Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Instituts in Göttingen

XXXV. Zur Methodik der Nahbebenbearbeitung

Von **Rolf Bungers,** Göttingen. — (Mit 2 Abbildungen)

An Stelle des Schmerwitzschen Verfahrens der Ausgleichung mit rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene wird ein Ausgleichsverfahren unmittelbar mit den geographischen Koordinaten abgeleitet. Hierzu wird die Wiechertsche Formel zur Entfernungsberechnung in einem Nomogramm dargestellt. Ferner werden die Schmerwitzsche Herdtiefenbestimmung und die daraus gefolgerten Ergebnisse einer Kritik unterzogen.

Ziel und Aufgabe der heutigen deutschen Seismik ist der Ausbau des Nahbeben-Stationsnetzes zum Zwecke einer genauen Untersuchung der Nahbeben mit allen Problemen, die damit zusammenhängen. Dies ist auf der letzten Deutschen Geophysiker-Tagung (Jena, Okt. 1938) mehrfach, sowohl in Vorträgen wie auch in persönlichen Gesprächen, zum Ausdruck gekommen. Arbeiten, die sich mit der Methodik der Auswertung von Nahbeben befassen, wie die kürzlich erschienene von Schmerwitz [1], sind daher sehr zu begrüßen. Es ist sehr verdienstlich, daß in dieser Arbeit viele Fragen angeschnitten werden, die sich auf die Zulässigkeit von Vernachlässigungen in früheren Arbeiten über Nahbeben beziehen; manches jedoch kann dabei nicht ohne Widerspruch bleiben, so daß es gerechtfertigt erscheint, nochmals auf das Thema einzugehen.

Voranstellen möchten wir einige allgemeine Betrachtungen über die Methodik bei der Auswertung seismischer Messungen überhaupt. Als wesentlich erscheint uns dabei vor allem das richtige Urteil, ob bei einer bestimmten Fragestellung exakt mathematisch oder mehr heuristisch und gefühlsmäßig vorzugehen ist. In vielen Fällen ist die mathematische Methode unbedingt vorzuziehen. Wir sind mit Schmerwitz z. B. der Ansicht, daß dies bei Entfernungsbestimmungen auf der Erde unbedingt der Fall sein sollte. Denn hier sind alle Elemente zur Berechnung exakt gegeben; daher können auch gemachte Vernachlässigungen exakt abgeschätzt werden. Das klassische Beispiel einer solchen Behandlung ist die bekannte Arbeit von Wiechert [2]. Als Gegenbeispiel zur Entfernungsberechnung möchten wir die Herdtiefenbestimmung herausstellen. Hierbei ist man weitgehend abhängig von der Güte der vorliegenden Seismogramme, von unbekannten Untergrundsfaktoren, von der Genauigkeit des Zeitdienstes usw. Jeder, der in der seismischen Praxis tätig war, weiß, ein wie großer Anteil bei der Beurteilung einer Meßreihe dem zukommt, was man als „seismologisches Gefühl" bezeichnen könnte und was man nicht in Formeln und Gleichungen fassen kann. Diese Verhältnisse sind für die geophysikalische Wissenschaft typisch und wohl in keinem anderen Teilgebiet der Physik in einem solchen Ausmaße vorhanden. — Man könnte natürlich die Güte und Brauchbarkeit der Aufzeichnungen durch Anbringung eines „Gewichtes" berücksichtigen, wie es z. B. Geiger [3] (S. 7) bei Fernbeben tut; aber das würde die Unsicherheiten nur zum Teil ausgleichen. Es ist bezüglich der Herdtiefenbestimmung oft so, daß der guten Aufzeichnung einer herdnahen Station ein viel größeres Gewicht zukommt als zwanzig herdfernen Stationen. Wir werden auf diese Tatsache unten (§ 2) noch zurückkommen.

§ 1. Entfernungsberechnung. Wenn wir möglichst exakte Methoden der Entfernungsberechnung auszubilden bemüht sind, so geschieht dies deshalb, weil wir dann von vornherein keine Schwierigkeiten zu erwarten haben, wenn die seismisch gewonnenen physikalischen Werte mit der Zeit immer genauer und zuverlässiger werden, wie das ja unser Bestreben ist. Die Entfernungen müssen *der Methode nach* genau berechnet werden, damit nicht schon dadurch irgendwelche Einwände gegen die Zuverlässigkeit der Ergebnisse möglich sind, wenn es auch im einzelnen Falle zulässig ist, mehr oder weniger abzurunden und zu vereinfachen. Nur muß man sich stets über den entstandenen Fehler klar sein. Die klassische Arbeit über die Entfernungsberechnungen bei kleinen Entfernungen ist die zitierte Arbeit von Wiechert, die beim Studium der Schallausbreitung in Luft entstand. Die hierbei auftretenden Geschwindigkeiten sind etwa 17 mal geringer als die der Nahbebenwellen. Daher ist in der Luftseismik allgemein eine genauere Entfernungsbestimmung erforderlich. Schmerwitz weist darauf hin, daß die dort abgeleiteten Funktionen der Längen und Breiten $b\ (B_1, B_2)$ und $l\ (B_1, B_2, L_1, L_2)$ nicht als abstandstreue Abbildung der Ellipsoid-Oberfläche auf die Ebene aufzufassen sind. Natürlich kann man b und l als rechtwinklige Koordinaten auffassen; nur ist dann eben die b, l-Ebene nicht das abstandstreue Abbild der Erdoberfläche. Die Abbildung ist nur „mittabstandstreu", da die Entfernungen aller Punkte vom Nullpunkt treu abgebildet werden. Ist daher bei kleinen Entfernungen der eine Punkt nicht weit vom Nullpunkt entfernt, dann macht das nicht viel aus; so tut dies z. B. den Ergebnissen der Geesschen Arbeit [4] nicht irgendwelchen Abbruch, da der Herd hier nur wenig vom Koordinatenanfangspunkt entfernt liegt, wenn Gees vielleicht auch klarer auf diese Vernachlässigung hätte hinweisen sollen, als es in der Anmerkung S. 166 von ihm geschehen ist. Die Fehler in den Epizentralentfernungen betragen überall weniger als 1%. Ähnliches gilt für die Arbeit von Gräfe [5]. — Schmerwitz führt nun andere rechtwinklige Koordinaten ein, indem er von zwei sich unter 90^0 schneidenden Großkreisen auf der Kugel ausgeht. In den von ihm gegebenen Grenzen ist die erhaltene Abbildung abstandstreu.

Es ist jedoch nicht recht einzusehen, warum man überhaupt erst von der Kugel auf die Ebene übergehen und eine schwierige Koordinatenumrechnung ausführen soll. Das erfordert Rechenarbeit und man muß neue, wenn auch kleine Fehler in Kauf nehmen. Ein weiterer und der Hauptnachteil der Methode ist der, daß man aus den gewonnenen Herdkoordinaten nur mit großer Rechenarbeit die geographischen Koordinaten des Herdes ausrechnen kann (vgl. z. B. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde), so daß z. B. ein Vergleich der Schmerwitzschen Ergebnisse mit denen von anderen Autoren nur sehr schwer möglich ist und man das Epizentrum nicht einmal auf der Karte ohne weiteres feststellen kann. Schmerwitz gibt hierfür auch keinen Hinweis.

Diesen Umweg über die Ebene kann man vermeiden; denn man kann unter Benutzung der Wiechertschen Formel für die Entfernung mit den auf der Erde gegebenen geographischen Koordinaten genau so rechnen wie mit rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene, einschließlich der Ausgleichung. Die Rechenarbeit erhöht sich dadurch nicht, zumal der einzige schwierigere Ausdruck aus einem Nomogramm abgelesen werden kann.

Es sei hier aber nochmals betont, daß eine derartige Rechnung natürlich nicht in Frage kommt, wenn man genügend nahe Stationen zur Verfügung hat, wie etwa Hiller [6] bei der Auswertung des Bebens vom 30. Dezember 1935 und anderer süddeutscher Beben. Hier liefert jede Karte mit beliebiger Projektion die Werte schneller und hinreichend genau.

Die Korrektionen von b und l, die durch die Abplattung der Erde entstehen, lassen wir zunächst außer acht; die Korrektionen betragen zwischen 45 und 55° und bis zu Entfernungen von 660 km weniger als $^1/_6$%. (Der Beweis hierfür folgt unten.) Dann lautet die Wiechertsche Formel für den Abstand zweier Punkte mit den geographischen Koordinaten B_1, L_1; B_2, L_2 (in Winkelmaß):

$$s = \sqrt{r_m^2 \cdot (B_2 - B_1)^2 + r_n^2 \cdot \cos B_2 \cdot \cos B_1 \cdot (L_2 - L_1)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

r_m bedeutet dabei den Krümmungsradius im Meridian und r_n den Krümmungsradius quer zum Meridian unter 45° Breite*). Es ist $r_m = 6367.59$ km, $r_n = 6389.13$ km.

Der durch (1) gegebene funktionale Zusammenhang ist in dem anliegenden Nomogramm dargestellt (Fig. 1). Auf der Geraden AA' sind dargestellt die Werte $\sqrt{\cos B_2}$. Die Beschriftung ist natürlich für Grade und Minuten durchgeführt. Desgleichen stellt die Teilung der Geraden CC' die Funktion $\frac{1}{\sqrt{\cos B_1}}$ dar. (B_2 und B_1 sind übrigens vertauschbar.) Die Gerade $0M$ enthält die Werte $r_n \cdot |L_2 - L_1|$ und die Gerade $0N$ die Werte $r_m \cdot |B_2 - B_1|$, wobei die L und die B in Winkelmaß gemessen sind. Wir verbinden jetzt die zu B_1 und B_2 gehörigen Punkte auf CC' bzw. AA' und ziehen die Parallele zu der Verbindungslinie durch

*) Hier sei bemerkt, daß die Wiechertsche Tabelle für $(L_2 - L_1)_s$ richtiger bis zu etwa 10 statt 7° berechnet sein müßte, da man ja alle Entfernungen bis 660 km zwischen 45 und 55° Breite daraus berechnen soll.

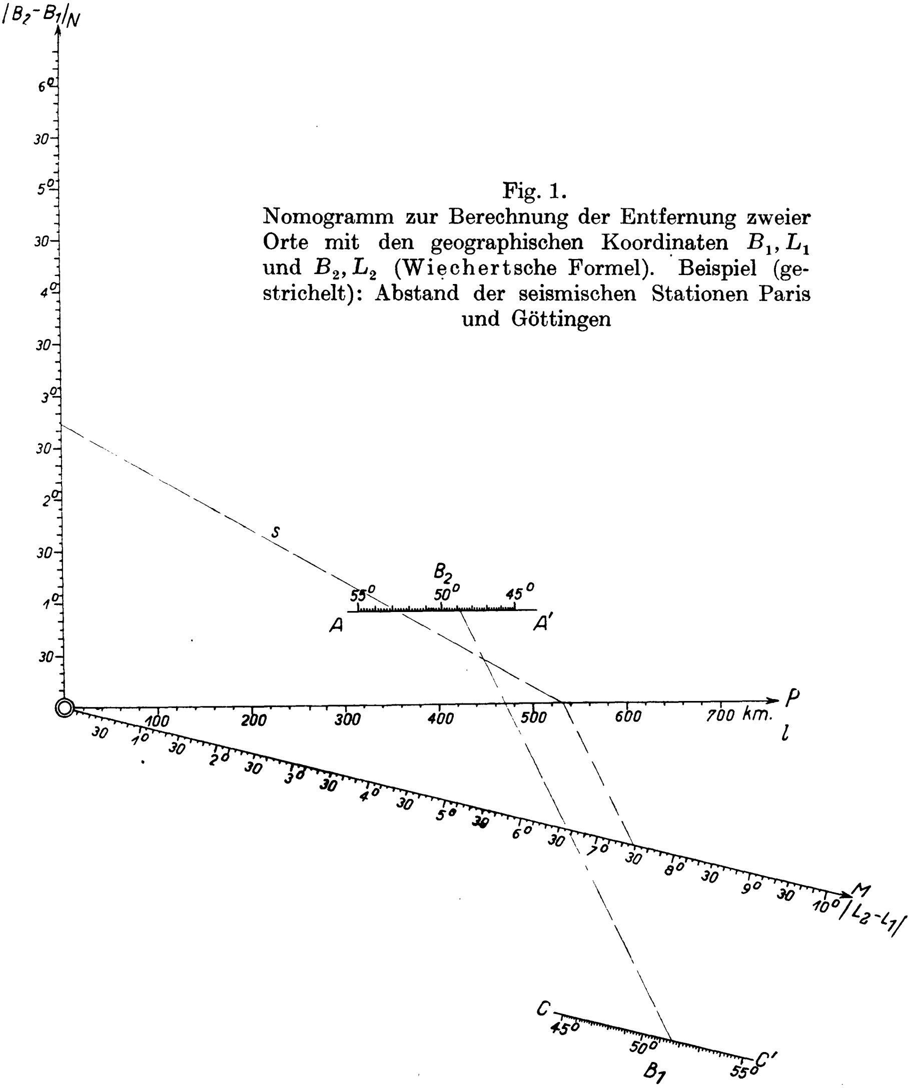

Fig. 1.
Nomogramm zur Berechnung der Entfernung zweier Orte mit den geographischen Koordinaten B_1, L_1 und B_2, L_2 (Wiechertsche Formel). Beispiel (gestrichelt): Abstand der seismischen Stationen Paris und Göttingen

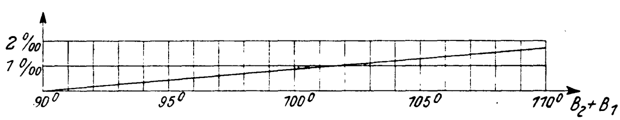

Fig. 2.
Korrektion von $|B_2 - B_1|$ wegen der Abplattung in ‰

$|L_2 - L_1|$ auf $0M$. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit $0P$ sei l. Auf $0N$ markieren wir $|B_2 - B_1|$. Der Abstand dieses Punktes von l ist gleich s. Die Entstehung des Nomogramms ist danach klar und braucht nicht weiter erläutert zu werden. Zum praktischen Gebrauch zeichne man das Nomogramm so, daß die Strecke 0 bis $|B_2 - B_1| = 6^0\,00'$ die Länge 33.34 cm hat. Dann ist in s 1 mm = 2 km, so daß man auf 0.2 km ablesen kann.

Den Einfluß der Abplattung auf die Größe b kann man aus Fig. 2 ersehen. Der Einfluß auf l ist $< 1^0/_{00}$, kann also vernachlässigt werden. Bei dem heutigen Stande der Zeitgenauigkeit der seismischen Aufzeichnungen braucht man die Abplattung bei Nahbeben wohl nicht zu berücksichtigen*). Der prozentuale Fehler, der zu b hinzukommt, ist (siehe Wiechert)

$$\frac{f}{2} = \frac{\sin(B_2 + B_1 - 90^0)}{200}$$

und der Fehler, der zu l hinzukommt, ist $\frac{f}{6}\cdot$ Also ist

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{b^2\cdot(1+f) + l^2\cdot\left(1+\frac{f}{3}\right)}, \\ &= \sqrt{b^2+l^2} + \frac{b^2 + {}^1/_3\, l^2}{2\sqrt{b^2+l^2}}\cdot f + \cdots, \\ &\sim \sqrt{b^2+l^2}\cdot\left(1 + \frac{b^2 + {}^1/_3\, l^2}{b^2+l^2}\cdot\frac{f}{2}\right). \end{aligned}$$

Der Faktor von $\frac{f}{2}$ ist $\geqq {}^1/_3$ und $\leqq 1$. Der prozentuale Fehler von s ist also höchstens gleich $\frac{f}{2}$, dem Fehler von b. Für $B_2 = B_1 = 55^0$ ergibt sich daher als Maximalfehler ungefähr ${}^1/_6\,\%$, wie oben behauptet wurde.

§ 2. Herdtiefenbestimmung. In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Kathetenverhältnis 1 : 7 unterscheiden sich Hypothenuse und größere Kathete um etwa 1%. Ist also 1% der maximal zugelassene Fehler bei den Entfernungsbestimmungen, dann brauchen wir bei Stationen, die mehr als die siebenfache Herdtiefe vom Herd entfernt sind, die Herdtiefe nicht mehr zu berücksichtigen. Bei größerer verlangter Genauigkeit ist entsprechend weiter zu gehen (dem Verhältnis 1 : 22 entspricht $1^0/_{00}$). Umgekehrt ist es klar, daß wir einen großen Fehler machen, wenn wir aus solchen Stationen die Herdtiefe berechnen wollen. (Vgl. hierzu schon de Quervain [7], S. 150 ff.; auch Wiechert und Galitzin haben

---

*) Lediglich die Werte r_m und r_n sind hier an Stelle eines Mittelwertes, der einer kugelförmigen Erde entsprechen würde, der Einfachheit halber beibehalten worden.

sich hierüber geäußert). Man kann den Fehler leicht abschätzen. Mit den Schmerwitzschen Bezeichnungen ist

$$t_n - t_0 = \frac{1}{v} \cdot \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + z_0^2}.$$

Um die Wirkung eines Zeitfehlers dt_n der n-ten Station auf die Herdtiefe z_0 zu erhalten, haben wir zu differenzieren*). Es ergibt sich, wenn wir die Wurzel zur Abkürzung mit s bezeichnen,

$$\frac{d\,t_n}{dz_0} = \frac{1}{v} \cdot \frac{z_0}{s}.$$

z_0/s nehmen wir wie oben zu $^1/_7$ an, v zu 5.7 km/sec. Es folgt für einen Zeitfehler $dt_n = 0.1$ sec

$$dz_0 = 4.0 \text{ km}.$$

Haben wir statt dessen einen Zeitfehler von 0.5 sec, dann ergibt sich in der Herdtiefenbestimmung ein Fehler von 20 km. Darin liegt der Grund, weshalb bei Schmerwitz so große Fehler bei der Herdtiefenbestimmung auftreten; er benutzt nämlich alle Stationen ohne Rücksicht auf ihre Entfernung gleichmäßig, wodurch gleich überaus große Fehler zur Ausgleichsrechnung mitgeschleppt werden**). Wir halten daher die üblichen Methoden der Herdtiefenbestimmung für richtiger und zuverlässiger***), wie sie z. B. Hiller [6] benutzt. Hier werden drei oder vier verschiedene Verfahren angewendet, und auf Grund *aller* Verfahren wird ein wahrscheinlicher Fehler berechnet. Durch die verschiedenen Methoden wird der Fehler erheblich erniedrigt, eine Tatsache, die Schmerwitz gar nicht berücksichtigt. Zur Bestimmung der Epizentralkoordinaten kann man, ohne einen großen Fehler zu machen, für die Herdtiefe zunächst einen Näherungswert einsetzen†). — Neben ihrer Zuverlässigkeit hat diese Methode auch noch den Vorteil, daß man bei der Ausgleichung zur Bestimmung von Epizentrum, Herdzeit und eventuell auch noch Geschwindigkeit eine Unbekannte weniger hat, wodurch sich ja die Rechnung erheblich vereinfacht. Bei der Ausgleichung der Geschwindigkeit ist jedoch Vorsicht geboten; denn wenn die Problemstellung sich auf Geschwindigkeiten bezieht, z. B. auf eine Richtungsabhängigkeit derselben, dann würde eine schematische Ausgleichung die gesuchten Unterschiede gerade verwischen.

Auf Grund dieser Erörterung über Herdtiefenbestimmung halten wir die Schmerwitzsche Schlußfolgerung, daß die Geschwindigkeit des $\overline{P}$-Stoßes mit

*) Die Ableitung ist ähnlich der von Schmerwitz auf S. 378, hat aber hier einen ganz anderen Zweck.

) Während der Drucklegung wurde uns die Arbeit von G. Demetrescu: „Sur les ondes séismiques $\overline{P}$. $\overline{S}$.“ [Bull. Sect. Acad. Roum. **19, 49—55 (1937)] bekannt. Bei der hierin durchgeführten Herdtiefenberechnung (5), S. 3, ist die Entfernungsabhängigkeit der Zeitfehler auch nicht berücksichtigt worden. Dies hätte durch Anfügung von Gewichten proportional $1/\Delta$ an die Einzelwerte geschehen müssen.

***) Vgl. Handb. d. Geophys. IV, S. 504ff.

†) Ebenda S. 501ff.

zunehmender Herdtiefe abnimmt, für anfechtbar. Schon wenn man seine selbst berechneten und angegebenen Fehlergrenzen berücksichtigt, erscheint das Ergebnis zweifelhaft, zumal es sich nur um wenige Punkte handelt. Wenn wir z. B. für eine Tiefe den Wert 31 km $\pm$ 38 finden, dann ist dieser Wert eben schlechterdings unbrauchbar. Es soll nicht bestritten werden, daß ein solches Verhalten, wie das geschilderte, *möglich* ist, *bewiesen* ist es aber keinesfalls*). Hier müßte erst erheblich zahlreicheres und besseres Beobachtungsmaterial vorliegen als bisher, eine Forderung, der durch das geplante engmaschigere Stationsnetz nun hoffentlich bald entsprochen wird.

§ 3. Ausgleichung. Zur Ausgleichung haben wir noch die vier Unbekannten B_0, L_0 (die geographischen Koordinaten des Epizentrums), t_0 (die Herdzeit) und die Geschwindigkeit v, falls wir es nicht vorziehen, sie durch Annahmen als bekannt einzuführen. Genau genommen wäre auch bei der Ausgleichung der Geschwindigkeit die Entfernungsabhängigkeit zu berücksichtigen. Wie oben für die Herdtiefe folgt hier

$$\frac{d\,t_n}{d\,v} = -\frac{1}{v^2}\cdot s.$$

Während also die Einwirkung eines Zeitfehlers auf die Herdtiefenbestimmung proportional s zunimmt, nimmt die Einwirkung des Zeitfehlers auf die Bestimmung der Geschwindigkeit umgekehrt proportional s ab. Jedoch nimmt mit größerer Entfernung auch die Wahrscheinlichkeit zu, daß v nicht konstant ist, weshalb man wohl am besten bei der Ausgleichung von v überhaupt keine Entfernungsabhängigkeit annimmt.

Die Abplattung braucht man bei der Ausgleichung nicht zu berücksichtigen; denn wir berechnen ja nur Verbesserungen angenommener Näherungswerte, wobei eine Genauigkeit von 1% ausreicht. Die Näherungswerte seien B_0', L_0', t_0', v', die zu berechnenden Verbesserungen bzw. x, y, τ, ν. Der Index i bezeichne Koordinaten und Ankunftszeit der i-ten Station; $k \geqq 4$ sei die Stationszahl. Wir haben die k Gleichungen

$$F_i\,(B_0, L_0, t_0, v) = \frac{1}{v}\cdot\sqrt{r_m^2\,(B_i - B_0)^2 + r_n^2\cdot\cos B_i\cdot\cos B_0\cdot(L_i - L_0)^2 + h^2} + t_0 - t_i = 0$$

$$= \frac{1}{v}\cdot S_i + t_0 - t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

indem wir die Wurzel $= S_i$ setzen. Die Taylor-Entwicklung liefert das System der linearen Gleichungen für x, y, τ, ν:

$$F_i = F_i' + \left(\frac{\partial F_i}{\partial B_0}\right)'\cdot x + \left(\frac{\partial F_i}{\partial L_0}\right)'\cdot y + \left(\frac{\partial F_i}{\partial v}\right)'\cdot\nu + \left(\frac{\partial F_i}{\partial t_0}\right)'\cdot\tau = \alpha_i,$$

*) Auch die Existenz einer P^*-Schicht, die durch Einsätze bei zahlreichen Nahbeben gesichert ist, wird durch die Schmerwitzschen Ausführungen keinesfalls widerlegt.

wobei der Strich bedeutet, daß als Argument die Näherungswerte einzusetzen sind, und α_i die Abweichung bezeichnet. Die Koeffizienten sind:

$$F_i' = e_i = \frac{1}{v'} \cdot S_i' + t_0' - t_i,$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial B_0}\right)' = a_i = \frac{1}{v'} \cdot \frac{-2 \cdot r_m^2 \cdot (B_i - B_0') - r_n^2 \cdot \cos B_i \cdot \sin B_0' \cdot (L_i - L_0')^2}{2 S_i'},$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial L_0}\right)' = b_i = \frac{1}{v'} \cdot \frac{-r_n^2 \cdot \cos B_i \cdot \cos B_0' \cdot (L_i - L_0')}{S_i'},$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial v}\right)' = c_i = -\frac{1}{v'^2} \cdot S_i',$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t_0}\right)' = d_i = 1.$$

Die Zählerausdrücke in a_i und b_i lassen sich mit dem Rechenschieber sehr leicht berechnen, während $S_i = \sqrt{s_i^2 + h^2}$ schnell mit Hilfe des Nomogramms gewonnen wird. Die Fehlergleichungen lauten in den neuen Bezeichnungen

$$\alpha_i = a_i \cdot x + b_i \cdot y + c_i \cdot v + d_i \cdot \tau + e_i; \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Unter Verwendung der üblichen Abkürzungen sind dann die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
[aa] \cdot x + [ab] \cdot y + [ac] \cdot v + [ad] \cdot \tau + [ae] &= 0,\\
[ba] \cdot x + [bb] \cdot y + [bc] \cdot v + [bd] \cdot \tau + [be] &= 0,\\
[ca] \cdot x + [cb] \cdot y + [cc] \cdot v + [cd] \cdot \tau + [ce] &= 0,\\
[da] \cdot x + [db] \cdot y + [dc] \cdot v + [dd] \cdot \tau + [de] &= 0.
\end{aligned}$$

Nun geht die Auflösung ihren üblichen Weg, auf den wir nicht nochmals einzugehen brauchen. Zum Schluß sind noch x und y von Bogenmaß auf Winkelmaß umzurechnen.

Literatur

[1] G. Schmerwitz: Ausgleichung der besten Stationsbeobachtungen mitteleuropäischer Erdbeben. Zeitschr. f. Geophys. **14**, 351 (1938).

[2] E. Wiechert: Entfernungsberechnungen von Orten auf der Erde bei kleineren Abständen. Ebenda **1**, 177 (1924/25).

[3] L. Geiger: Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Gött. 1910.

[4] R. H. Gees: Die Wellenausbreitung der Erdbeben vom 20. November 1932 (Nordbrabant) und 7. Juni 1931 (Doggerbank). Zeitschr. f. Geophys. **13**, 159 (1937).

[5] H. Gräfe: Das Nordtiroler Beben vom 8. Oktober 1930. I. Teil. Ebenda **8**, 144 (1932).

[6] W. Hiller: Seismische Berichte der Württembergischen Erdbebenwarten, Jahrg. 1935, Anhang S. 10.

[7] A. de Quervain: Über die Herdtiefenberechnung aus einer oder zwei herdnahen Stationen und die hierzu erforderliche Zeitgenauigkeit. Gerl. Beitr. z. Geophys. 13, 148 (1914).

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Januar 1939.