

Werk

Jahr: 1939

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:15

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0015

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0015

LOG Id: LOG_0062

LOG Titel: Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Instituts in Göttingen

LOG Typ: section

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Instituts in Göttingen

XXXVI. Untersuchungen über die natürliche Bodenunruhe (Mikroseismik) mit transportablen Dreikomponentenstationen

Von Fro Trommsdorff, Göttingen. — (Mit 10 Abbildungen)

Die Ausbreitung der natürlichen Bodenunruhe wird mit transportablen Zwei- und Dreikomponentenstationen untersucht. Ein transportabler Vertikalapparat von einstellbarer (1 bis 12 sec) Periode wird beschrieben. — Die scheinbaren Geschwindigkeiten und Herkunftsrichtungen schwanken periodisch mit der Periode der Schwebung. Aus dem Schwebungsmaximum bestimmte Geschwindigkeiten sind von der Größenordnung 3000 m/sec. Die entsprechenden Herkunftsrichtungen lassen sich mit der Lage von Zyklonen in Zusammenhang bringen. Es wird versucht die Bodenunruhe als Überlagerung zweier Teilwellen verschiedener Frequenz und Richtung zu deuten.

Um einen Überblick über die große Zahl von Arbeiten zu geben, die sich mit der natürlichen Bodenunruhe von meist 4 bis 8 sec Periode befassen, muß hier auf die allgemeinen Darstellungen [8] [11] verwiesen werden. Von den neueren Arbeiten [5] bis [10] wird im folgenden besonders auf die von H. D. Krug [5] und von R. Bungers [6] Bezug genommen. Von Krug ist zum erstenmal das Prinzip der statistischen Auswertung von Stationsmaterial verlassen. Die Ausbreitung der Bodenunruhe wird mit transportablen Horizontalseismographen an zwei und drei Stationen in zwei Komponenten gleichzeitig aufgezeichnet. Das entscheidende Ergebnis ist nicht die scheinbare Herkunftsrichtung N 63° E und die überraschend geringe scheinbare Ausbreitungsgeschwindigkeit von 1100 m/sec*), sondern das an allen drei Stationen völlig gleichartige Verhalten der Schwingungsbahnen, deren „Hauptachse“ gleichsinnig und gleichstark um bestimmte Werte pendelt. Im folgenden soll einmal dies Ergebnis nachgeprüft und erweitert werden. Dabei werden die Untersuchungen mit Zwei- und Dreikomponentenstationen fortgesetzt. Die notwendigen transportablen Vertikalseismographen werden hierfür entwickelt und gebaut. Schließlich wird versucht, die Bodenunruhe als Überlagerung zweier Wellenzüge aus verschiedener Richtung zu deuten.

Konstantenbestimmung für den langperiodischen, transportablen Horizontalseismographen. Zunächst sollen die Instrumente beschrieben und besprochen werden, soweit das für die Horizontalseismographen nicht schon in der Arbeit von Krug geschehen ist. Durch Vergleichsregistrierung mit dem Stationspendel

*) Schon in der Arbeit von Krug wird ausgesprochen, daß es sich hierbei wahrscheinlich um die Wanderungsgeschwindigkeit der Maxima einer kombinierten Welle handelt, die aus zwei oder mehreren Teilwellen besteht.

und durch Eichung auf dem Schütteltisch haben Krug und Förtsch die statische Vergrößerung der Horizontalpendel $V = 8000$ bestimmt (bezogen auf 2 m Registrierabstand und 1 mm Spiegelachse). Eine Neigung von $1/100$ Bogensekunde wird bei 2 m Registrierabstand mit 6 mm aufgezeichnet. Es zeigte sich eine starke Abhängigkeit von der Neigung. Das bedeutet praktisch eine Änderung der Vergrößerung bei jeder neuen Aufstellung, da der Winkel zwischen Federachse

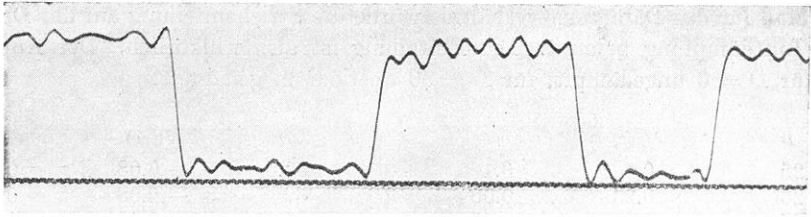


Fig. 1. Nullpunktsverlagerung durch magnetische Ablenkung der Pendelmasse.
(Eichung)

und Lot nicht konstant eingestellt werden kann. Deshalb wurde die Vergrößerung der Apparate im Gelände nochmals nach einer Methode von Angenheister verglichen. Ein Stabmagnet wurde dazu in einem bestimmten gleichen Abstand von der Pendelmasse angebracht und die Ablenkung aufgezeichnet. Die Nullpunktsverlagerung ist dann ein Maß für die statische Vergrößerung.

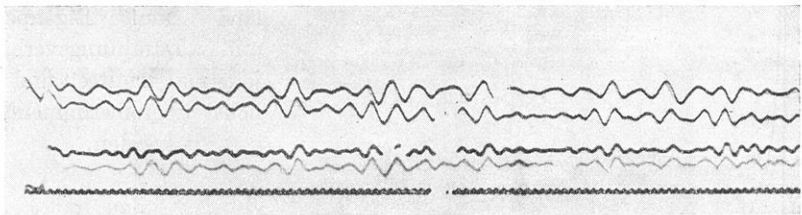


Fig. 2. Gleichzeitige Aufnahme der vier transportablen Horizontalseismographen
(H_6, H_7, H_8, H_9 NS).

Es zeigte sich, daß bei jeder einzelnen Aufstellung das Vergrößerungsverhältnis für die Dauer ihrer Aufstellung annähernd konstant blieb.

Die Bestimmung der Eigenperiode und der Dämpfung geschah durch Anzupfen der Pendelmasse mit dem Magneten. Störungen, die durch Anpusten oder Antippen eintreten konnten, wurden so vermieden.

Die gleichzeitige Aufnahme der vier transportablen Horizontalseismographen ergab unter Berücksichtigung der Parallaxe eine Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Apparaten.

Nach der Diskussion der Indikatorgleichung für ein gedämpftes Pendel ist ein Voreilen der Bodenbewegung σ gegenüber dem Pendelausschlag a um die

Zeit δ zu erwarten. Man kann δ als Funktion von \mathfrak{T}/T_0 für verschiedene Dämpfungs-
werte darstellen (s. Angenheister [1] S. 574, Fig. 36).

Der Unterschied von δ für zwei verschiedene Apparate mit verschiedener
Eigenperiode und Dämpfung kann danach im ungünstigsten Falle gleich der
halben Periode der aufgezeichneten Bewegung sein. Systematische Vergleichs-
registrierungen zweier Horizontalapparate gaben folgende Werte für den Phasen-
unterschied bei verschiedener Dämpfung und annähernd gleicher Eigenperiode.
Als Maß für das Dämpfungsverhältnis wurde die Stricheinteilung auf der Drossel
der Luftdämpfung benutzt. Die Einteilung ist also willkürlich. Der Apparat
ist für $D = 0$ ungedämpft, für $D = 50$ aperiodisch gedämpft.

D	δ (sec)	δ/\mathfrak{T}	D	δ (sec)	δ/\mathfrak{T}
25	0.4	0.1	30.0	— 0.08	— 0.02
26	0.23	0.05	32	— 0.08	— 0.02
27	0.2	0.05	35	— 0.12	— 0.03
28.5	0.3	0.07			

H_9 wurde unverändert mit $T_0 = 6.8$ sec und einer Dämpfung 29 eingestellt.
 H_8 hatte eine Eigenperiode von $T_0 = 6.2$ sec, die Dämpfung wurde verändert.
 δ sei hier die Phasenverzögerung gegenüber H_9 . Für H_8 , früher als H_9 , ist δ positiv.

Für D zwischen 28.5 und
30.0 muß $\delta = 0$ werden.
Beim Arbeiten mit drei
und vier Stationen im Ge-
lände muß Eigenperiode
und Dämpfungsverhältnis
jedesmal ermittelt und mög-
lichst übereinstimmend ein-
gestellt werden.

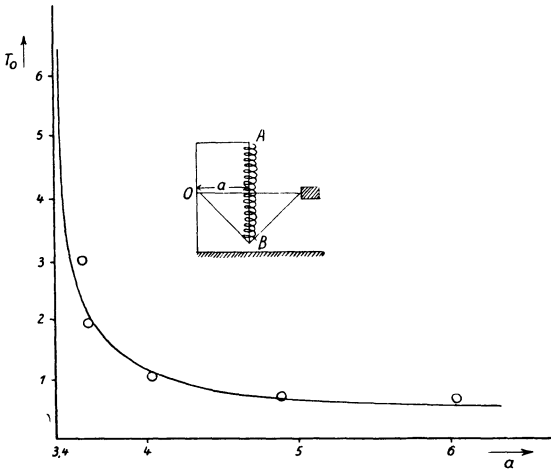


Fig. 3. Abhängigkeit der Eigenperiode T_0 astasierter
Vertikalseismographen vom Abstand a des Dreh-
punkts O von der Achse der Spiralfeder AB (s. Skizze
und Fig. 4)

Der Bau eines lang-
periodischen, transportablen
Vertikalseismographen (abge-
kürzt LPZ). Für die weite-
ren Untersuchungen sollten
außerdem transportable,
langperiodische Vertikalseis-
mographen gebaut werden.
Das Prinzip eines Appa-
rates, der die vertikale Kom-
ponente der Bodenbewegung aufzeichnet, beruht auf der Trägheit einer Masse M ,
die an einer Spiralfeder aufgehängt ist ([1] S. 580, Fig. 9). Ein derartiges Pendel
ist wegen seiner hohen Horizontalempfindlichkeit unbrauchbar. Bei einem anderen
Typ von Vertikalseismographen befindet sich die Masse am Ende eines hori-

zontalen Armes, der sich um eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Achse dreht. Die Feder greift an einem Punkte des horizontalen Armes an.

Durch einen einfachen Kunstgriff (s. Galitzin [3]) kann die Eigenperiode des Apparates und damit die Empfindlichkeit erhöht werden. Der untere Aufhängepunkt der Feder wird unterhalb der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Drehpunkt des Systems verlegt. Durch diese Astasierung wird bei einer

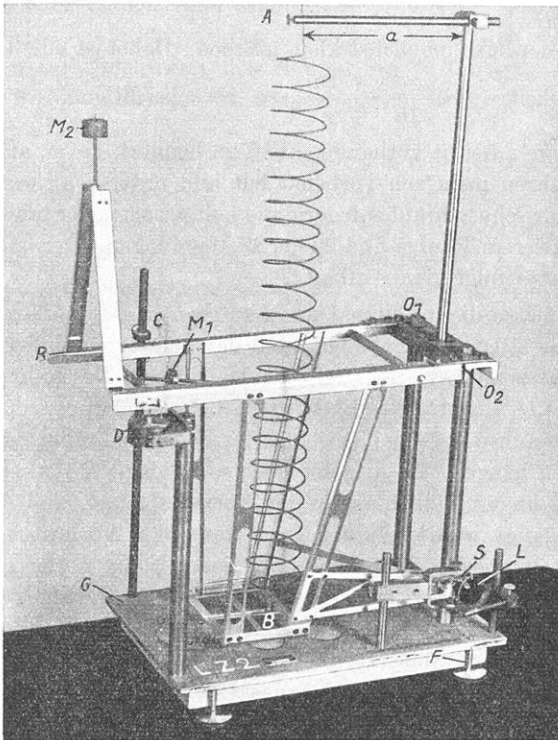


Fig. 4. Transportabler Vertikalseismograph (LPZ_2),
Eigenperiode $T_0 = 1$ bis 12 sec

kleinen Auslenkung der Ausschlag in der betreffenden Richtung vergrößert. Von einer bestimmten Grenzlage ab kippt das Pendel schon bei kleinen Ausschlägen um.

Daß eine beliebige Steigerung von T_0 bei vorgegebener Feder nicht immer möglich ist, zeigten die ersten Versuche mit einem kleinen Vertikalapparat. ($M = 2220$ g, $L_0 = 20$ cm, $h = 5$ cm, $d = 4$ mm, $2r = 3$ cm, $i = 5$.) In Fig. 3 ist für diesen Apparat $T_0 = f(a)$ dargestellt. Die nach einer Formel von Galitzin berechnete Kurve wurde durch den Versuch bestätigt. In der Zeichnung sind die berechneten Werte (Kurve) und die Versuchswerte \circ eingetragen.

Praktisch konnte die Periode nicht über 3 sec, erhöht werden, a war dann etwa 3.5 cm. Bei 3.4 cm Abstand war der Seismograph bereits instabil.

Es ist also notwendig, auch die Eigenschwingung der Feder von vornherein möglichst groß zu wählen. Die Schwingungszeit einer Feder ist allgemein

$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{f}{g}}$, wenn f die Verlängerung bei einer Belastung P bedeutet. Da $f = \frac{4 \pi i r^2}{d} \cdot \frac{\max \tau'}{G}$, muß ich den Radius r und die Windungszahl i möglichst groß und die Federdicke möglichst klein machen. Dabei ist eine bestimmte geforderte Tragfähigkeit $P = \frac{\pi d^3}{16} \cdot \frac{\tau' \text{ zul.}}{r}$ zu berücksichtigen.

Es wurden im Institut vorhandene Federn benutzt, die zu anderen Versuchszwecken vor Jahren mehrfach vorbehandelt und untersucht worden waren. Es waren das zylindrische Schraubenfedern aus kalt gezogenem Stahldraht von 2 mm Dicke, 5 cm mittlerem Radius und 22 bis 23 Windungen. Der danach berechnete Seismograph hatte folgenden Aufbau.

Als Pendelmasse diente einmal das Laufgewicht $M_1 = 25$ g. Außerdem ist die Masse $M_2 = 110$ g so angebracht, daß der Schwerpunkt der bewegten Teile in der Horizontalebene durch die Drehachse $O_1 O_2$ liegt. Der Rahmen R ist an dem festen Gerüst in O_1 und O_2 mit Blattfedern befestigt. Kippt man den Apparat um 90° um diese Achse $O_1 O_2$ bei ausgehängter Feder, so muß der Rahmen R senkrecht nach unten hängen. Ist dies der Fall, so ist der Vertikalseismograph praktisch horizontal unempfindlich unter der Voraussetzung, daß das Gewicht der Feder vernachlässigt werden kann. In C kann der Apparat arretiert werden. D ist eine verstellbare Luftdämpfung. Die Feder ist in A und B so aufgehängt, daß der Abstand a verändert werden kann. Das feste Gerüst ist auf der Grundplatte G montiert, die mit den Fußschrauben F geneigt werden kann. Das Übertragungssystem mit dem Spiegel S und der Linse L befindet sich senkrecht unter dem Drehpunkt O_2 , damit der Faden des Übertragungssystems nur eine Horizontalbewegung ausführt. Das ist nur möglich, wenn die Spiegelachse senkrecht über oder unter der Drehachse steht. Alle beweglichen Teile sind aus Leichtmetall hergestellt. Der Apparat hat die Masse $45 \times 25 \times 75$ cm. Er wiegt nur 8.55 kg.

Bei der Konstruktion waren zwei Forderungen maßgebend gewesen: 1. lange Eigenperiode T_0 , 2. geringes Gesamtgewicht und geringe Ausmaße. Die Eigenperiode konnte bei den beiden Apparaten in den Grenzen von 1 bis 12 sec verändert werden. Bei der Messung wurde eine Eigenperiode von 6 bis 8 sec eingestellt. Bei diesen Perioden war der Apparat noch hinreichend stabil. Die Labilitätsgrenze lag bei 10 bis 12 sec. Die Ausmaße und das Gesamtgewicht machten den Apparat bequem transportabel.

Wegen der hohen Empfindlichkeit für Luftströmungen wurde der Seismograph unter einem Überdeckungskasten aufgestellt. Bei Aufstellung in Keller-

räumen lagen die Schwankungen durch Temperatureinfluß im allgemeinen unter der Störungsschwelle. Der einzige Nachteil der geringen Pendelmaße war der starke Einfluß der Reibung in den Lagern der Spiegelachse. Kleine Bodenamplituden werden durch die Reibung unterdrückt, um so mehr, je geringer die träge Masse. Durch sorgsames Schleifen der Achsenspitze muß die Reibung vermindert werden. Bei der Einstellung der Eigenperiode durch Verändern des Abstandes der Aufhängepunkte vom Drehpunkt muß die Lage von Feder und Rahmen dauernd kontrolliert werden. Der Rahmen muß um eine horizontale Mittellage schwingen. Durch Verstellung des Laufgewichtes M_2 ist der Schwerpunkt in die Rahmenebene gelegt. Schwingt der Rahmen nicht um eine horizontale Lage und steht die Feder in der Ruhelage nicht genau senkrecht, tritt Horizontalempfindlichkeit auf.

Die Dämpfung wurde für die Untersuchungen nahezu aperiodisch eingestellt. Die Prüfung der beiden transportablen Vertikalseismographen und die Bestimmung ihrer Vergrößerung geschah zunächst durch Vergleichsregistrierungen untereinander und mit dem 1800 kg Wiechert-Vertikalpendel.

Bezogen auf 2 m Registrierabstand und 1 mm Spiegelachse betrug die statische Vergrößerung 4000.

Es standen also für die weiteren Untersuchungen nunmehr außer den Stationsapparaten des Göttinger Geophysikalischen Instituts vier transportable, langperiodische Horizontal- und zwei entsprechende Vertikalseismographen zur Verfügung, also drei vollständige Dreikomponentenstationen.

Gleichzeitige Aufzeichnung der Bodenunruhe an vier Stationen in ein und zwei Horizontalkomponenten. Während des Baues und der Vorversuche mit dem neuen Vertikalpendel wurden zunächst die von Krug begonnenen Messungen noch einmal wiederholt.

Die drei transportablen Stationen wurden mit einmal zwei und zweimal je einem Horizontalapparat besetzt. Sie befanden sich in Holzerode, in Ebergötzen und in Waake.

Die geologischen Verhältnisse sind in dem Gebiet, in dem die 3 Stationen liegen, einheitlich. Die gut erkennbare Buntsandsteinplatte dehnt sich noch weit nordostwärts Holzerode aus. Waake liegt auf ihrem westlichen Rand. Ostwärts Ebergötzen beginnt ein flaches Gebiet mit starker Bedeckung. Die dämpfende Wirkung von nur einigen Metern Tonschicht über dem Buntsandstein wurde bei der ersten Aufstellung der Station Ebergötzen festgestellt. Die Intensität betrug nur ungefähr 50% der wenige 100 m entfernt auf gewachsenem Fels aufgezeichneten Bewegung. Außerdem waren bei der ersten Aufstellung die Schwingungsbilder schlecht mit denen der anderen Stationen vergleichbar. Bei den im folgenden beschriebenen und untersuchten Registrierungen konnten an allen Stationen die Apparate unmittelbar auf gewachsenem Felsen aufgestellt werden. Als vierte Kontrollstation wurde das Horizontal-Fernbebeninstrument des Göttinger Geophysikalischen Instituts benutzt.

Die Entfernungen betragen von Waake nach Ebergötzen 3.5 km, nach Holzerode 4 km und nach Göttingen 6.5 km, also durchweg mehr als das Doppelte der Entfernungen in dem von Krug benutzten Dreieck bei Göttingen. Der Fehler durch verschiedene Phasenverzögerung zwischen den einzelnen Apparaten ist dadurch prozentual geringer. Registriert wurde die Bodenunruhe in den Monaten November und Dezember 1937 zugleich mit dem Nauener Zeitzeichen von 0⁵⁵ bis 1⁰⁶ Uhr. Hier soll die Auswertung der Messungen vom 16. bis 20. November 1937 besprochen werden.

Fig. 5 zeigt ein Stück der gleichzeitigen Aufnahmen der Bodenunruhe an vier Stationen: Göttingen und Ebergötzen NS- und EW-Komponente, Waake und Holzerode NS-Komponente. Ausgeprägte Schwingungsbilder sind eindeutig

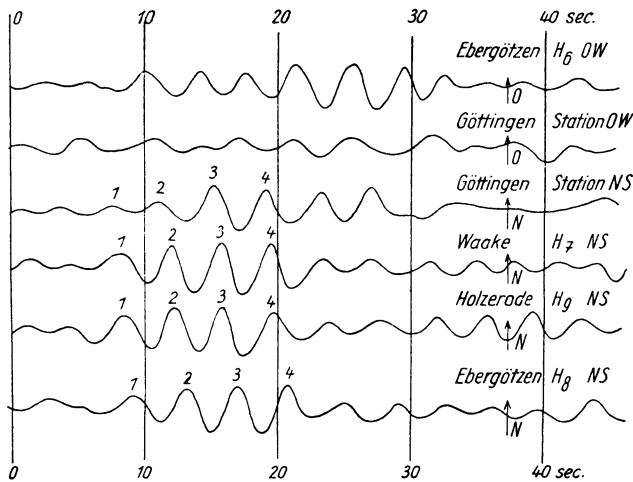


Fig. 5. Gleichzeitige Aufzeichnung der Bodenunruhe an vier Stationen auf gleichen Zeitmaßstab umgezeichnet

zuzuordnen. Die Registrierungen wurden zunächst genau wie bei Krug ausgewertet, d. h. aus der Differenz der Ankunftszeiten von Umkehrpunkten und aus den zugehörigen Wellenwegen wurde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnet. Entsprechend wurden aus den Ankunftszeiten und aus der Lage der Schwingungsbahnen die Wellenfront und Herkunftsrichtung bestimmt. Die horizontale Projektion der Bodenbewegung konnte freilich nur für zwei Stationen gezeichnet werden. Bei der dritten konnte wegen der sehr großen Ähnlichkeit der Schwingungsbilder in der NS-Komponente auf gleichgute Übereinstimmung in der EW-Komponente und damit auf ähnliche Schwingungsfiguren geschlossen werden. Der zeitliche Verlauf von Amplitude, Periode und Laufzeit wurde in gleicher Weise beobachtet wie von Krug, (Fig. 10, 11, Zeitschr. f. Geophys. 13, 340, 342, 1937), ebenso die Schwingungsfiguren (Fig. 4, 334, 1937). Die Richtung der

Wellennormalen und der Hauptachse der Schwingungsbahn pendeln jedesmal um die gleiche Richtung (Fig. 7, S. 338). Aus den Differenzen der Ankunftszeiten und den wahren Wellenwegen ergibt sich eine scheinbare Geschwindigkeit für den

17. XI. $v \sim 3.5$ km/sec,	19. XI. $v \sim 2.8$ km/sec,
18. XI. $v \sim 4.0$ km/sec,	20. XI. $v \sim 3.0$ km/sec.

Die scheinbare Herkunftsrichtung ist für den

17. XI. westsüdwestlich,	19. XI. westnordwestlich,
18. XI. nordwestlich,	20. XI. westlich.

Die Wetterentwicklung vom 16. bis 17. XI. zeigt Druckanstieg über Skandinavien. Gleichzeitig beginnt ein tagelang im Raum um die Azoren gelegenes Tief unter stetiger Vermehrung seiner Energie auf den europäischen Kontinent überzugreifen, Fig. 6. Am 17. wird dieses Tief nordwärts gelenkt und schwenkt ein neues bereits kräftiges Teiltief um seine Südseite herum auf die Biskaya zu. Der Kaltlufteinbruch, der gleichzeitig auch in das Mittelmeer hinein erfolgt, führt über dem Golf von Genua zur Zyklonenbildung.

Am 18. XI. hatte sich das kräftige Tief des Vortages in den Raum zwischen Schottland und Island verlagert, liegt also jetzt in nordwestlicher Richtung, Fig. 6. Die Zone tiefen Drucks vor der europäischen Westküste festigt sich weiter.

Göttingen	Waake	Holzerode	Ebergötzen	Wa—Gö Δt_1	Ho—Wa Δt_2	Eb—Ho Δt_3
7.2	7.6	8.1	8.7	0.4	0.5	0.6
10.3	10.9	10.9	11.9	0.6	0.0	1.0
13.5	13.5	13.5	14.7	0.0	0.0	1.2
48.00	48.10	49.44	50.60	0.10	1.34	1.16
52.71	52.89	53.08	53.98	0.18	0.19	0.90
57.85	57.72	57.56	58.31	- 0.13	- 0.16	0.75
3.38	2.70	1.46	2.60	- 0.68	- 1.24	1.14
4.2	3.5	2.7	4.0	- 0.7	- 0.8	1.3
6.3	7.1	6.8	8.0	0.8	- 0.3	1.2
10.5	11.1	10.8	12.0	0.6	- 0.3	1.2
13.8	15.5	15.1	16.7	1.7	- 0.4	1.6
38.0	38.9	39.6	39.7	0.9	0.7	0.1
41.6	42.6	42.6	43.8	1.0	0.0	1.2
45.9	46.5	46.4	47.7	0.6	- 0.1	1.3
49.8	50.0	50.2	51.2	0.2	0.2	1.0

Bei verstärkter Westströmung hatte sich vom 18. zum 19. ein Sturmtief entwickelt, welches über Spanien ostnordostwärts fortschritt. In der Biskaya gab es vollen Sturm. Ein Tief, das bereits an Energie verlor, zog von Irland in Richtung auf Island. Am 20. ist eine vollständige Zentrierung des seit Tagen umfangreichen westeuropäischen Tiefdruckgebietes erfolgt. Die Wetterkarte von 8 Uhr zeigt den Kern bereits vor der südschandinavischen Küste. In dieser Richtung zieht es weiter, nachdem es im deutschen Küstengebiet vollen Südweststurm

hervorgerufen hatte. Aus den Karten der dreistündigen und der vierundzwanzigstündigen Luftdruckänderung können wir die ungefähre Lage zur Zeit der Registrierung von jeweils 1 Uhr früh bestimmen (Fig. 6). Ebenso gibt die aus den Ankunftszeiten bestimmte Herkunftsrichtung die Lage des Tiefdruckgebietes an.

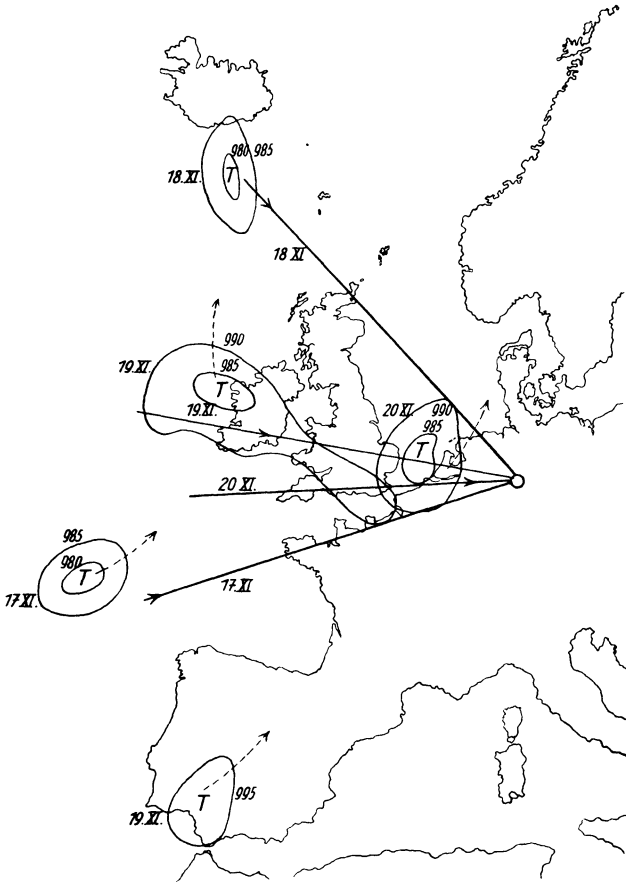


Fig. 6. Scheinbare Herkunftsrichtung der Bodenunruhe und Lage des Tiefdruckkerns für die Tage vom 17. bis 20. November 1937. ---> Zugrichtung des Tiefdruckkerns.
—> Scheinbare Herkunftsrichtung der Bodenunruhe

Damit ist nicht gesagt, ob das Sturmtief als solches oder die dadurch verursachte Küstenbrandung die Ursache der Bodenunruhe bildet. Die scheinbare Herkunftsrichtung ändert sich in den Tagen vom 17. bis 20. XI. 1939 in sehr ähnlicher Weise wie die Lage der Sturmtiefs.

In der vorstehenden Tabelle sind als ein Beispiel die Ankunftszeiten der Umkehrpunkte der NS-Komponente in sec für etwa 2 Minuten des 19. XI. 1937

angegeben. Δt_1 ist die Differenz der Ankunftszeiten zwischen Waake und Göttingen, Δt_2 zwischen Holzerode und Waake, Δt_3 zwischen Ebergötzen und Holzerode.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die bisher noch als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bodenunruhe bezeichnete Wanderungsgeschwindigkeit der Umkehrpunkte an verschiedenen Tagen um verschiedene Werte der Größenordnung 2 bis 4 km/sec schwankt. Dieses Ergebnis gilt nur für die drei Außenstationen. Die vierte Kontrollstation ließ sich nicht in der gleichen Weise einbeziehen. Es hat den Anschein, daß gleiche ausgeprägte Schwingungsbilder an zwei etwa 6 km voneinander entfernten Stationen gleichzeitig beobachtet werden können. Das entspricht einer sehr hohen Scheingeschwindigkeit. Die von Krug gemessene Wanderungsgeschwindigkeit von 1100 m/sec wurde bei diesen Messungen nicht wiedergefunden. Als Herkunftsrichtungen wurde SSW bis NW gefunden. Die von Krug beobachtete Hauptrichtung N 51° E wurde nicht wieder festgestellt. Auffallend bleibt, daß auch bei Aufzeichnungen über jeweils 15 Minuten an mehreren aufeinanderfolgenden Tagen die ermittelten Phasengeschwindigkeiten immer um bestimmte Werte zu schwanken scheinen. Bei den Messungen vom 16. bis 20. XI. 1937 ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit von der Größenordnung 3 km/sec entsprechend der erwarteten wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen. Diese Ergebnisse stellen aber Mittelwerte von jeweils höchstens 4 bis 5 Schwingungen im Maximum der Schwebung dar. Dabei schwanken die Werte im allgemeinen um 30 bis 40%, nur an besonders günstigen Stellen um 20% und weniger.

Die oben angegebene Wertetabelle enthält fortlaufend immer nur 4 bis 5 Schwingungen. Dann kommt eine Lücke, die dem Schwebungsminimum entspricht. Dort würden sich alle möglichen Geschwindigkeiten von 0 bis ∞ ergeben.

Die Möglichkeiten für eine Deutung ergaben sich aus dem Vergleich der Wetterlagen vom 13. I. 1937 (Krug's Dreiecksmessung) und der vom 19. XI. 1937 (Messung Holzerode—Ebergötzen—Waake—Göttingen). Am 13. I. hatten wir eine ausgesprochene Nordwetterlage. Ein starkes Tiefdruckgebiet liegt vor der norwegischen Küste. Die Richtung N 51° E zeigt freilich erheblich weiter ostwärts. Am 19. XI. herrscht die oben beschriebene Westwetterlage, während es an der norwegischen Küste verhältnismäßig ruhig ist. Es wird also vermutet, daß die natürliche Bodenunruhe von zwei oder mehreren Sendern (Sturmzentren) verschiedener und wechselnder Stärke ausgeht. Als Beispiel können die norwegische Küste und der Golf von Biskaya angegeben werden. Bei den Bodenunruhewellen hätten wir es danach mit der Überlagerung zweier oder mehrerer Teilwellen verschiedener Frequenz und verschiedener Richtung zu tun. Dann wäre auch die beobachtete Geschwindigkeit als Wanderung der Maxima einer solchen kombinierten Welle zu deuten. Dabei scheinen die Phasengeschwindigkeiten im Schwebungsmaximum der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Teilwelle zu entsprechen. Wenn bei einer sehr ausgesprochenen Wetterlage nur *ein*

Sender in Erscheinung tritt, dürfte man erwarten, auf dem angegebenen Wege die wahre Fortpflanzungsgeschwindigkeit der natürlichen Bodenunruhe zu ermitteln.

Um die Annahme von zwei verschiedenen Sendern für die Dreiecksmessung Krug und die Messung Holzerode usw. nachzuprüfen, wurde für den 13. I. (Sturmtief an der norwegischen Küste) und den 19. XI. (Sturmtief in der Biskaya) das Stationsmaterial von Hamburg, Königsberg, Stuttgart, Jena, Zürich, Paris, Straßburg, Uccle untersucht.

In der folgenden Tabelle ist das Verhältnis von NS zu EW für die beiden Tage an den verschiedenen Stationen verglichen.

Station	NS/EW 13. I.	NS/EW 19. XI. 38
Stuttgart	1.8	0.7
Straßburg	0.7	0.8
Paris	1.0	0.4
Zürich	1.3	1.2
Jena	1.0	1.0
Kew	1.6	1.0
Hamburg	1.65	1.0
Königsberg	2.3	(0.8)

(NS fast keine Bewegung am 19. November 1938.)

Es scheint tatsächlich ein Zusammenhang zu bestehen. Abweichungen sind auf Verschiedenheiten des geologischen Untergrundes und des vermutlich großtektonischen Zusammenhanges [s. R. Schwinner *)] zurückzuführen. Berücksichtigt man diesen Einfluß, dann zeigt sich, daß die Stationen Straßburg, Paris, Zürich usw. vor allem im Bereich der Biskaya-Störungen liegen, und daß Hamburg, Kew usw. wesentlich unter dem Einfluß der vor Norwegen liegenden Depression stehen. Göttingen, Jena und Stuttgart werden annähernd gleichstark von der Biskaya und der Nordsee beeinflußt.

Gleichzeitige Aufzeichnung der Bodenunruhe an drei Stationen in drei Komponenten. Eine Erweiterung und Vervollständigung der bisherigen Messungen sollten die Untersuchungen in drei Komponenten bilden. Die vollständige räumliche Bewegung eines Bodenteilchens und die Veränderung des Schwingungsbildes mit der Zeit gleichzeitig für mehrere Stationen soll dargestellt werden. Das Verhältnis von H zu Z ist bisher nur an festen Stationen bestimmt worden; Ausbreitungsgeschwindigkeit und Herkunftsrichtung der Bodenunruhe berechnet aus der Vertikalkomponente noch nicht. Zur Erklärung der physikalischen Natur der Bodenunruhewellen ist aber die Kenntnis aller drei Komponenten notwendig.

*) R. Schwinner: Mikroseismische Bodenunruhe und Gebirgsbau. Zeitschr. f. Geophys. IX, 332 (1933).

Im Juli 1937 wurden bei nur schwacher Sommerbodenunruhe Voruntersuchungen durch gleichzeitige Aufnahme von H_7 (EW), H_8 (NS) und Wiechert $1.3 t$ (Z) vorgenommen. Im zeitlichen Verlauf war die räumliche Bahn eines Bodenteilchens äußerst kompliziert, da sich die Periode in der H - und Z -Komponente zeitlich verschieden ändert. „Schöne“ Schwingungsbilder gibt es aber nur bei gleicher Periode in allen drei Komponenten. Für einen solchen Zustand ist die Bodenbewegung in Fig. 7 gezeichnet. Das Verhältnis von H zu Z betrug 3:1 bis 4:1 im Mittel, die Maximalamplituden von Z 0.1 bis 0.2μ . Das räumliche Modell der Bahn eines Bodenteilchens ist von SO nach NW geneigt. Dieser Abfall von S nach N wurde zu verschiedenen Zeiten gefunden. Untersuchungen über den Drehungssinn gaben kein einheitliches Bild. Nach Durchgang durch ein Minimum, in dem die Schwingungsbahn nicht mehr zu zeichnen war, konnte sich der Drehungssinn umkehren.

Weitere Voruntersuchungen wurden mit den beiden neuen Vertikalapparaten in der Zeit vom 20. II. bis 11. III. 1938 durchgeführt.

Die eigentliche Dreiecksmessung wurde in der Gegend des Göttinger Instituts ausgeführt, da als dritter Vertikalapparat das Stationspendel benötigt wurde. Registrierungen am Stadtrand von Göttingen, in Weendespring, Klostergut und Versuchsgut Weende, in Nikolausberg und Knochenmühle ergaben gute Vergleichbarkeit ausgeprägter Schwingungsbilder zwischen Institut, Versuchsgut Weende und Knochenmühle. Anormale Abweichungen, die durch den geologischen Untergrund bedingt sind, zeigten sich vor allem in Weendespring und Klostergut Weende. Bei stark abnehmender Intensität waren auch die Schwingungsbilder nicht mehr vergleichbar. In Weendespring stand die Station nur 10 m von dem steil abfallenden Muschelkalk im Keller eines auf schlammigem Quellboden ruhenden Hauses.

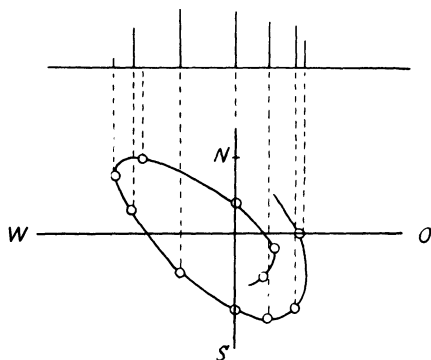


Fig. 7. Projektion der räumlichen Bodenunruhe auf die Horizontalebene. Im oberen Teil der Figur die Vertikalkomponente in den einzelnen Punkten als Höhe. (Von Punkt zu Punkt $\frac{1}{2}$ sec, dargestelltes Intervall = 5 sec)

Geschwindigkeitsbestimmungen ergaben an verschiedenen Tagen verschiedene Mittelwerte im Bereich von 1 bis 4 km/sec.

Die weiteren Messungen wurden ganz erheblich durch die Mitwirkung eines Göttinger Senders erleichtert. Es wurden Sekundenmarken mit einer Kontaktuhr gesendet, die durch wechselnde Minutenmarken unterbrochen wurden. Die Station Geophysikalisches Institut registrierte gleichzeitig die Sekundenkontakte der Riefleuhr zur Kontrolle.

Für die Registrierung am 24. III. 1938 17 bis 20 Uhr waren folgende Apparate aufgestellt: In Versuchsgut Weende H_8 (NS) und LPZ_1 , Knochenmühle H_9 (NS) und LPZ_2 , Göttingen Institut H_6 (EW), H_7 (NS) und Wiechert 1.8 t (Z). Ausgeprägte Schwingungsbilder ließen sich an allen drei Stationen sowohl in der H - als auch in der Z -Komponente identifizieren (Fig. 8).

Auffallend sind sehr starke und nichtperiodische Schwankungen des Verhältnisses H/Z . Die Werte für H/Z liegen zwischen 0.8 und 6 und haben eine

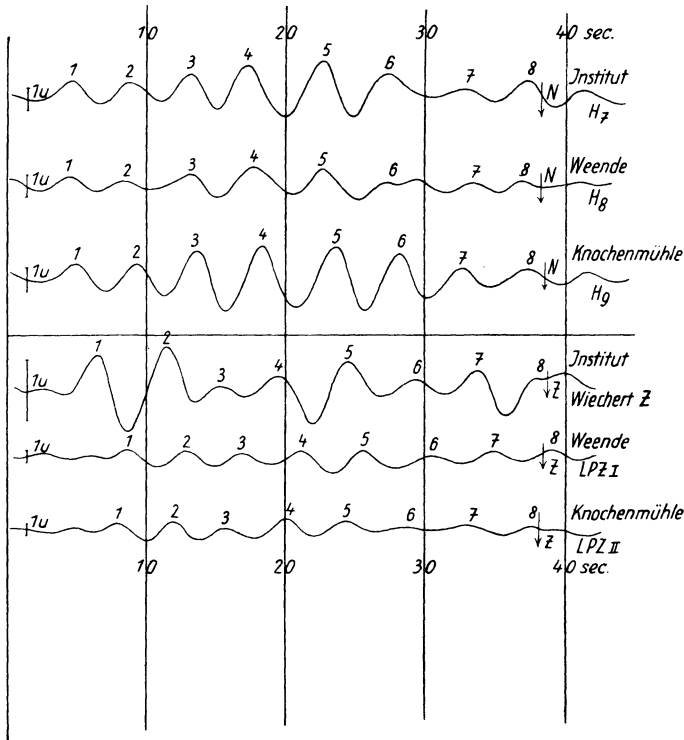


Fig. 8.

Gleichzeitige Aufzeichnung der Bodenunruhe an drei Stationen in Horizontal- und Vertikalkomponente auf gleichen Zeitmaßstab umgezeichnet

Häufungsstelle bei dem Mittelwert $H/Z = 3.4$. Die Vertikalprojektion der Bodenbewegung auf die NS-Ebene konnte nur für Stellen annähernd gleicher Periode in NS und Z gezeichnet werden (Fig. 10). Die Bilder sind an allen drei Stationen ähnlich. Wir erkennen, daß ein Umkehrpunkt in Göttingen bei sec 1, an der Knochenmühle zwischen sec 2 und 3 und am Versuchsgut bei sec 2 liegt. Bestimmen wir wieder Lage der Wellenfront und Differenz der Ankunftszeiten in sec für die drei Stationen in der Vertikalkomponente, so ergeben sich folgende Werte (siehe Tabelle auf S. 318 oben).

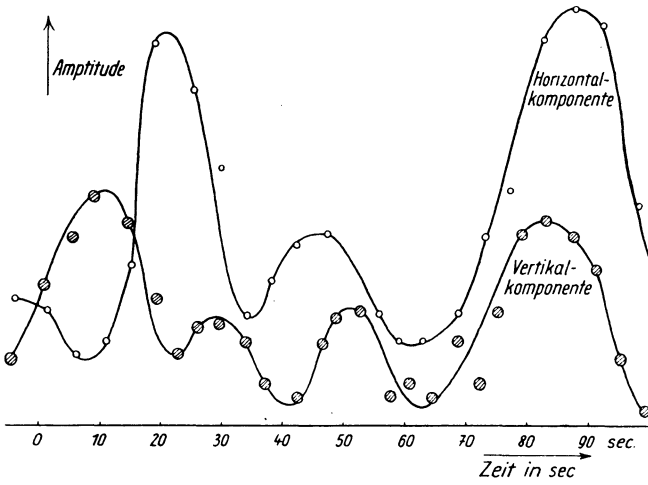


Fig. 9.
Gleichzeitige Amplitudenfolge der Horizontal- (○)
und Vertikalkomponente (⊗)

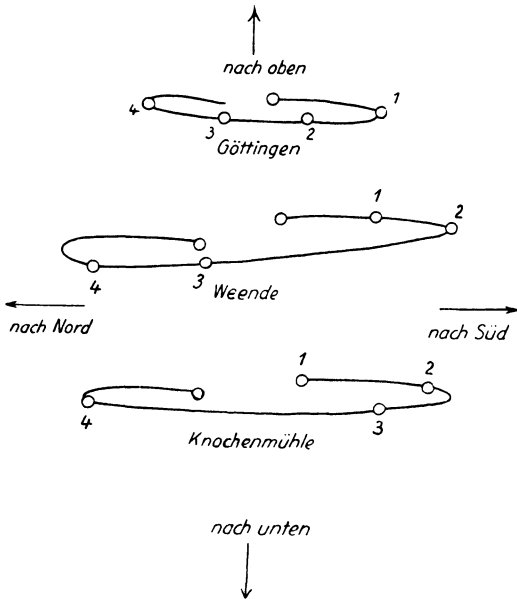


Fig. 10.
Projektion der Bodenbewegung auf die Meridianebene nach gleichzeitiger
Aufzeichnung an drei Stationen (○ bis ○ = 1 sec)

I Institut WZ	II Knochenmühle LPZ ₂	III Versuchsgut LPZ ₁	II—I Δt_1	III—II Δt_2
9.5	10.7	10.2	1.2	— 0.5
12.4	13.6	13.5	1.2	— 0.1
15.8	16.7	17.2	0.9	0.5
19.4	20.2	21.1	0.8	0.9
23.5	23.8	25.1	0.3	1.3
27.5	27.3	24.2	— 0.2	1.9
34.5	34.6	35.6	0.1	1.0
39.7	40.7	40.6	1.0	— 0.1
57.0	58.0	58.5	1.0	0.5
61.1	61.7	62.4	0.6	0.7

Als mittlere Herkunftsrichtung finden wir SSW. Die mittlere Geschwindigkeit würde 1 km/sec betragen.

Die Horizontalkomponente (NS) konnte nicht genau zur gleichen Sekunde, aber innerhalb derselben Minute ausgewertet werden.

III Versuchsgut H_8	I Institut H_7	II Knochenmühle H_9	I—III Δt_2	II—I Δt_1
0.0	0.4	0.7	0.4	0.3
1.8	2.3	2.8	0.5	0.5
9.1	9.5	9.7	0.4	0.2
5.2	6.6	6.0	1.4	— 0.4
7.1	7.6	8.0	0.5	0.4
10.0	9.8	10.5	— 0.2	0.7
12.7	12.7	13.0	0.0	0.3
14.8	15.0	15.4	0.2	0.4
17.7	17.7	18.1	0.0	0.4
22.5	22.8	23.1	0.3	0.3

Danach ergibt sich aus der NS-Komponente eine ganz andere Herkunftsrichtung WNW und eine andere Geschwindigkeit $v = 3.5$ km/sec.

Wir dürfen die Wanderungsgeschwindigkeit der Umkehrpunkte nicht als Wanderungsgeschwindigkeit der Energie ansehen. Ebenso ist die Bestimmung der Herkunftsrichtung aus der Differenz der Ankunftszeiten unsicher. Sowohl aus der Differenz der Ankunftszeiten wie aus der Hauptachse der Schwingungsbahn ergibt sich aber annähernd die gleiche Richtung.

Bei Annahme nur einer fortschreitenden Welle bei der natürlichen Bodenunruhe kommt man zu bestimmten Widersprüchen, die zu der schon bei Krug [5] angedeuteten Vorstellung von einer aus zwei Teilwellen zusammengesetzten Welle geführt haben. Krug hat bereits versucht, die Frequenzen der Teilwellen zu ermitteln. Versuche zeichnerischer Darstellung zeigten uns dann qualitativ, daß die Versuchsergebnisse sich am einfachsten durch die Überlagerung zweier Teilwellen verschiedener Richtung und Frequenz erklären lassen. Die zur quantitativen Behandlung notwendigen Formeln hat R. Bungers [6] dann eingehend diskutiert. Es sei deshalb hier auf diese gleichzeitig erscheinende Arbeit verwiesen, in der auch die zur Veranschaulichung dienlichen Figuren zu finden sind.

Bemerkenswert erscheint, daß einzelne Schlußfolgerungen, die in der angegebenen Arbeit [6] rein mathematisch gezogen und dann physikalisch gedeutet wurden, gleichzeitig und unabhängig als Ergebnisse der experimentellen Untersuchung gefunden wurden. Unter diesem Gesichtspunkt fassen wir noch einmal die Versuchsergebnisse zusammen und versuchen aus der neuen Vorstellung eine Deutung zu geben. Unter der Annahme einer einheitlichen Wellenfront ergeben sich folgende Widersprüche:

1. Bei der Auswertung eines vollkommenen Schwebungsintervalles ließen sich wohl im Maximum scheinbare Phasengeschwindigkeiten von der Größenordnung 3000 ± 500 m/sec als Mittelwerte bestimmen. Dabei wird in Richtung der kleinsten Geschwindigkeit, das ist senkrecht zur Wellenfront, gemessen und damit angenommen, daß eine Wellenfront vorhanden ist. Im Schwebungsminimum ergaben sich aber alle möglichen Geschwindigkeiten von 0 bis ∞ . Die Werte ändern sich mit der Periode der Schwebung.

Erklärung: Wir betrachten zwei ebene Wellen gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedener Frequenz und verschiedener Herkunftsrichtung. Jetzt ist die Richtung kleinster Geschwindigkeit vom Ort und von der Zeit abhängig. Sie ändert sich mit der Periode der Schwebung. Aber auch in Richtung der kleinsten Geschwindigkeit erhalte ich nicht die wahre Geschwindigkeit der Teilwellen. Sie ändert sich ebenfalls mit der Periode der Schwebung und kann kleiner oder größer als die wahre Geschwindigkeit sein. Nur im Schwebungsmaximum kann man bei Überwiegen einer Teilwelle einen annähernd richtigen Wert erwarten.

2. Der zweite Widerspruch ergab sich bei der gleichzeitigen Aufzeichnung an vier Stationen. Phasengleichheit bei einem Wellenweg von 6 km ist für eine Welle mit der Geschwindigkeit von 3 km/sec, der Periode von 6 sec und der Wellenlänge $\lambda = 18$ km nicht zu erklären, da gleiche Schwingungszustände nur längs der Fronten im Abstand $n \cdot \lambda$ vorkommen.

Erklärung: Die Linien gleicher Phase überdecken bei zwei Wellen verschiedener Fortschreitungsrichtung die Ebene mit „Periodenparallelogrammen“. Punkte gleichen Schwingungszustandes sind schachbrettartig über die Ebene verteilt. Zwei derartige Punkte können sehr wohl so liegen, wie bei der gleichzeitigen Aufzeichnung an vier Stationen gefunden wurde.

3. Unter der Annahme einer einheitlichen Wellenfront ergibt sich ein dritter Widerspruch: Die Drehung der Hauptachse der Schwingungsbahn und entsprechend der Herkunftsrichtung würde verlangen, daß die Welle nacheinander in verschiedenen Herdgebieten erregt wird. Außerdem soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in jeder neuen Richtung verschieden sein. Das widerspricht aber unseren physikalischen Erfahrungen.

Erklärung: Für den Fall zweier linear polarisierter Wellen aus senkrecht aufeinanderstehenden Herkunftsrichtungen erhalten wir die bekannten Lissajous'schen Figuren. R. Bungers [6] behandelt den allgemeineren Fall und findet, daß die Hauptachse tatsächlich mit der Periode der Schwebung schwankt und daß sich die verschiedenen gemessenen Wellengeschwindigkeiten entsprechend erklären lassen.

4. Die Messungen in zwei und drei Komponenten ergaben für jede Komponente eine andere Phasengeschwindigkeit und Fortschreitungsrichtung. So hatte z. B. die Vertikalkomponente eine Herkunftsrichtung SSW und eine Geschwindigkeit $v = 1000$ m/sec, die Horizontalkomponente eine Herkunftsrichtung WNW und eine Geschwindigkeit $v = 3500$ m/sec.

Erklärung: Kommen die beiden Teilwellen z. B. aus der NS- bzw. EW-Richtung, dann erhält man mit der NS-Komponente die EW-Fortschreitungsrichtung und umgekehrt. Die Theorie der Schwingungsellipsen [6] ergibt, daß im allgemeinen die Phasengeschwindigkeit und Fortschreitungsrichtung für jede Komponente verschieden ist.

Dies Ergebnis ist experimentell und theoretisch unabhängig voneinander gefunden worden.

Um Mißverständnisse auszuschalten, sei noch ausdrücklich betont, daß die Bodenunruhewellen zwar wahrscheinlich aus zwei oder mehreren Teilwellen verschiedener Frequenz und verschiedener Fortschreitungsrichtung zusammengesetzt sind. Es ist aber unsicher und meines Erachtens auch unwahrscheinlich, daß diese Teilwellen von zwei oder mehreren bestimmt lokalisierten Sendern ausgehen, etwa von der Biskaya und der norwegischen Küste. Es besteht auch die Möglichkeit, daß im Falle *eines* vorherrschenden Herdes eine zweite und dritte Teilwelle an kontinentalen Schichten oder Blöcken angeregt oder reflektiert wird.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Angenheister für die vielseitigen Anregungen zu dieser Arbeit und sein stetes förderndes Interesse herzlich danken. Besonders danke ich auch Herrn Dr. Schulze und Dr. Förtsch für ihre aufopfernde Hilfe bei den Messungen an den verschiedenen Außenstationen.

Literatur

- [1] G. Angenheister: Seismik (Erdbebenwellen). Handb. d. Phys. Bd. VI, Kap. 8, S. 556.
- [2] E. Wiechert: Theorie der automatischen Seismographen. Abhandlg. d. Göttinger Akad., Bd. 2, I (1903).
- [3] B. Galitzin: Vorlesungen über Seismometrie. Leipzig 1914.
- [4] H. Martin: Schwingungslehre. Handb. d. Experimentalphys. Bd. XVII/I.
- [5] H. D. Krug: Ausbreitung der natürlichen Bodenunruhe. Zeitschr. f. Geophys. (1937), S. 328.
- [6] R. Bungers: Die Überlagerung zweier Wellen verschiedener Herkunftsrichtung. Ebenda (1939).
- [7] J. Lacoste: A propos de travaux récents sur les ondes microseismiques. Ann. Phys. Globe France Outre Mer 4, 5—10 (1937).
- [8] A. W. Lee: World-wide survey of microseismic disturbances. Geophys. Mem. 62 Meteor. Office, London 1934.
- [9] P. Bernhard: Relations entre la houle sur la Côte du Maroc et l'agitation microseismique en Europe Occidentale. C. R. Acad. Soc. Paris 205, 163—165 (1937).
- [10] J. A. Archer: On the direction of approach of microseismes. Month. Not. Geophys. Suppl. 4, 185—196 (1937).

Göttingen, Geophysikalisches Institut, im Februar 1939.

Seismische Untersuchungen des Geophysikalischen Institutes in Göttingen

XXXVII. Die Überlagerung zweier Wellen verschiedener Herkunftsrichtung

Von **R. Bungers**, Göttingen. — (Mit 5 Abbildungen)

Auf Grund von Beobachtungen an Bodenunruhewellen ist es erforderlich, die Überlagerung zweier ebener Wellen verschiedener Herkunftsrichtung zu studieren. Im § 1 wird gezeigt, welche Bestimmungsgrößen der Teilwellen man durch Analyse des Überlagerungsbildes an einem festen Ort erhalten kann. Hierzu wird ein geometrisches Verfahren zur Analyse von Schwebungen angegeben, indem der Begriff der „Schwebungsellipse“ eingeführt wird. Im § 2 werden die Strömungsverhältnisse der Phasen untersucht, vor allem wird die Phasengeschwindigkeit studiert. Es ergibt sich nach Größe und Richtung eine komplizierte periodische Änderung mit der Periode der Schwebung. § 3 behandelt die Theorie der Schwingungsellipsen in der Horizontalebene. Es zeigt sich, daß die Richtung der großen Achse der Schwingungsellipse periodisch mit der Periode der Schwebung schwankt, eine Erscheinung, die bei Bodenunruhewellen beobachtet worden ist.

Einleitung. Auf die Diskussion der Funktion von γ_1 und γ_2

$$z(\gamma_1, \gamma_2) = A_1 \cdot \sin \gamma_1 + A_2 \cdot \sin \gamma_2 \dots \dots \dots (1)$$

worin A_1 und A_2 konstant sind, wird man in der Physik geführt, wenn man es bei einem Schwingungsvorgang nicht mit einer rein harmonischen Welle oder Schwingung zu tun hat, sondern eine Überlagerung mehrerer Wellen oder Schwingungen in Betracht ziehen muß. Diese Funktion stellt nämlich den einfachsten Fall einer Überlagerung dar; daraus erklärt sich ihre Wichtigkeit. Man kann sie bekanntlich folgendermaßen umformen:

$$z(\gamma_1, \gamma_2) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \Delta \gamma} \cdot \sin \left[M \gamma + \arctg \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \tg \frac{\Delta \gamma}{2} \right) \right], \quad (2)$$

worin Δ die Differenz und M das arithmetische Mittel von γ_1 und γ_2 bedeutet, d. h.

$$\Delta \gamma = \gamma_1 - \gamma_2; \quad M \gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Diese Umformung ist nicht etwa irgendwie „eindeutig“, d. h. man könnte z auch irgendwie anders in „Amplitude“ und sin-Funktion trennen; aber die Trennung so vorzunehmen, liegt nahe, einmal, wenn man die Funktion durch Zufügung eines Imaginärteils (mit \cos statt \sin) zu einer komplexen Funktion ergänzt und dann Betrag und arc bestimmt, und zweitens, weil diese Art der Darstellung Bedeutung bei vielen physikalischen Problemen hat.

1. Den Fall der Schwebungen, der in einer früheren Arbeit ausführlich diskutiert worden ist [1], erhält man aus (1), wenn man

$$\gamma_1 = \omega_1 t + \varphi_1; \quad \gamma_2 = \omega_2 t + \varphi_2$$

setzt und t als die Zeit, ω_1 und ω_2 als nicht sehr viel voneinander verschiedene Kreisfrequenzen und φ_1 , φ_2 als Phasenkonstanten deutet.

2. Sind φ_1 und φ_2 noch lineare Funktionen einer Ortskoordinate x :

$$\varphi_1 = -\frac{\omega_1}{v_1} \cdot x + c_1; \quad \varphi_2 = -\frac{\omega_2}{v_2} \cdot x + c_2,$$

worin c_1 und c_2 konstant sind, ist also

$$\gamma_1 = \omega_1 \cdot \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + c_1; \quad \gamma_2 = \omega_2 \cdot \left(t - \frac{x}{v_2} \right) + c_2,$$

so haben wir die allgemeine lineare Ausbreitung zweier Wellen längs der x -Achse mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 und den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Im speziellen Fall $\omega_1 = \omega_2$ haben wir Interferenzen längs der x -Achse. Auch auf diesen zweiten Fall lassen sich bei *sinngemäßer* Übertragung die Ergebnisse der zitierten Arbeit über Schwebungen anwenden.

3. Eine weitere Verallgemeinerung erhält man, wenn man zwei ebene Wellenzüge untersucht, die sich unter einem bestimmten Winkel in der Ebene kreuzen. Wir haben dafür zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\omega_1}{v_1} \cdot (x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1) + c_1; \\ \varphi_2 &= -\frac{\omega_2}{v_2} \cdot (x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2) + c_2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

also

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \omega_1 \cdot \left(t - \frac{x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1}{v_1} \right) + c_1; \\ \gamma_2 &= \omega_2 \cdot \left(t - \frac{x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2}{v_2} \right) + c_2, \end{aligned}$$

worin α_1 und α_2 die Winkel der Wellennormalen gegen die positive x -Achse und v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Teilwellen bedeuten.

Dieser Fall hat in jüngster Zeit in der Geophysik Bedeutung gewonnen. Auf Grund neuerer Untersuchungen über die mikroseismische Wellenbewegung von 4 bis 10 sec Periode stößt man auf die Frage, ob man die beobachteten Erscheinungen nicht oft durch Überlagerung zweier Wellenzüge von verschiedener Richtung deuten kann, ob man z. B. unter dieser Voraussetzung die typischen Schwebungsbilder auf den Seismogrammen erklären kann. Die folgenden Ausführungen sollen einen Beitrag zu diesem Problem liefern und zeigen, was von den experimentellen Befunden sich unter den gemachten Annahmen deuten läßt.

Wir wollen uns die Sachlage geometrisch veranschaulichen, indem wir in der Ebene für beide Wellen die Linien gleicher Phase zeichnen (Fig. 1). Wir er-

halten dadurch ein System von „Periodenparallelogrammen“, das uns die Verhältnisse sehr klar vor Augen führt. λ_1 und λ_2 sind die beiden Wellenlängen. Die Lage eines Periodenparallelogramms liefert uns Richtung und Wellenlänge der Teilwellen.

Man könnte vermuten, daß die Ullerschen Ansätze ([4], dort auch weitere Literatur) zur Lösung der vorgelegten Aufgabe herangezogen werden könnten; doch scheint uns das nicht möglich zu sein. Zur Deutung der experimentell gefundenen Tatsachen genügt jedenfalls der von uns gemachte Ansatz, ohne allzu

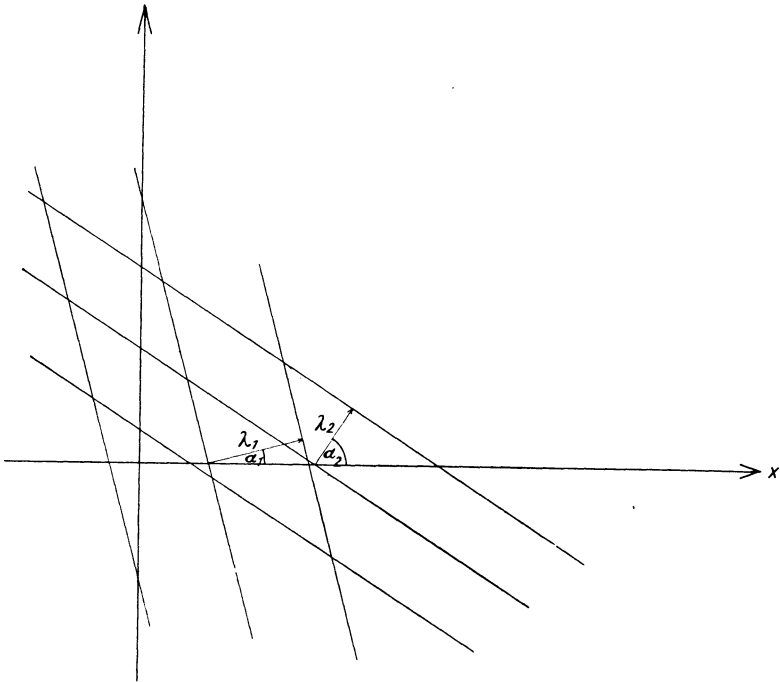


Fig. 1. Periodenparallelogramm bei zwei sich kreuzenden Wellen

kompliziert zu sein. Die sich aus der theoretischen Behandlung ergebenden Methoden zur Auswertung der Aufzeichnung von Bodenunruhewellen (welche wir zum Teil erst in einer späteren Arbeit ableiten werden) rechtfertigen durchaus diesen Standpunkt.

In der Akustik ist ein ähnliches Problem von Herm. Schwarz [3] behandelt worden. Jedoch war hier die Zielsetzung eine andere. Während nämlich in der Akustik mehr das Überlagerungsbild „im großen“ interessiert, also z. B. das Auftreten von Interferenzstreifen usw., ist für den Seismiker wegen der viel größeren hier auftretenden Wellenlängen (Größenordnung 20 km) nur die Überlagerung innerhalb eines Periodenparallelogramms von Interesse. Der Akustiker übersieht

eben ein großes System von Periodenparallelogrammen (vgl. z. B. die Tafeln I und II in [3]), während der Seismiker nur einen kleinen Ausschnitt eines Periodenparallelogramms studieren kann.

§ 1. *Beobachtungen am festen Ort.* Aus den Aufzeichnungen an einem festen Ort erhalten wir durch Analyse des Schwebungsbildes die Teilamplituden, die beiden Kreisfrequenzen und die Phasenverschiebungen, d. h. die Größen

$$A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2.$$

Die Gleichungen (3) enthalten nun den Zusammenhang der gemessenen Größen φ_1 und φ_2 mit den noch unbekanntem Größen $\alpha_1, \alpha_2, v_1, v_2, c_1, c_2$. Eine Station liefert also zwei Gleichungen für diese sechs Unbekannten; um sie zu bestimmen, müssen wir daher an drei Stationen messen. Wir führen nun die Hilfsvariablen ein

$$u_v = \frac{\omega_v}{v_v} \cdot \cos \alpha_v; \quad w_v = \frac{\omega_v}{v_v} \cdot \sin \alpha_v; \quad v = 1, 2,$$

woraus sich umgekehrt die gesuchten Größen folgendermaßen berechnen:

$$\alpha_v = \arctg \frac{w_v}{u_v}; \quad v_v = \frac{\omega_v}{\sqrt{u_v^2 + w_v^2}}; \quad v = 1, 2.$$

Wir haben dann für die sechs Unbekannten $c_v, u_v, w_v; v = 1, 2$, die sechs linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_v &= c_v - x' \cdot u_v - y' \cdot w_v, \\ \varphi''_v &= c_v - x'' \cdot u_v - y'' \cdot w_v, \\ \varphi'''_v &= c_v - x''' \cdot u_v - y''' \cdot w_v, \end{aligned} \right\} v = 1, 2,$$

worin die Striche die verschiedenen Stationen bezeichnen. Es sind also zwei Systeme mit je drei Unbekannten. Sie lassen sich dann und nur dann lösen, wenn die Determinante (die für beide Systeme die gleiche ist)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Das ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Meßpunkte nicht auf einer geraden Linie liegen. Wir müssen also die drei Stationen immer so wählen, daß sie ein wirkliches Dreieck bilden.

Es wird im allgemeinen einfacher sein, statt der Werte φ_1 und φ_2 nur die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ zu messen, weil man hierzu, wie aus Gleichung (2) hervorgeht, nur die Schwebungskurve zu berücksichtigen braucht. Nehmen wir noch, was meist möglich sein wird, $v_1 = v_2 = v$ an, dann haben wir in dem Ausdruck für $\varphi_2 - \varphi_1$ die vier Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, v, c_2 - c_1$, zu deren Berechnung wir also vier Stationen brauchen. Man wird von Fall zu Fall entscheiden müssen, welche Methode vorzuziehen ist. Es wird das im wesentlichen davon abhängen, wie gut die Schwebungen als solche ausgebildet sind, und ob man vier Meßeinrichtungen

zur Verfügung hat. Die Phasendifferenz $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ kann man z. B. graphisch bestimmen, wenn man den Begriff der „Schwebungseellipse“ einführt. Darunter wollen wir die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{s^2(t)} = \frac{1}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\Delta\omega t - \varphi)} \quad (A_1 \neq A_2)$$

verstehen, die eine Ellipse in Form der Polargleichung darstellt. E ist der Radiusvektor, $p = \frac{1}{A_1^2 + A_2^2}$ der Parameter der Ellipse und $\varepsilon = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2}$ die numerische Exzentrizität. Man hat dann die Normalform

$$E(t) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t - \varphi)}$$

Nun ergibt sich φ als Neigungswinkel der großen Achse der Ellipse (in Richtung vom Brennpunkt, der der Nullpunkt ist, zum nächsten Kurvenpunkt, also nicht über den Mittelpunkt hinweg) gegen die Achse $t = 0$. Die Achsen der Ellipse sind

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{A_1^2 + A_2^2}{(A_1^2 - A_2^2)^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{1}{|A_1^2 - A_2^2|}$$

woraus sich auch die Teilamplituden A_1 und A_2 berechnen lassen. Lediglich das Schwebungsintervall muß man zum Zeichnen der Schwebungseellipse kennen; denn daraus ergibt sich $\Delta\omega$, das den Winkelmaßstab bestimmt.

§ 2. Betrachtung der Phasengeschwindigkeit. Wir haben im vorigen Paragraphen eine Methode abgeleitet, um die unbekanntenen Größen, die die Teilwellen bestimmen, zu finden. Die wichtigsten dieser Größen sind die Geschwindigkeiten, die wir weiterhin als gleich annehmen wollen, da sich ja die Frequenzen nicht viel voneinander unterscheiden, und die Richtungswinkel der Teilwellen.

Im Falle einer Welle pflegt man die Phasengeschwindigkeit direkt zu messen, indem man eine bestimmte Phase in ihrem Verlauf in der Ebene verfolgt. Unter „Phasengeschwindigkeit“ schlechthin versteht man dann die Geschwindigkeit v einer Phase, gemessen in Richtung senkrecht zur Wellenfront. Mißt man in einer anderen Richtung, so erhält man eine größere „Scheingeschwindigkeit“ v' . v' hängt mit v durch die Gleichung

$$v' = v \cdot \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)} \dots \dots \dots (4)$$

zusammen, wobei α der Winkel zwischen der Richtung von v' , β zwischen der Richtung von v und der positiven x -Achse sein soll (Fig. 2).

Wir versuchen, ein ähnliches Gesetz für den Fall zweier überlagerter Wellen abzuleiten. Das ist für den Fall der Mikroseismik besonders wichtig; denn oft lassen sich die Schwebungsfiguren nicht mit der nötigen Genauigkeit auswerten, und so wird man versuchen, die Geschwindigkeit direkt zu messen, indem man an drei Punkten mißt, deren Abstände klein sind gegen die Wellenlängen, und ver-

sucht, bestimmte Phasen, meist Maxima, an den drei Punkten einander zuzuordnen. Wir betrachten also die Ausbreitung einer Phase

$$\Phi(t, x, y) = \text{const.} \dots \dots \dots (5)$$

der sin-Funktion in (2). Um den früher beschriebenen [1] anormalen Verhältnissen aus dem Wege zu gehen, haben wir eine Phase möglichst nicht im Schwebungsminimum auszusuchen. Die „Phasengeschwindigkeit in Richtung s“ ist dann

$$\begin{aligned} v' &= \frac{ds}{dt} \\ &= \cos \alpha \cdot \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \cdot \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

wenn die Richtung s mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt. Wir können uns das auch folgendermaßen veranschaulichen: An Stelle der in der

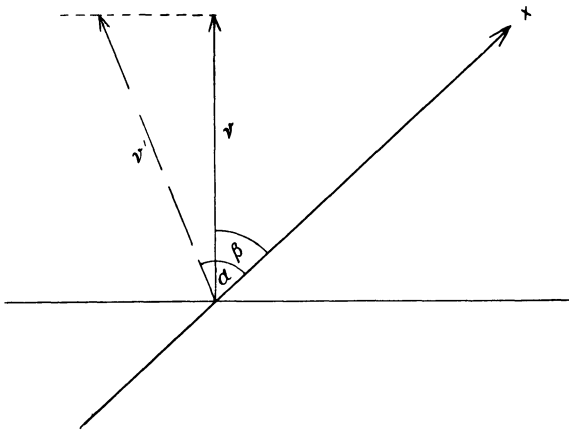


Fig. 2.
Scheinbare und wahre Phasengeschwindigkeit

Seismik sonst üblichen Laufzeitkurve tritt hier die „Laufzeitfläche“, deren Gleichung man durch Auflösung von (5) nach t erhält:

$$t = f(x, y) *).$$

Die „Richtung kleinster Geschwindigkeit“ wird geliefert durch die Richtung von grad f. Der Betrag der Geschwindigkeit in dieser Richtung ist

$\frac{1}{|\text{grad } f|}$. Ist s wieder eine beliebige Richtung, so liefert das Reziproke von

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$$

dann v'. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\frac{dt}{ds} = \frac{[u_1 A_1^2 + u_2 A_2^2 + A_1 A_2 \cdot (u_1 + u_2) \cdot \cos \Delta \gamma] \cdot \cos \alpha + [w_1 A_1^2 + w_2 A_2^2 + A_1 A_2 \cdot (w_1 + w_2) \cdot \cos \Delta \gamma] \cdot \sin \alpha}{\omega_1 A_1^2 + \omega_2 A_2^2 + A_1 A_2 \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot \cos \Delta \gamma} \quad (5a)$$

*) Im „anormalen“ Fall $1 > \frac{A_1}{A_2} > \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ist die Auflösung nicht eindeutig möglich (vgl. auch Fig. 4 in [1]). Auf der rechten Seite von Gleichung (5a) verschwindet dann für gewisse t (in der Nähe des Schwebungsminimums) der Nenner. Diese Stellen haben wir also auszuschließen.

Hier müßte nun noch t , das in $\Delta \gamma$ auftritt, durch $f(x, y)$ ersetzt werden. f hängt dabei noch von der Konstanten in (5) ab, die die betrachtete Phase bestimmt. Wir lassen hier, statt diese Konstante einzuführen, t in $\Delta \gamma$ stehen, charakterisieren also die betrachtete Phase durch die Zeit t .

Wir setzen nun

$$[u_1 A_1^2 + u_2 A_2^2 + A_1 A_2 \cdot (u_1 + u_2) \cdot \cos \Delta \gamma] \cdot v = U(\Delta \gamma)$$

und definieren in gleicher Weise $W(\Delta \gamma)$, indem wir u_1, u_2 durch w_1, w_2 , und $\Omega(\Delta \gamma)$, indem wir $u_1 \cdot v, u_2 \cdot v$ durch ω_1, ω_2 ersetzen. Dann erhalten wir

$$v' = v \cdot \frac{\Omega}{U \cdot \cos \alpha + W \cdot \sin \alpha}.$$

Nun führen wir einen Winkel β ein durch die Gleichung

$$\sin \beta = \frac{W}{\sqrt{U^2 + W^2}}; \quad \cos \beta = \frac{U}{\sqrt{U^2 + W^2}}$$

und erhalten

$$v' = v \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{U^2 + W^2}} \cdot \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)}.$$

Damit haben wir v' auf die Form der Gleichung (4) gebracht; jedoch haben wir hier zwei wesentliche Unterschiede:

1. Die „Richtung kleinster Geschwindigkeit“ β , d. h. die Richtung von grad f , hängt hier vom Ort x, y und von der Zeit t ab, und zwar ändert sie sich mit der Periode der Schwebung, da t nur in der Kombination $\Delta \omega \cdot t$ im Argument des \cos auftritt.

2. In der Richtung kleinster Geschwindigkeit ($\alpha = \beta$) ist die Scheingeschwindigkeit v' nicht gleich der Geschwindigkeit v der Partialwellen, sondern gleich $v \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{U^2 + W^2}}$, ändert sich also auch mit der Periode der Schwebung und kann größer oder kleiner als v sein.

Wir wollen diese Verhältnisse an zwei speziellen Fällen näher studieren.

1. Es sei $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$. Das Periodenparallelogramm ist hier ein Quadrat. Es treten wegen der Gleichheit der Frequenzen keine Schwebungen mehr auf, sondern harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz ω . Fig. 3 gibt das „Strömungslinienbild“*) in diesem Falle. Hier ist:

$$\begin{aligned} U(\Delta \gamma) &= \omega \cdot (A_1^2 + A_1 A_2 \cdot \cos \varphi), \\ W(\Delta \gamma) &= \omega \cdot (A_2^2 + A_1 A_2 \cdot \cos \varphi), \\ \varphi &= \frac{\omega}{v} \cdot (y - x) + \Delta c = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (y - x) + \Delta c, \end{aligned}$$

*) „Strömungslinien“ sind die Linien, deren Richtung überall mit der Richtung kleinster Phasengeschwindigkeit übereinstimmt.

wenn λ die Wellenlänge ist. Die Differentialgleichung für die Strömungslinien ist daher

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{W}{U} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_2 + A_1 \cdot \cos \varphi}{A_1 + A_2 \cdot \cos \varphi}.$$

Durch die Substitution $y - x = z$ läßt sie sich leicht elementar lösen. Man erhält die Lösungsschar

$$A_2^2 \cdot x - A_1^2 \cdot y - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot A_1 A_2 \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (y - x) + \Delta c \right] = \text{const},$$

die in Fig. 3 gezeichnet ist. Hier ist $A_2 : A_1 = 1 : 2$; $\lambda = 2\pi$; $\Delta c = 0$ gesetzt*).

Die einzelnen Kurven gehen durch Translation längs der Geraden $x - y = \text{const}$ auseinander hervor. Man kann aus dieser Figur die Schwierigkeit ersehen, durch Messung der Phasengeschwindigkeit auf die Zusammensetzung der Überlagerungswellen zu schließen.

2. Wenn man am Orte und zur Zeit beobachtet, wo $\Delta \gamma = \Delta \omega t + \varphi = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ist, d. h. im Schwebungsmaximum (was bei drei Meßpunkten natürlich nur angenähert möglich ist), dann ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\omega_1 A_1 \cdot \sin \alpha_1 + \omega_2 A_2 \cdot \sin \alpha_2}{\omega_1 A_1 \cdot \cos \alpha_1 + \omega_2 A_2 \cdot \cos \alpha_2}$$

und

$$v'_1 = v \cdot \frac{\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2}{N_1} \cdot \frac{1}{\cos(\beta_1 - \alpha)}$$

mit

$$N_1^2 = \omega_1^2 \cdot A_1^2 + \omega_2^2 \cdot A_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cdot A_1 A_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

also in Richtung kleinster Geschwindigkeit ($\alpha = \beta_1$)

$$v'_1 \geq v.$$

In dem Beispiel der Fig. 3 tritt dieser Fall ein auf den Geraden $y = x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, unabhängig von der Zeit. Es ist hier in Richtung der Strömungslinien

$$v'_1 = v \cdot \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = v \cdot 1,34.$$

*) Die Richtung auf den Strömungslinien ergibt sich aus $U(\Delta \gamma) > 0$; denn daraus folgt $\cos \beta > 0$.

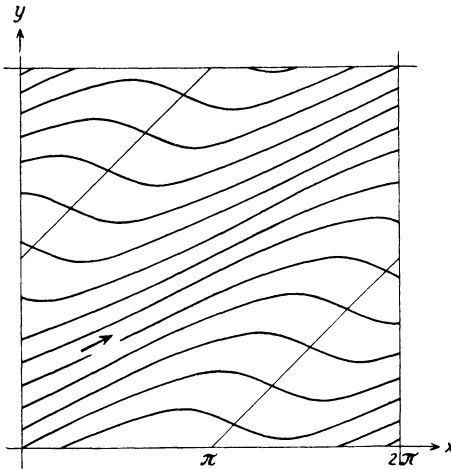


Fig. 3. Die Strömungslinien der Phasen einer Überlagerungswelle. Die Teilwellen haben gleiche Frequenzen, das Amplitudenverhältnis 1 : 2, die Phasendifferenz 0; die Wellennormalen stehen senkrecht aufeinander

Die Richtung ist dort gegeben durch

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}.$$

Wenn man am Orte und zur Zeit beobachtet, wo $\Delta \gamma = (2k + 1) \cdot \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ist, also im Schwebungsminimum (wobei der oben erwähnte „anormale Fall“ zu beachten ist), dann ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\omega_1 A_1 \cdot \sin \alpha_1 - \omega_2 A_2 \cdot \sin \alpha_2}{\omega_1 A_1 \cdot \cos \alpha_1 - \omega_2 A_2 \cdot \cos \alpha_2}$$

und

$$v'_2 = v \cdot \frac{\omega_1 A_1 - \omega_2 A_2}{N_2} \cdot \frac{1}{\cos(\beta_2 - \alpha)}$$

mit

$$N_2^2 = \omega_1^2 A_1^2 + \omega_2^2 A_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 A_1 A_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

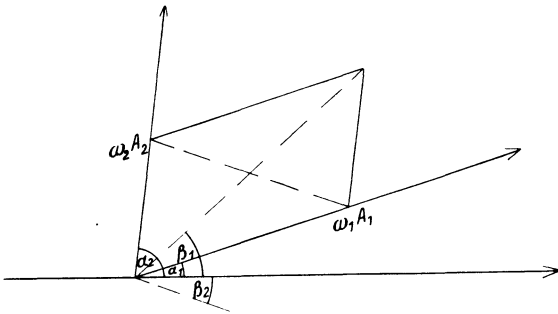


Fig. 4. Konstruktion der Herkunftsrichtungen α_1 und α_2 der Teilwellen

also in Richtung kleinster Geschwindigkeit

$$v'_2 \leq v.$$

In Fig. 3 tritt dieser Fall ein auf den Geraden $y = x + \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, und es ist hier

$$v'_2 = v \cdot \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = v \cdot 0,45$$

und

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1}{2}.$$

Die beiden extremen Winkel β_1 und β_2 können wir uns veranschaulicht denken als Diagonalrichtungen in einem Parallelogramm mit den Seiten $\omega_1 \cdot A_1$ und $\omega_2 \cdot A_2$ und den Seitenrichtungen α_1 und α_2 (Fig. 4). Das liefert zugleich eine Methode zur Bestimmung der Herkunftsrichtung der beiden Teilwellen (bis auf 180°); denn umgekehrt können wir aus den beiden Diagonalrichtungen und den Seiten das

Parallelogramm konstruieren. Eine ähnliche, jedoch in mancher Hinsicht noch bessere Methode werden wir in einer späteren Arbeit ableiten. — Wir erkennen hieraus jedenfalls, daß wir den gemessenen Winkel β als Näherung für die Herkunftsrichtung auffassen können, falls die eine Amplitude (in Fig. 4 A_1) derart überwiegt, daß

$$A_1 > \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot A_2$$

ist. Wir sehen, daß die Herkunftsrichtung der größeren Teilwelle dann immer in den spitzen Winkelraum zwischen den Richtungen β_1 und β_2 fällt. — Kennt man das Parallelogramm, so kann man den Winkel $(\alpha_2 - \alpha_1)$ bestimmen und damit auch die wahre Geschwindigkeit v .

§ 3. *Theorie der Schwingungsellipsen.* Die Überlegungen des vorigen Paragraphen, die sich auf irgendeine feste Komponente der Schwingung bezogen, haben gezeigt, daß man mit der Messung der Phasengeschwindigkeit in einer

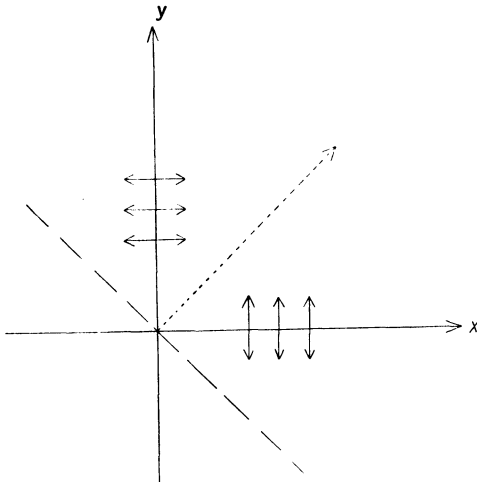


Fig. 5. Überlagerung zweier Transversalwellen

Komponente nur wenig anfangen kann. Um überhaupt richtige Werte in Richtung kleinster Geschwindigkeit zu erhalten, muß man an drei Punkten messen, deren Entfernung klein ist gegen die Dimensionen des Periodenparallelogramms (die man aber wiederum vorher noch nicht kennt), damit in dem betrachteten Dreieck die Strömungslinien als geradlinig angesehen werden können. Die erhaltene Geschwindigkeit sagt aber noch nichts über die Geschwindigkeit der Teilwellen. Hierzu kommt noch folgendes. Wenn man in einer anderen Komponente mißt, so wird man im allgemeinen eine andere Phasengeschwindigkeit und Fort-

schreitungsrichtung erhalten, weil hier das Amplitudenverhältnis anders sein wird. Dies ist im Falle der mikroseismischen Wellen von Trommsdorff [2] tatsächlich beobachtet worden. Man erkennt dies sofort an dem extremen Fall zweier Transversalwellen, die in der x - bzw. y -Richtung fortschreiten (Fig. 5). Mißt man in der x -Komponente, so erhält man die Fortschreitungsrichtung y . Mißt man in der y -Komponente, so erhält man die Fortschreitungsrichtung x . Mißt man aber in der gestrichelt gezeichneten Komponente unter 45° , so erhält man bei gleichen Amplituden und Frequenzen die punktierte Richtung als Fortschreitungsrichtung, die die eine Diagonale des Periodenparallelogramms darstellt.

Man wird also besser in zwei, wenn nicht gar in allen drei Komponenten messen. Wir wollen hier den Fall zweier Komponenten untersuchen, indem wir annehmen, daß zwei horizontale Wellen einander überlagert sind, die in beiden Komponenten auch tatsächlich Amplituden haben. Wir haben dann verallgemeinerte „Lissajoussche Figuren“, die wir untersuchen wollen. Sie unterscheiden sich von den üblicherweise untersuchten Lissajousschen Figuren dadurch, daß hier die beiden Schwingrichtungen im allgemeinen nicht aufeinander senkrecht stehen und die Teilschwingungen nicht linear polarisiert zu sein brauchen*).

Mit Hilfe der Darstellung (2) erhalten wir für die beiden Komponenten Ausdrücke der Form

$$\begin{aligned} X(t) &= s_1 (\Delta \omega \cdot t) \cdot \sin [\omega \cdot t + \alpha_1 (\Delta \omega \cdot t)], \\ Y(t) &= s_2 (\Delta \omega \cdot t) \cdot \sin [\omega \cdot t + \alpha_2 (\Delta \omega \cdot t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

worin $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ gesetzt ist. Das Argument $\Delta \omega \cdot t$ in den Amplituden s_1, s_2 und den Phasenverschiebungen α_1, α_2 bedeutet, daß innerhalb dieser Größen t nur in der Kombination $\Delta \omega \cdot t$ im Argument von trigonometrischen Funktionen vorkommt, daß diese Größen also nur *langsam mit der Zeit veränderlich* sind. Betrachten wir deshalb $s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2$ über ein gewisses Zeitintervall als konstant, so sind die Gleichungen (6) die Parameterdarstellung einer Ellipse. Um sie näher zu untersuchen und ihre Achsenrichtungen zu bestimmen, setzen wir $\alpha_2 - \alpha_1 = \varrho$. Dann ist

$$\sin(\omega t + \alpha_2) = \sin(\omega t + \alpha_1 + \varrho),$$

also

$$\begin{aligned} X(t) &= s_1 \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) \\ Y(t) &= s_2 \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) \cdot \cos \varrho + s_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1) \cdot \sin \varrho. \end{aligned}$$

Eliminieren wir hieraus die Funktionen von $\omega t + \alpha_1$, so erhalten wir die Ellipsengleichung

$$\frac{X^2}{s_1^2} + \frac{Y^2}{s_2^2} - \frac{2 \cos \varrho}{s_1 s_2} \cdot X Y = \sin^2 \varrho \quad (7)$$

Für $\varrho = 0$ und $\varrho = \pi$ artet sie in Doppelgerade aus. Die beiden Richtungswinkel α der Hauptachsen gegen die positive x -Achse sind bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \cotg 2\alpha &= -\frac{1}{2 \cos \varrho} \cdot \left(\frac{s_2}{s_1} - \frac{s_1}{s_2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \left(\frac{s_1}{s_2} - \frac{s_2}{s_1} \right). \end{aligned}$$

*) Bezüglich ihrer mathematischen Eigenschaften wurden Lissajous-Figuren mit schiefwinkligen Schwingrichtungen von H. Ekama [Arch. f. Math. u. Phys. (2), Bd. 6, 1888] untersucht, jedoch war die Zielsetzung hier eine andere, so daß wir nicht auf die Ergebnisse dieser Arbeit zurückgreifen können.

Man sieht nun, daß die durch α bestimmte Hauptachsenrichtung langsam mit der Zeit schwankt, und zwar mit der Periode der Schwebung, da die Größen κ_1 , κ_2 , s_1 , s_2 dies tun. Damit ist eine Erscheinung erklärt, die Krug [5] und Trommsdorff [2] bei mikroseismischen Wellen beobachtet haben: Die Schwankung der großen Achse der horizontalen Schwingungsellipse im Takte der Schwebung. Die Annahme zweier sich kreuzender Wellenzüge beim Problem der Bodenunruhe deutet diese Erscheinung zweifellos zwanglos und scheint hiernach für viele Fälle überhaupt äußerst wahrscheinlich zu sein.

Neben dieser Erscheinung ist durch die Betrachtungen des § 2 auch die niedrige von Krug gemessene Wellengeschwindigkeit von 1100 m/sec, die in scheinbarem Widerspruch zu unseren Erfahrungen über Erdbebenwellen steht, zu erklären, wodurch gleichfalls die gemachte Annahme an Wahrscheinlichkeit gewinnt.

Die hier entwickelte Theorie setzt noch nichts über die Natur der betrachteten Wellen voraus. Es ist z. B. ganz gleichgültig, ob die Teilwellen elliptisch oder in irgendeiner Richtung linear polarisiert sind. In einer späteren Arbeit soll die Theorie unter Spezialisierung auf gewisse Wellentypen auf ein bestimmtes mikroseismisches Problem angewendet werden.

Literaturverzeichnis

[1] R. Bungers: Theorie der Schwebungen. Zeitschr. f. Geophys. **12**, 229—245 (1936).

[2] F. Trommsdorff: Untersuchungen über die natürliche Bodenunruhe (Mikroseismik) mit transportablen Dreikomponentenstationen. Zeitschr. f. Geophys. **15**, (1939).

[3] Herm. Schwarz: Über zirkulare und elliptische Polarisation von Schallwellen, Diss. Rostock 1903.

[4] K. Uller: Die Entwicklung des Wellenbegriffs, VII. Gerlands Beitr. zur Geophys. **41**, 225—249 (1934).

[5] H. D. Krug: Ausbreitung der natürlichen Bodenunruhe (Mikroseismik) nach Aufzeichnungen mit transportablen Horizontalseismographen. Zeitschr. f. Geophys. **13**, 328—348 (1937).

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Februar 1939.
