c^3} \text{ erg} (33)$$

Einsetzen der bekannten Werte von M, R, w, ψ und c liefert mit $T = 365 \cdot 86164 \text{ sec}$ als von der Erde in einem Jahre ausgestrahlte elektromagnetische Energie:

$$E_1 = 0.6 \cdot 10^{10} \text{ erg.}$$

Demgegenüber beträgt die mechanische Rotationsenergie der Erde:

$$E_2 = 2.6 \cdot 10^{36} \text{ erg.}$$

Die elektromagnetische Energieausstrahlung der Erde hat demnach keinen wesentlichen Einfluß auf die Konstanz der Erdrotation.

Literatur

- [1] J. Cl. Maxwell: Treatise on electricity and magnetism; Vol. 2, §§ 405, 598, 599, 619 (Oxford 1873).
- [2] T. Schlomka: Die Grundlagen der Elektrodynamik. Zeitschr. f. techn. Physik **17**, 459—463 (1936).
- [3] F. Emde: Auszüge aus J. Cl. Maxwells Elektrizität und Magnetismus. S. 86—89 (Braunschweig 1915).
- [4] Die hier im einzelnen nicht wiedergegebenen Rechnungen sind zum größten Teil von cand. G. Räder in einer Staatsexamensarbeit über die Methoden zur Berechnung der Ladungsverteilung rotierender Magnetkugeln durchgeführt worden. Einen Teil der Resultate findet man auch schon in einer Arbeit von E. Kohl „Über den Unipolareffekt einer leitenden magnetisierten Kugel“, Annalen d. Physik [4] **20**, 641—676 (1906); doch ist die Kohlsche Arbeit einiger Druckfehler und grundsätzlicher Fehlüberlegungen wegen nur mit Vorsicht zu verwenden.
- [5] A. Wangerin: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen **2**, 101—102 (Berlin u. Leipzig 1921).
- [6] T. Hosi: Über eine Ursache des Erdstromes. J. Meteorol. Soc. Jap. **15**, 63—64 (1937); Zentralbl. f. Geophys. **1**, 19 (1937).
- [7] G. R. Wait u. H. U. Sverdrup: Preliminary note on electromotive forces possibly produced by the earth's rotating magnetic field and on observed diurnal-variation of the atmospheric potential-gradient. Terr. Magnetism and Atm. Electr. **32**, 73—83 (1927).
- [8] H. Benndorf: Atmosphärische Elektrizität. Handb. d. Experimentalphys. **25**, 1, S. 260, 262 u. 292 (1928).
- [9] T. Schlomka: Zur Drehimpulsstrahlung der Erde. Ann. d. Phys. [5] **33**, 259—264 (1938).

Hannover, Seminar für theoretische Physik der Technischen Hochschule.