

Werk

Jahr: 1939

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:15

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0015

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0015

LOG Id: LOG_0037

LOG Titel: Der Einfluß eines mit der Tiefe veränderlichen Elastizitätsmoduls auf den Weg elastischer Wellen im Boden

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Wellenaufteilung an Unstetigkeitsflächen. Die beschriebenen Kopfwellenversuche sind nun auch noch für die Grenzschichten fest-gasförmig, flüssig-gasförmig und gasförmig-gasförmig erweitert worden, auch in all diesen Fällen konnte das Auftreten der neuen Kopfwelle nachgewiesen werden. Wir sind daher zu dem Schluß berechtigt, daß das Auftreten der neuen Kopfwelle eine gesetzmäßige Erscheinung der allgemeinen akustischen Wellenlehre darstellt. Aus diesem Grunde ist es notwendig, die bekannten Formeln für die Wellenaufteilung von *Zöpritz**) und *Knott****) einer Neubearbeitung zu unterziehen, denn die bisherigen Formeln gingen in ihrem Ansatz von drei Wellenfronten aus, der einfallenden, der reflektierten und der durchgehenden, während die vorliegenden Schlierenaufnahmen zweifelsfrei zeigen, daß als vierte Wellenfront noch die neue Kopfwelle hinzutritt. Die notwendige Neuaufteilung der Wellenenergie bezieht sich nicht etwa auf die Sprengseismik allein, sondern auf die analogen Vorgänge der allgemeinen Seismik und auf jegliche akustische Totalreflexion.

Die Kopfwelle in der Optik. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Kopfwellenphänomen auch bei der optischen Totalreflexion eine Rolle spielt, ist von mir schon in mehreren Arbeiten betont worden.

In einer noch unveröffentlichten gemeinsamen Arbeit von *Schardin* und mir konnten wir zeigen, daß die neue Kopfwelle auch bei der optischen Totalreflexion auftritt; *es ist hierdurch also erwiesen, daß die neue Kopfwelle eine gesetzmäßige Erscheinung darstellt, die für die gesamte Wellenlehre Gültigkeit hat.*

Berlin-Gatow, Luftkriegsakademie.

Der Einfluß eines mit der Tiefe veränderlichen Elastizitätsmoduls auf den Weg elastischer Wellen im Boden

(Mitteilung aus dem Inst. d. Deutsch. Forsch.-Ges. für Bodenmechanik, Berlin)

Von **A. Ramspeck**, Berlin-Charlottenburg. — (Mit 5 Abbildungen)

Wenn der Elastizitätsmodul in einem Boden mit der Tiefe stetig zunimmt, muß die Laufzeitkurve elastischer Wellen in diesem Boden eine krumme Linie werden. Die Theorie dieser gekrümmten Laufzeitkurven wird für den nichtgeschichteten und für den geschichteten Halbraum entwickelt. Ein Beispiel aus der Praxis beweist das gelegentliche Vorkommen krummliniger Laufzeitkurven.

Einleitung. 1. Belastungsversuche haben gezeigt, daß gelegentlich auf nicht bindigen Böden der Elastizitätsmodul auch bei kleinen Belastungen nicht konstant ist. So fand z. B. A. Föppl (Zentralbl. d. Bauv. 1897), daß die Einsenkungen

*) Gött. Nachr. VIIb, S. 57 (1919).

**) Phil. Mag. 1899.

der Oberfläche einer Kiesschicht bei einer örtlichen Belastung der Oberfläche viel stärker mit der Entfernung vom Lastangriffspunkt abnehmen, als nach der Formel von Boussinesq

$$\delta_z = \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \cdot \frac{P}{\pi \cdot r}$$

(δ_z = Einsenkung, m = Poisson-Zahl, E = Elastizitätsmodul, P = Last pro cm^2 , r = Abstand vom Lastangriffspunkt) zu erwarten ist. Die von Boussinesq vorausgesetzte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, d. h. die Konstanz des Elastizitätsmoduls, trifft also für manche Fälle nicht zu.

O. K. Fröhlich (Druckverteilung im Baugrund, Wien 1934) kommt auf Grund der von Terzaghi aufgestellten Formel für die sogenannte „Schwellkurve der Tone und Sande“ zu dem Schluß, daß bei einem kohäsionslosen, lediglich unter dem Einfluß seines Eigengewichts stehenden Boden der Elastizitätsmodul nahezu linear mit der Tiefe zunimmt.

2. Die Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen in künstlich verdichtetem Boden hat stets ergeben, daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit schon bei einer verhältnismäßig geringen Zunahme der Dichte beträchtlich erhöht. Das kann nur so erklärt werden, daß jeder Zunahme der Dichte ein verhältnismäßig viel größerer Zuwachs des Schub- oder Elastizitätsmoduls entspricht. Denn da allgemein die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen gegeben ist durch

$$v = \sqrt{\frac{kM}{\rho}},$$

wobei k ein Zahlenfaktor, M je nach Art der Wellen der Schub- oder Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stoffes ist, in dem sich die Wellen ausbreiten, kann v nur dann bei einer Vergrößerung der Dichte zunehmen, wenn M stärker wächst als ρ .

Nimmt nun in einem lediglich unter dem Einfluß seines Eigengewichts stehenden, sonst homogenen Boden die Dichte mit der Tiefe zu, so muß man danach annehmen, daß dann auch Schub- und Elastizitätsmodul nach der Tiefe hin zunehmen.

Nach der Terzaghischen Formel für die Schwellkurve ist die Porenziffer ε eines an der seitlichen Ausdehnung behinderten, unter dem Druck p stehenden Bodenprismas gegeben durch

$$\varepsilon = -\frac{1}{A} \ln(p + p_0) + C.$$

Darin sind A , p_0 und C Konstanten, und die Porenziffer ε ist durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{n}{1 - n}$$

mit dem Porenvolumen n der Raumeinheit verknüpft. Ist σ das spezifische Gewicht des Bodens, so wird, wenn der Boden nur unter dem Einfluß seines Eigengewichtes steht, $p = \sigma \cdot z$, wenn z die Tiefe ist.

Die Dichte des Bodens nimmt also in diesem Falle mit dem Logarithmus der Tiefe zu, während, wie O. K. Fröhlich aus derselben Formel folgert, der Elastizitätsmodul mit der Tiefe selbst, also stärker zunimmt. Dasselbe gilt auch für den Schubmodul G , der ja mit dem Elastizitätsmodul durch die Beziehung

$$E = \frac{2G(m+1)}{m}$$

verknüpft ist, wobei die Poisson-Zahl m in erster Näherung als konstant angesehen werden kann. Demnach müßte in einem kohäsionslosen, gleichförmigen Boden, der nur unter dem Einfluß seines Eigengewichtes steht, die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Raumwellen mit der Tiefe zunehmen.

3. Im allgemeinen sind die Laufzeitkurven elastischer Wellen, einerlei, ob diese durch Sprengungen oder durch eine Schwingungsmaschine angeregt werden, gerade Linien oder gebrochene Linienzüge, die aus geradlinigen Stücken bestehen. Gelegentlich findet man jedoch bei Messungen mit der Schwingungsmaschine auch stetig gekrümmte Laufzeitkurven, für deren Erklärung man — wie wir später sehen werden — eine stetige Änderung der Festigkeit des Bodens mit der Tiefe annehmen kann.

4. Die Auswertung der Interferenzerscheinungen elastischer Wellen (siehe Veröffentlichung d. Deutsch. Forsch.-Ges. für Bodenmechanik, Heft 4, Berlin 1936) führt manchmal zu unbrauchbaren Ergebnissen, wenn man den sonst in der Seismik angenommenen geradlinigen Strahlenverlauf der Rechnung zugrunde legt. So sind zuweilen auf Böden, die bis in große Tiefen gleichförmig waren, Interferenzerscheinungen verwickelter Art beobachtet worden, die sich bei geradlinigem Strahlenverlauf gar nicht erklären lassen. Denn unter der Annahme einer geradlinigen Wellenausbreitung ergibt sich für einen bis in große Tiefen gleichförmigen Boden sofort, daß dort überhaupt keine Interferenzen auftreten dürften!

Es erscheint demnach nützlich, den Strahlengang im Boden einmal unter der Annahme eines mit der Tiefe zunehmenden Elastizitätsmoduls zu untersuchen.

Der Verlauf elastischer Wellen im Boden bei Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Tiefe. Wir nehmen an, daß der Elastizitätsmodul mit der Tiefe linear zunehme, wie O. K. Fröhlich das für kohäsionslose Böden annimmt. Nur auf solche Böden beschränken sich die folgenden Betrachtungen.

Wir setzen

$$E = E_0 + E' \cdot z,$$

wobei z die Tiefe sei und E_0 und E' konstante Größen sind. Für den Schubmodul ergibt sich entsprechend

$$G = G_0 + G' \cdot z,$$

d. h. allgemein, wenn M den Modul bedeutet,

$$M = M_0 + M' \cdot z. \dots \dots \dots (1)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen ist

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot M}{\rho}} \dots \dots \dots (2)$$

(M = Schub- oder Elastizitätsmodul, k = Zahlenfaktor, ρ = Dichte.) Die Formel (2) gilt sowohl für Kompressions- als für Transversalwellen.

Setzen wir (1) in (2) ein, so ergibt sich für die Geschwindigkeit in der Tiefe $z_0 = 0$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k M_0}{\rho}},$$

für die in der Tiefe z

$$v_z = \sqrt{\frac{k (M_0 + M' z)}{\rho}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{v_z^2}{v_0^2} = 1 + \frac{M'}{M_0} z,$$

oder, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{M'}{M_0} &= \gamma, \\ \frac{v_z^2}{v_0^2} &= 1 + \gamma z \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, ein Strahl verlasse den Erreger unter dem Winkel α_0 gegen die vertikale (z)-Achse. Dann wird er um so mehr aus seiner Richtung abgelenkt, je tiefer er in den Boden eindringt. Aus dem Brechungsgesetz der Optik folgt für den Winkel α_z , den der Strahl in der Tiefe z mit der z -Achse einschließt:

$$\frac{\sin \alpha_z}{\sin \alpha_0} = \frac{v_z}{v_0},$$

oder nach (3)

$$\sin \alpha_z = \sqrt{1 + \gamma z} \cdot \sin \alpha_0 \dots (4)$$

Ist x die Entfernung vom Erreger in horizontaler Richtung, die ein Punkt des Strahles in der Tiefe z hat, so folgt aus Fig. 1:

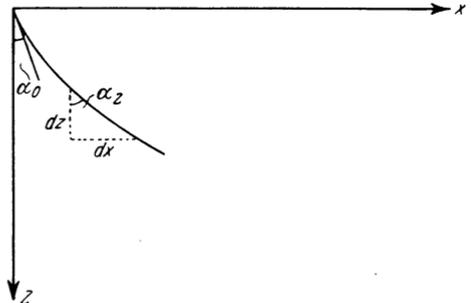


Fig. 1.

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \alpha_z \dots \dots \dots (5)$$

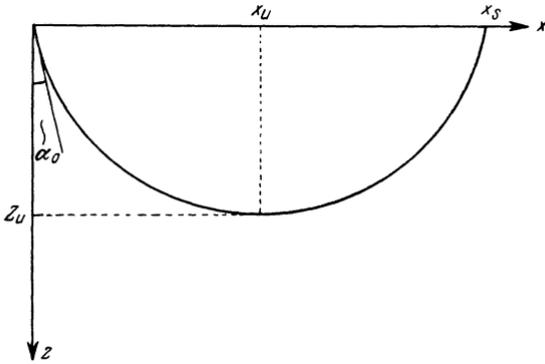
Die horizontale Entfernung vom Erreger, die der Strahl erreicht, wenn er bis zur Tiefe z vorgedrungen ist, ist

$$x = \int_{z=0}^z \operatorname{tg} \alpha_z dz \dots \dots \dots (6)$$

Nun kann der Strahl nicht bis in unendliche Tiefen eindringen. Die Grenztiefe, die er erreicht, z_u , ist offenbar gegeben durch

$$\sin \alpha_u = 1 \quad (\text{Fig. 2}).$$

Nach (4) ergibt sich für diese Grenztiefe



$$z_u = \frac{1}{\gamma} \cot^2 \alpha_0 \dots (5a)$$

Die horizontale Entfernung vom Erreger, in der der Strahl die Grenztiefe erreicht, x_u , ist

$$x_u = \int_{z=0}^{z=z_u} \text{tg } \alpha_z \, dz.$$

Von da an nach größeren x hin wird der Strahl wieder nach oben abgelenkt und erreicht schließlich in der Entfernung $x_s = 2x_u$ wieder die Oberfläche.

Fig. 2. Verlauf eines Wellenstrahles, schematisch.
 x_u, z_u = Koordinaten des tiefsten Punktes

Zunächst sollen die Werte für x , x_u und x_s berechnet werden: In

$$x = \int_0^z \text{tg } \alpha_z \, dz$$

setzen wir nach (4)

$$z = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin^2 \alpha_z - \sin^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0},$$

$$dz = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{2 \sin \alpha_z \cos \alpha_z}{\sin^2 \alpha_0} d\alpha_z,$$

also

$$x = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha_z} \sin^2 \alpha_z \, d\alpha_z$$

oder

$$x = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \left[\frac{\alpha_z - \alpha_0}{2} - \frac{1}{4} (\sin 2\alpha_z - \sin 2\alpha_0) \right]$$

oder

$$x = \frac{1}{\gamma \sin^2 \alpha_0} [\alpha_z - \alpha_0 - \sin \alpha_z \cos \alpha_z + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0] \dots (6a)$$

Aus Formel (6a) ergibt sich x_u , wenn $\alpha_z = \frac{\pi}{2}$ eingesetzt wird:

$$x_u = \frac{1}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \right] \dots (7)$$

und die Entfernung x_s , in der der Strahl die Oberfläche wieder erreicht:

$$x_s = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \right] \dots \dots \dots (8)$$

Die Entfernung, in der der Strahl die Oberfläche trifft, hängt also nur ab vom Ausgangswinkel α_0 und dem „Verteilungsfaktor“ der Geschwindigkeit γ , nicht aber von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 selbst.

Die Laufzeit der Wellen bei linear zunehmendem Elastizitätsmodul. Die Zeit, in der ein Linienelement ds des Strahles in der Tiefe z durchlaufen wird, ist

$$dt = \frac{ds}{v_z}$$

Die gesamte Laufzeit von der Tiefe $z = 0$ bis $z = z$ ist also

$$t = \int_0^z \frac{ds}{v_z}$$

Nun ist

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz = \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_z)^2} dz$$

oder

$$ds = \frac{dz}{\cos \alpha_z}$$

Da, wie wir vorher gesehen haben,

$$dz = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \sin \alpha_z \cos \alpha_z d\alpha,$$

ist also

$$ds = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \sin \alpha_z d\alpha.$$

Ferner ist

$$\sin \alpha_z = \frac{v_z}{v_0} \sin \alpha_0,$$

also

$$v_z = \frac{\sin \alpha_z}{\sin \alpha_0} \cdot v_0.$$

Damit wird

$$dt = \frac{ds}{v_z} = \frac{2}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} d\alpha$$

und

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha_z} \frac{2}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} d\alpha$$

oder
$$t = \frac{2}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} [\alpha_x - \alpha_0] \dots \dots \dots (9)$$

Die Laufzeit bis zur tiefsten Stelle des Strahles wird

$$t_u = \frac{2}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right] \dots \dots \dots (10)$$

und die gesamte Laufzeit, bis der Strahl die Oberfläche wieder erreicht,

$$t_s = \frac{4}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right] \dots \dots \dots (11)$$

Aus den Formeln (8) und (11) folgt, daß die Laufzeitkurve jetzt keine Gerade sein kann.

Die aus der Laufzeitkurve abzulesende scheinbare Geschwindigkeit v_x an der Stelle x_s ist

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\alpha}{dt/d\alpha},$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{4}{\gamma} \cdot \frac{\sin^2 \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right]}{\sin^4 \alpha_0},$$

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{4}{v_0 \gamma} \cdot \frac{\sin \alpha_0 + \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right] \cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0}.$$

Also

$$v_x = \frac{v_0}{\sin \alpha_0} \dots \dots \dots (12)$$

Die Scheingeschwindigkeit ist also stets größer als die wahre Geschwindigkeit an der Oberfläche. Sie ist ferner nicht konstant, sondern nimmt mit kleiner werdendem α_0 zu. Da mit abnehmendem α_0 x_s wächst, wird also die Scheingeschwindigkeit in größerer Entfernung vom Erreger immer größer. Die Laufzeitkurve ist also keine Gerade, sondern eine gegen die x -Achse konkave Kurve.

Wellenverlauf im einfach geschichteten Halbraum. Wir nehmen nun an, in der Tiefe T befinde sich eine Schichtgrenze. An der Oberfläche der obersten Schicht sei die Geschwindigkeit v_1 , an der Oberfläche der unteren v_2 ; der Verteilungsfaktor in der oberen Schicht sei γ .

Der Winkel gegen die vertikale Achse, mit dem ein Strahl in der oberen Schicht auf die Grenzfläche auftritt, ist gegeben durch

$$\sin \alpha_T = \sqrt{1 + \gamma T} \cdot \sin \alpha_0.$$

Der Strahl, der den Erreger unter dem Winkel

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma T}}$$

oder

$$\alpha_0 = \text{arc cotg} \cdot \sqrt{\gamma T}$$

verläßt, streift die Grenzfläche nur, ohne sie zu durchsetzen. Alle Strahlen, deren α_0 größer ist, erreichen die Grenzfläche überhaupt nicht mehr.

Es treten also nur die Strahlen in die untere Schicht ein, für die

$$\alpha_0 < \text{arc cotg} \sqrt{\gamma T}$$

ist. Nur diese Strahlen werden an der Grenzfläche gebrochen und reflektiert.

Keiner dieser Strahlen aber kann die Oberfläche des Halbraumes wieder erreichen, ohne vorher reflektiert oder gebrochen worden zu sein.

Der letzte Strahl, der die Oberfläche auf direktem Wege, d. h. ohne Brechung oder Reflexion erreicht, ist der Strahl

$$\alpha_0 = \text{arc cotg} \sqrt{\gamma T} \dots \dots \dots (13)$$

Er trifft die Oberfläche in der Entfernung

$$x = \frac{2}{\gamma \sin^2 \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \right],$$

wobei

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma T}}, \quad \cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{\gamma T}{1 + \gamma T}},$$

also

$$x = \frac{2(1 + \gamma T)}{\gamma} \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc cotg} \sqrt{\gamma T} + \frac{\sqrt{\gamma T}}{1 + \gamma T} \right] \dots \dots \dots (14)$$

Jenseits dieser Entfernung können nur noch gebrochene und reflektierte Strahlen die Oberfläche erreichen.

Die Fig. 3 zeigt schematisch den Weg der direkten, der einmal an der Oberfläche (R_0) und der einmal an der Grenzfläche (R_T) reflektierten Wellen. Die Wellen durch die zweite Schicht sowie alle Wellen, die mehr als eine Reflexion erlitten haben, sind der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Wir bezeichnen die größte Entfernung, in der die Wellen die Oberfläche auf direktem Wege erreichen, ohne in die tiefere Schicht eingedrungen zu sein, als Grenzentfernung. In dieser

Entfernung muß also die Laufzeitkurve der direkten Wellen durch die obere Schicht aufhören. Wir bezeichnen den entsprechenden Punkt in der Laufzeit-

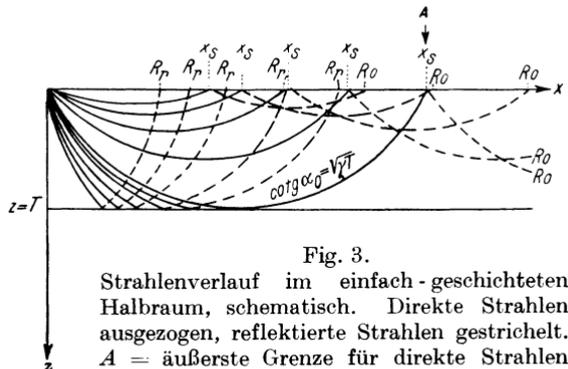


Fig. 3.
Strahlenverlauf im einfach-geschichteten Halbraum, schematisch. Direkte Strahlen ausgezogen, reflektierte Strahlen gestrichelt. A = äußerste Grenze für direkte Strahlen

kurve mit A . An derselben Stelle hört auch die Laufzeitkurve der an der Grenzfläche reflektierten Wellen, die wir mit R_T -Wellen bezeichnen, auf. Jenseits A können nur noch Wellen auftreten, die entweder z. T. die untere Schicht durchlaufen haben oder die ein- oder mehrmals an der Oberfläche reflektiert worden sind. Diese an der Oberfläche reflektierten Wellen nennen wir R_0 -Wellen.

Bei geradlinigem Strahlenverlauf ist es anders. Dort können bis in jede beliebig große Entfernung vom Erreger reflektierte Wellen von der Grenzfläche her die Oberfläche treffen, und Wellen, die an der Oberfläche reflektiert werden, können diese nur dann wieder erreichen, wenn sie inzwischen noch einmal an der Grenzfläche in der Tiefe reflektiert worden sind.

Für die weiteren Betrachtungen nehmen wir zunächst an, daß die Wellen, die die zweite Schicht durchlaufen, so schwach sind, daß sie an der Oberfläche nicht mehr bemerkt werden. Dann brauchen wir uns nur mit den direkten, den R_0 - und den R_T -Wellen zu beschäftigen.

Die Laufzeitkurve der direkten Wellen haben wir im vorhergehenden schon behandelt. Die Scheingeschwindigkeit der R_0 -Wellen ist, wie man leicht sieht, an der Stelle x der Oberfläche: $\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sin \alpha_0}$; α_0 ist für diese Wellen aber wesentlich größer als der Ausgangswinkel der direkten Wellen, die die Oberfläche an demselben Punkte treffen. Also unterscheidet sich die Geschwindigkeit der R_0 -Wellen weniger von v_0 als die der direkten Wellen in derselben Entfernung x vom Ausgangspunkt. Im Ausgangspunkt schmiegt sich die Laufzeitkurve der R_0 -Wellen stärker an die Gerade $\frac{dx}{dt} = v_0$ an, als die der direkten Wellen.

Die Laufzeit der R_T -Wellen im Ausgangspunkt ergibt sich aus

$$t_0 = 2 \int_0^T \frac{dz}{v_z} = 2 \int_0^T \frac{dz}{v_0 \sqrt{1 + \gamma z}} = \frac{4}{v_0 \gamma} \cdot (\sqrt{1 + \gamma T} - 1).$$

Im Punkt A ist die Laufzeit dieser Wellen

$$t_A = \frac{4}{v_0 \gamma \sin \alpha_0} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right]$$

mit

$$\cotg \alpha_0 = \sqrt{\gamma T}.$$

Die Laufzeitkurve der R_T -Wellen schmiegt sich demnach im Grenzpunkt A der Laufzeitkurve der direkten Wellen an. Sie ähnelt einer Hyperbel (ohne eine solche zu sein!).

Strahlen, die in die untere Schicht eintreten, werden an der Grenzfläche gebrochen, so daß ihr Winkel gegen die Lotrechte in der unteren Schicht, α_2 , dem Gesetz folgt

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_0} \cdot \sin \alpha_0,$$

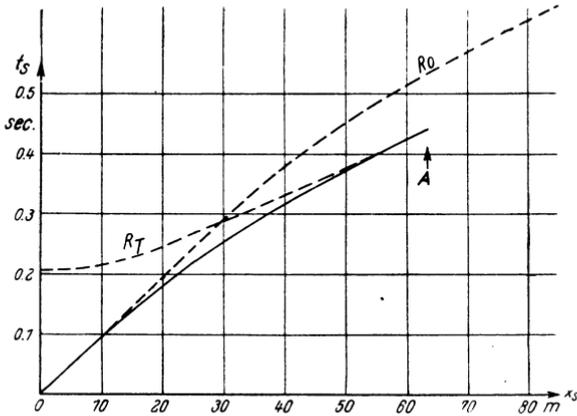


Fig. 4. Theoretische Laufzeitkurve im einfach-geschichteten Halbraum. A = Grenz-entfernung, R_T = Wellen, die an der Grenzschicht, R_0 = Wellen, die an der Ober-fläche reflektiert worden sind

$n = 20/sec.$

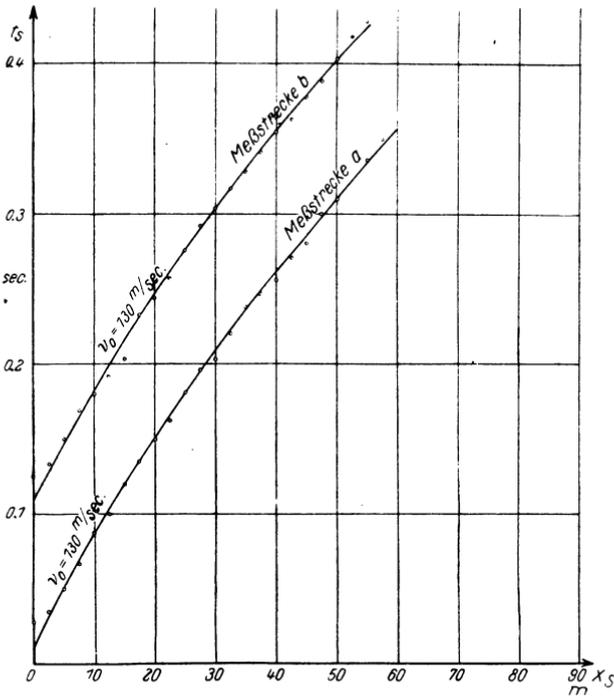


Fig. 5. Zwei beobachtete Laufzeitkurven auf einem Sand, dessen Festigkeit nach der Tiefe hin stetig zunimmt

wenn v_2 die Geschwindigkeit in der unteren Schicht ist. Totalreflexion an der Grenzfläche tritt offenbar ein, wenn $\sin \alpha_2 = 1$, d. h. für $\sin \alpha_0 = \frac{v_0}{v_2}$. Wird $\sin \alpha_0 > \frac{v_0}{v_2}$, so wird α_2 imaginär, d. h. in die untere Schicht tritt keine Energie ein; auch dann besteht Totalreflexion. Die Bedingung für Totalreflexion ist also

$$\frac{v_0}{v_2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma T}} \quad \text{oder} \quad v_2 \geq v_0 \sqrt{1 + \gamma T}.$$

Ein Beispiel aus der Praxis. Wir wollen nun einen Fall aus der Praxis behandeln, in dem gekrümmte Zeitkurven der oben besprochenen Art tatsächlich festgestellt wurden. Es handelte sich um eine 16.5 m mächtige Schicht von Mittelsand, unter der Keupersandstein unbekannter Mächtigkeit anstand. Der Grundwasserspiegel lag ursprünglich auf 1 bis 1.5 m unter Geländeoberfläche. Vor Beginn der Messungen war jedoch das Grundwasser bis zur Oberfläche des Keupersandsteins abgesenkt worden. Auf diesem Boden wurden mittels einer Schwingungsmaschine in verschiedenen Richtungen die Geschwindigkeiten elastischer Transversalwellen gemessen. Fig. 5 zeigt zwei der längs verschiedener Meßstrecken gemessenen Laufzeitkurven für die Frequenz 20/sec. Für andere Frequenzen wurden ganz ähnliche Kurven gemessen.

Meßstrecke a				Meßstrecke b			
x_s	t_s	$\frac{v_0 t_s}{x_s}$	α_0	x_s	t_s	$\frac{v_0 t_s}{x_s}$	α_0
10	0.078	1.015	—	10	0.070	0.91	50°
20	0.140	0.910	50°	20	0.136	0.88	46
30	0.200	0.87	44	30	0.194	0.84	41
40	0.250	0.81	38	40	0.245	0.80	37
50	0.300	0.78	36	50	0.293	0.76	34
60	0.348	0.755	34				

Wie man aus der Figur erkennt, sind beide Laufzeitkurven gekrümmt und nahezu kongruent. Es liegt in der Natur der Messungen mit der Schwingungsmaschine, daß nur die Laufzeitkurve der direkten Wellen bestimmt werden kann. Die an der Oberfläche oder an der Schichtgrenze Sand—Keuper reflektierten Wellen können höchstens Interferenzerscheinungen verursachen, die eine leichte Streuung der gemessenen Punkte bewirken (siehe Zeitschr. f. Geophys. 1937. H. 1, S. 1). Läßt man den Punkt in der Entfernung $x = 0$ unberücksichtigt, so ergibt sich für beide Laufzeitkurven eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 130$ m/sec. Die weiteren Bestimmungsstücke der Laufzeitkurve findet man folgendermaßen:

Nach (8) und (11) ist

$$\frac{v_0 t_s}{x_s} = \frac{2 \sin \alpha_0 \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right]}{\frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0},$$

Man kann $\frac{v_0 t_s}{x_s}$ als Funktion von α_0 darstellen. Bestimmt man daraus für die Laufzeitkurven der Fig. 5 α_0 für verschiedene x_s , so ergibt sich, wenn man die t -Achse so verschiebt, daß für $x = 0$ $t = 0$ wird (siehe vorstehende Tabelle).

Da nun

$$t_s = \frac{4}{\gamma \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right],$$

so ist

$$\gamma = \frac{4}{t_s \cdot v_0 \sin \alpha_0} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right].$$

Wir erhalten daraus im Mittel für die Meßstrecke a : $\gamma = 0.18$, für die Meßstrecke b : $\gamma = 0.21$. Der Ausgangswinkel α_0 für den Grenzpunkt A der Laufzeitkurve der direkten Wellen läge danach für die Meßstrecke a bei $\cotg \alpha_0 = \sqrt{\gamma T} = 1.72$. $\alpha_0 = 30^\circ$, für b bei $\alpha_0 = 28^\circ$, d. h. A läge bei den Entfernungen a) 65.5 m, b) 64.6 m. Leider ist auf beiden Meßstrecken nicht bis zu diesen Entfernungen gemessen worden. Dort hätten Unstetigkeiten in den Laufzeitkurven auftreten müssen. In der Tiefe von 16.5 m ist im Sand die Geschwindigkeit nach der Laufzeitkurve a : 260 m/sec, nach b : 275 m/sec. Denkt man sich die Dichte des Sandes bis in diese Tiefe konstant = $1.7 \cdot 10^{-6}$ kg/cm², so ergeben sich für den Schubmodul G folgende Werte:

Oberfläche	$G = 288$ kg/cm ² ,
Tiefe 16.5 m	a) $G = 1150$ kg/cm ² ,
	b) $G = 1280$ kg/cm ² .

Wahrscheinlich jedoch nimmt auch die Dichte nach der Tiefe hin zu, so daß der wahre Wert des Schubmoduls in 16.5 m Tiefe wohl noch höher als 1300 kg/cm² liegen dürfte.

Messungen, die auf demselben Baugrund vor der Grundwasserabsenkung vorgenommen worden waren, hatten streng geradlinige Laufzeitkurven ergeben und eine mittlere Geschwindigkeit von 150 m/sec. Es scheint demnach so, als ob das Anwachsen des Elastizitäts- und des Schubmoduls mit der Tiefe erst durch die Grundwasserabsenkung verursacht worden ist. Doch enthalten wir uns zunächst jedes Versuchs einer Erklärung.

Das hier behandelte Beispiel ist bisher der einzige Fall, in dem wir mit Sicherheit stetig gekrümmte Laufzeitkurven beobachten konnten. In den weitaus meisten Fällen ist die Laufzeitkurve der von einer Schwingungsmaschine ausgehenden Wellen ebenso wie die Laufzeitkurven der Sprengseismik eine gerade Linie, um die die beobachteten Werte sich mit geringer Streuung gruppieren. Man muß deshalb annehmen, daß nur in Sonderfällen der Elastizitäts- und Schubmodul mit der Tiefe zunimmt. Da aber — wie unser Beispiel zeigt — solche Sonderfälle tatsächlich vorkommen, schien es immerhin nützlich, sie einmal eingehender zu behandeln.