

## Werk

**Jahr:** 1939

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 GEOGR PHYS 203:15

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0015

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0015](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0015)

**LOG Id:** LOG\_0070

**LOG Titel:** Die Bedeutung des Ausgleichungsverfahrens für die Auswertung von Nahbeben-Seismogrammen

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Die Bedeutung des Ausgleichungsverfahrens für die Auswertung von Nahbeben-Seismogrammen

Von Gerhard Schmerwitz, Jena

Auch in der Geophysik bildet allein ein in den Grundlagen exakt mathematisches und physikalisches Verfahren den einzigen Forschungsweg, auf dem wir unsere Erkenntnisse erweitern können. Daß ein solcher Weg insbesondere bei der Bearbeitung des mitteleuropäischen Nahbebenmaterials \*) mit Erfolg begangen worden ist, haben neben zahlreichen Aussprachen zwei in dieser Zeitschrift kürzlich erschienene Veröffentlichungen \*\*) \*\*\*) erneut bestätigt. Trotz des gleichen Ziels und gleichartiger physikalischer Voraussetzungen stimmen die ein- und vorgeschlagenen Wege jedoch nicht restlos überein. Daher kann ein abschließendes Urteil, ob gerade der gewählte Weg auch der am besten geeignete ist, solange nicht gefällt werden, als man nur diesen einzigen allein genau kennt.

Zu dieser Frage gehört z. B. die der zweckmäßigen Wahl der Koordinaten. Ob in der Verwendung rechtwinklige \*) , geographische \*\*) oder geozentrische \*\*\*) Koordinaten vorteilhafter sind, wird der Beurteilung des praktischen Rechners überlassen werden müssen.

Da die rechtwinkligen Koordinaten an Einfachheit und Übersichtlichkeit in diesem Falle nicht übertroffen werden und ihre Berechnung an Hand von Tabellen des Erdellipsoids nur den Gebrauch des Rechenschiebers und bescheidene mathematische Überlegungen erfordern, haben diese sich bei der Anwendung in der Nahbebenseismik ebenso bewährt wie etwa das Gitternetz in der neuzeitlichen Geodäsie. Für die Verminderung der Rechenarbeit ist es in Anbetracht der mitunter sehr zahlreichen Koeffizienten der Fehlergleichungen außerdem nicht ohne Belang gewesen, daß diese gerade hierbei in der einfachsten Form auftreten.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist jedoch die Frage, ob bei dem Ausgleichungsverfahren, welches von mir zugleich für fünf Unbekannte durchgeführt wird, in Hinsicht auf die Genauigkeit der Herdtiefenangaben alle Stationen ohne Rücksicht auf ihre Entfernung gleichmäßig benutzt werden dürfen.

H. Bungers \*\*) äußert die Ansicht, daß der Grund, weshalb so große Fehlergrenzen bei meiner Herdtiefenbestimmung auftreten (es handelt sich vor allem um das Nordtiroler Beben) darin liegt, daß alle Stationen unabhängig von ihrer Entfernung benutzt werden, wodurch überaus große Fehler zur Ausgleichungs-

\*) G. Schmerwitz: Ausgleichung der besten Stationsbeobachtungen mitteleuropäischer Erdbeben. Zeitschr. f. Geophys. **14**, 351 (1938).

\*\*) R. Bungers: Zur Methodik der Nahbebenbearbeitung. Zeitschr. f. Geophys. **15**, 160 (1939).

\*\*\*) H. Jeffreys: Remarks on the Paper of G. Schmerwitz on Central European Earthquakes. Zeitschr. f. Geophys. **15**, 158 (1939).

rechnung mitgeschleppt werden sollen. Der als Beleg herangezogene Unterschied in der Genauigkeit zwischen einer Herdtiefenbestimmung aus entfernten Stationen und einer entsprechenden Bestimmung aus nahen Stationen an Hand der Katheten- und Hypothenusendifferenz im rechtwinkligen Dreieck wird kaum einem Physiker unbekannt sein. Es ist jedoch nicht richtig, durch Übertragung dieser Tatsache einen Beweis dafür als erbracht anzusehen, daß auch das Ausgleichungsverfahren für fünf Unbekannte am gleichen Objekt angewendet auch dem gleichen Fehler unterliegt.

Wenn das Ausgleichungsverfahren wirklich nichts anderes leisten würde als die Summierung aller derartiger Herdtiefenbestimmungen auf Grund der Hypothenusen-Kathetendifferenz und es damit die ihm zur Last gelegten großen Ungenauigkeiten enthielte, dann wären gewiß derartige Herdtiefenbestimmungen unbrauchbar gewesen und ich hätte mir die langwierigen Rechnungen ersparen können.

*Was leistet das Ausgleichungsverfahren?* Geht man von der Tatsache aus, daß die Bestimmungen der Zeiteinsätze  $t_1, t_2, \dots, t_n$  an jeder Station in der Zeiteinheit gemessen im Mittel gleich genau vorgenommen werden, so besteht kein Recht oder Anlaß, diese Zeitmessungen etwa wegen ihrer Entfernung vom Epizentrum zu belasten. Es ist keine Regel einzusehen, nach der man den Zeitdienst einer entfernteren Station (z. B. Göttingen oder Jena), wo genau so mit 60 mm pro Minute registriert wird wie an einer im allgemeinen näher gelegenen Station (wie etwa Stuttgart, Straßburg oder dergleichen), mit einem geringeren Gewicht belegen müßte. Die Ablesungen werden überall auf eine Zehntel Sekunde genau ausgeführt und mit diesem gleichen Fehlerbereich angegeben.

Die so abgelesenen Zeitwerte paßt nun das Ausgleichungsverfahren, so gut wie es auf keine andere Weise möglich ist, einem gesuchten Kurvenverlauf der Weg-Zeitbeziehung, hier z. B. der Hyperbel, an. [Siehe Fig. 2 in \*]. Für die Güte dieser Anpassung ist es ohne wesentlichen Einfluß, ob über die Stelle, wo Asymptote und Hyperbel zusammenfallen, hinaus noch Meßpunkte herangezogen werden oder nicht; denn der Herdtiefenwert und seine Genauigkeit hängt *allein nur* von der Anfangskrümmung der Hyperbel ab bzw. von der Anpassung der Meßpunkte an dieses Kurvenstück. Da man nun bei Heranziehung auch der entfernten Stationen den mehr linearen Verlauf noch sicherer festlegen kann, so muß sich das selbstverständlich auch auf das erste Teilstück der Kurve etwas auswirken. D. h. es muß entgegengesetzt zu der Ansicht von H. Bungers bei dem Ausgleichungsverfahren durch Hinzuziehung der entfernten Stationen die Genauigkeit der Herdtiefenermittlung sogar noch erhöht werden.

Da die Folgerungen, die aus dem Ausgleichungsverfahren für die Erdkruste gezogen wurden, von grundsätzlicher Bedeutung sind und eine irrtümliche

---

\*) G. Schmerwitz: Berechnung der Dicke der Erdkruste und einiger physikalischer Eigenschaften aus mitteleuropäischen Nahbebenaufzeichnungen. Zeitschr. f. Geophys. 15, 268 (1939).

Meinung über den Wert dieses Verfahrens auch von einigen anderen Stellen gelegentlich geäußert worden ist, soll ein Zahlenbeispiel hier jeglichen Zweifel beseitigen.

Entsprechend der Ableitung der Hypothenusen-Kathetendifferenz sei ein gerades Profil vom Epizentrum zur Station zugrunde gelegt. Epizentrum und Herdzeit seien bekannt. Es handele sich also nur darum, die Herdtiefe (neben der Geschwindigkeit) zu bestimmen. Die  $n$  Stationen liefern dann die Beziehungen:

$$t_n = \frac{\sqrt{A_n^2 + z_0^2}}{v}. \text{ Die entsprechenden Fehlergleichungen lauten:}$$

$$\frac{\sqrt{A_n^2 + z_0^2}}{v} - t_n = v_n,$$

wobei die linke Seite dieser Gleichungen jeweils eine Funktion von  $z_0$  und  $v$  darstellt:  $F_n = F_n(z_0, v)$ . Die einzuführenden Näherungswerte seien:  $(z_0)$  und  $(v)$ :

$$z_0 = (z_0) + z; \quad v = (v) + \nu.$$

$z$  und  $\nu$  sind die gesuchten Korrekturen. Die Funktion wird nun an der Stelle der Näherungswerte entwickelt:

$$F_n = F_n^{(0)} + \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial (z_0)} \cdot z + \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial (v)} \cdot \nu.$$

Zur Vereinfachung der Übersicht seien die Fehler gleichmäßig um die gesuchte exakte Kurve verteilt und abwechselnd  $+0.5$  bzw.  $-0.5$  sec. Die genauen, jedoch hier zunächst noch unbekanntenen Werte seien  $z_0 = 30$  km sowie  $v = 5.6$  km/sec.

Die Koeffizienten in den Fehlergleichungen, welche vereinfacht in der Form:  $a_n \cdot z + b_n \cdot \nu + l_n = v_n$  geschrieben werden, lauten:

$$a_n = \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial (z_0)} = \frac{(z_0)}{(v) \sqrt{A_n^2 + (z_0)^2}},$$

$$b_n = \frac{\partial F_n^{(0)}}{\partial (v)} = -\frac{1}{(v)^2} \sqrt{A_n^2 + (z_0)^2}.$$

Es mögen nun im ganzen 20 Stationen vorliegen jeweils in 50 km Entfernung voneinander. Die erste Station sei ebenfalls 50 km vom Epizentrum fort. Von diesen 20 Stationen sollen zunächst alle zur Ausgleichung verwendet werden und zum Vergleich dann nur die ersten 6 Stationen. Hiernach wird sich bei einer Durchrechnung bis zu dem mittleren Fehler der Herdtiefe herausstellen, ob die Ausgleichung die überaus großen Fehler aus den entferntesten Stationen wirklich mitschleppt. Zum besseren Vergleich ist es angebracht, auch die bei der Hypothenusen-Kathetendifferenz einzeln für jede Station auftretenden Fehler zu berechnen. Das

soll noch vorweggenommen werden. Nach der Formel:  $dz_0 = \frac{s_n}{z_0} \cdot v \cdot dt_n = 0.0933$

$\cdot s_n$  km (mit den aufgeführten wahren Werten und dem Fehler  $\pm 0.5$  sec) ergeben sich die Herdtiefenbestimmungsfehler für die einzelnen Stationen:

1. $dz_0 = \pm$	5.4 km	$\Delta =$	50 km	11. $dz_0 = \pm$	51.4 km	$\Delta =$	550 km
2.	9.7		100	12.	56.0		600
3.	14.3		150	13.	60.7		650
4.	18.8		200	14.	65.4		700
5.	23.5		250	15.	70.0		750
6.	28.0		300	16.	74.7		800
7.	32.7		350	17.	79.3		850
8.	37.4		400	18.	84.0		900
9.	42.0		450	19.	88.7		950
10.	46.7		500	20.	93.3		1000

Bei Verwendung aller 20 Stationen beträgt hier der mittlere Fehler (durchschnittliche Fehler)  $\pm 55$  km ( $\pm 49$ ) gegenüber  $\pm 18$  km ( $\pm 16$ ) bei Beschränkung auf die 6 Nahstationen. Dieser Fehler steigt, wie selbstverständlich, bei Hinzuziehung der entfernten Stationen ganz erheblich an.

Für die Anwendung des Ausgleichsverfahrens auf das gleiche Beispiel sind in der folgende Tabelle in der ersten Spalte die wahren Laufzeiten für die einzelnen Stationen, in der zweiten Spalte die mit dem jeweiligen Fehler  $\pm 0,5$  sec gemessenen Beobachtungen eingetragen.

Tabelle 1.

	Wahre Laufzeiten in sec	Gemessene Werte in sec		Wahre Laufzeiten in sec	Gemessene Werte in sec
1.	10.41	9.91	11.	98.36	97.86
2.	18.64	19.14	12.	107.28	107.78
3.	27.32	26.82	13.	116.20	115.70
4.	36.11	36.61	14.	125.11	125.61
5.	44.96	44.46	15.	134.04	133.54
6.	53.84	54.34	16.	142.96	143.46
7.	62.73	62.23	17.	151.88	152.38
8.	71.63	72.13	18.	160.80	161.30
9.	80.53	80.03	19.	169.73	169.23
10.	89.45	89.95	20.	178.65	179.15

Da der mittlere Fehler von dem Grade der Annäherung, die probeweise eingesetzt wird, nicht abhängig ist, kann als Näherungswert auch der wahre Wert für  $(z_0)$  und  $(v)$  genommen werden. Mit Rücksicht hierauf können dann die Quadrat- und Produktsummen für alle 20 Stationen bis zu 1000 km Epizentralentfernung und dann aus den Nahstationen Nr. 1 bis 6 die entsprechenden Summen bis zu 300 km Entfernung gebildet werden.

Diese lauten für 20 Stationen:

$$[aa]_{20} = + 0.01497, \quad [ab]_{20} = - 3.42, \quad [bb]_{20} = + 7351, \quad [ll]_{20} = + 5.0.$$

Und für die ersten 6 Stationen allein:

$$[aa]_6 = + 0,01377, \quad [ab]_6 = - 1.025, \quad [bb]_6 = + 237, \quad [ll]_6 = + 1.5.$$

Hieraus gewinnt man die Gewichtskoeffizienten:

$$[aa \cdot 1]_{20} = + 0.0134 \quad \text{und} \quad [aa \cdot 1]_6 = + 0.00933.$$

Aus diesen ergeben sich unmittelbar die mittleren Fehler der Herdtiefenbestimmung. Im Falle der Verwendung von 20 Stationen bis zu 1000 km Stationsentfernung liefert die Ausgleichsrechnung folgenden Wert:

$$(m_z)_{20} = \sqrt{\frac{5.0}{18 \cdot 0.0134}} = \pm 4.6 \text{ km.}$$

Für Stationen bis 300 km Entfernung:

$$(m_z)_6 = \sqrt{\frac{1.5}{4 \cdot 0.00933}} = \pm 6.3 \text{ km.}$$

Ein Vergleich dieser beiden Zahlen zeigt deutlich, daß selbst bis zu 1000 km Stationsentfernung, einem Betrag, der bei Erdbebenauswertungen kaum je in Frage kommt, die Herdtiefenbestimmung bei diesem Verfahren in keiner Weise ungünstig beeinflußt wird. Mit dem hohen Fehlerbetrag aus der Hypothenusen-Kathetendifferenz hat somit die Ausgleichsrechnung nichts zu tun. Selbst der beste Einzelwert ist dort noch ungenauer als der Mittelwert der Ausgleichung auch der entferntesten Stationen.

Tabelle 2. Gegenüberstellung der aus der Ausgleichung sich ergebenden und der bei der Hypothenusen-Kathetendifferenz des rechtwinkligen Dreiecks auftretenden mittleren Fehler

	Ausgleichung	Hypothenusen-Kathetendifferenz
Stationen bis 300 km Entfernung . . . .	$\pm 6.3 \text{ km}$	$\pm 17 \text{ km}$
Stationen bis 1000 km Entfernung . . . .	$\pm 4,6 \text{ ,,}$	$\pm 52 \text{ ,,}$

Der Gang der mittleren Fehler ist, wie auch aus der Tabelle 2 an Hand der Zahlen ersichtlich, genau entgegengesetzt.

Die im Verlauf dieser eingehenden Rechnung nachgewiesene Eigenschaft der Ausgleichung zeigen natürlich schon die von mir durchgerechneten Beispiele\*), S. 366, wenn man dort die Gewichtskoeffizienten der Beben, wo (bis zu 500 km) entfernte Stationen verwendet werden, mit den Beispielen der Nahstationen (bis zu etwa 200 km) vergleicht. Die Zahlenwerte der Gewichtskoeffizienten  $1/\sqrt{cc \cdot 4}$  für die Herdtiefenfehler besitzen trotz der Differenzen in den Entfernungen keine größere Schwankung als ungefähr 10 %. Die geringe Abnahme des mittleren Fehlers mit der Entfernung, welche die hier eingehend durchgeführte Rechnung deutlich zeigte, macht sich in der Praxis nicht so augenfällig bemerkbar, zumal auch die Art der Verteilung der Stationen auf den Gewichtskoeffizienten von Einfluß ist.

Hiermit dürfte endgültig klargestellt sein, daß das Ausgleichungsverfahren bei richtiger Anwendung doch etwas mehr leistet als ihm mitunter zugetraut wird.

Der hohe Betrag des Herdtiefenfehlers bei dem Nordtiroler Beben ist, wie auch von mir ausdrücklich und unmittelbar in dem folgenden Absatz bemerkt worden ist, auf eine ganz andere Ursache zurückzuführen, die in dem Faktor  $[vr]$  liegt.

Ein Ausgleichungsverfahren gestattet es, durch Zusammenfassung vieler Beobachtungen, die Sicherheit einer Aussage zu erhöhen, ohne zuvor die Ablesegenauigkeit des Einzelprozesses zu steigern. Wenn die Vorbedingungen gegeben sind, kann also aus einer Meßreihe durch Ausgleichung mehr an Genauigkeit herausgeholt werden, als die Grenze der Ablese- und Schätzgenauigkeit zuläßt. In verschiedenen Nachbargebieten hat man sich diese Erkenntnisse über den Wert des Verfahrens bereits weitgehend zunutze gemacht und in zahlreichen Fällen praktisch erprobt und bestätigt.

Eine derartige Beanspruchung der Ergebnisse bis zu der äußerst zulässigen Grenze ist jedoch bei den Folgerungen bezüglich der Abnahme der Geschwindigkeit der elastischen Wellen innerhalb der Erdkruste nicht einmal erforderlich gewesen.

*Die Schichttiefe in Verbindung mit den  $\bar{P}$ -Wellen.* Nach der Ansicht von H. Jeffreys muß die Hypothese, daß die  $\bar{P}$ -Schicht 16.6 ( $\pm 0.9$ ) km dick ist, einer jeden Nahbebenrechnung von vornherein zugrunde gelegt werden. Erdbebenherde dürften daher bei dieser Voraussetzung in keinem Falle in Verbindung mit  $\bar{P}$ -Wellen jenseits dieser Tiefe nachweisbar sein. Wenn von dieser dogmatischen Grundlage ausgegangen wird, so ist damit zwangsweise das Verfahren verbunden, alle größeren Herdtiefenwerte in Verbindung mit  $\bar{P}$ -Wellen zu widerlegen. Angesichts der erheblichen Menge auch anderweitig bestimmter Herdtiefenlagen bis zu der 50 km Grenze herab erscheint es fraglich, ob derartige Versuche noch sinnvoll sind.

Wird die Wert- und Sicherheitsabschätzung von H. Jeffreys (S. 171--172) auf die von ihm zugrunde gelegten New Jersey- und Herefordshire-Auswertungen\*\*\*), S. 365, angewendet, welche eine der Hauptstützen der geringen  $\bar{P}$ -Schichtdicken bilden, so würden die hier etwa 10mal größeren Zeitfehler gerade diese Hypothese in keiner Weise mehr sicherstellen.

Auch nur dann, wenn man von der Anschauung einer sehr dünnen  $\bar{P}$ -Schicht ausgeht, ist allein auch das Verfahren der Mittelwertbildung von  $v_{\bar{P}}$ - und  $v_{\bar{S}}$ -Werten begreifbar. Es werden die bereits durch eine ausführliche Ausgleichung gefundenen Mittelwerte der Geschwindigkeiten erneut durch Zusammenfassung zu einer Mittelwertbildung benutzt, sodaß schon allein infolge dieses wiederholten Verfahrens die mittleren Fehler überaus klein werden und Werte von  $\pm 0.01$  km/sec und darunter erreichen. Diese Berechnungen sind nach den von mir gezogenen Folgerungen und den Anschauungen über die  $\bar{P}$ -Schicht nicht zulässig.

Wenn einige wenige Beispiele der Dispersion der Love-Wellen auf geringere Schichtdicken führen, als sie sich aus zahlreichen Herdtiefenbestimmungen mit

$\bar{P}$ -Wellen ergeben, so erscheint es naheliegender, die Bedenken auf das theoretisch und auch experimentell noch keineswegs gesicherte erstgenannte Verfahren zu lenken, als an der mathematisch einfachen und übersichtlichen Bestimmung aus Nahbebenwellen zu zweifeln.

Das mitteleuropäische Bebenmaterial dieses Jahrzehnts ist von mir in den beiden Veröffentlichungen\*), S. 365, nach einheitlichem Verfahren und bei größtmöglicher Unabhängigkeit von vorgefaßten und verfestigten Anschauungen ausgewertet worden. Gerade in der Nahbebenseismik wurden bisher je nach Wunsch und Eignung die verschiedenartigsten Bestimmungsmethoden für die Herdtiefen angewendet. Das geschah oft ohne Rücksicht darauf, daß die Voraussetzungen des einen Verfahrens die des anderen ausschlossen. (Hier bleibt noch ein erheblicher Betrag an kritischer Sichtungsarbeit unerledigt.) Es erschien notwendig, zuerst einmal die Herdtiefen- und Schichtungsfrage an Hand des  $\bar{P}$ - und  $\bar{S}$ -Wellen-Laufzeitverfahrens so sicher wie nur irgend möglich zu stellen, um damit für alle weiteren Erklärungen von Welleneinsätzen auf Seismogrammen eine gefestigte Ausgangsbasis zu schaffen. Ob und wie weit das gelungen ist, kann nur in Zukunft an neuem experimentellem Material und hierbei nur unter Ausführung wirklich praktischer Zahlenrechnungen geprüft und beurteilt werden.

Jena, Juni 1939.

## Ermittlung des Zustandes des Erdinneren aus dem Energieinhalt

Von **H. Lorenz**, München. — (Mit 1 Abbildung)

Berechnung des auf die Masseneinheit bezogenen Schwerepotentials der Erdschichten und der Gesamterde. Geringer Einfluß der verschiedenen Dichtegesetze. Zusammenziehung eines von der Sonne abgeschleuderten einatomigen Gasballs, dessen Energieinhalt dabei durch Strahlung verloren geht. Berechnung der Mittelpunktstemperatur des Gasballs und der Erde aus der dortigen Verdichtung. Daraus Bestimmung der Gaskonstanten und des Atomgewichts des Erdkerns und des Gasballs. Rückschlüsse auf den Sonnenzustand.

*1. Das Schwerepotential der Erdschichten.* Angesichts der trotz aller Bemühungen der Seismologen und Geophysiker noch unbefriedigenden Erkenntnis des Erdinnern erscheint es vielleicht zweckmäßig, den *Energieinhalt des Erdballs* auf Grund der Schwerearbeit bei ihrem Aufbau ins Auge zu fassen. Diese Arbeit oder das Potential der einzelnen Erdschichten ist nur von der radialen Dichteverteilung abhängig, ohne Rücksicht auf den Aggregatzustand. Ist  $\delta$  die dem Radius  $r$  zugehörige Dichte,  $\delta_m$  die mittlere Dichte der Gesamtkugel vom Halbmesser  $a$ , so ist die Masse einer Kugelschale von der Dicke  $dr$  gegeben durch  $d m = 4 \pi \delta r^2 dr$  und die Gesamtmasse  $m_0 = \frac{4}{3} \pi \delta_m a^3$ , während sich mit