Werk

Jahr: 1940

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:16

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0016

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0016

LOG Id: LOG_0045

LOG Titel: Bemerkungen zu der Abhandlung "Die hydrostatische Reduktion der Schwerebeobachtungen" von Kurt Wegener

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Literatur

[1] Thomson: On the Theory of visco-Elasticity. Phil. Trans., Ser. A, 1933, S. 232. Da findet man die historische Entwicklung der theoretischen und experimentellen Erforschung über elastische Nachwirkung und innere Reibung.

[2] Gutenberg u. Schlechtweg: Viskosität und innere Reibung fester Körper. Zeitschr. f. Phys. **31**, 745 (1930).

[3] Sokoloff u. Skriabin: Experimental and theoretical Investigations on Dispersion and Absorption of elastic Waves. Gerl. Beitr. z. Geophys. **49**, 165—198 (1937).

[4] Jeffreys: The Earth. New York 1929. S. 265.

[5] Lord Rayleigh: Theorie des Schalls. Bd. I, S. 265 (1880).

[6] Zener: Internal Friction in Solids. Part I: Phys. Rev. **52**, 230—235 (1937); Part II: Phys. Rev. **53**, 90—101, 582—586 (1938).

[7] Wegel u. Walther: Internal Dissipation in Solids for small cyclic Strains. Phys. **6**, 141—157, April 1929.

[8] John M. Ide: Comparison of Statically and dynamically Determined Young's Modulus of Rocks. Proc. Nat. Aca. Sci. Febr. 1936.

[9] John M. Ide: Some Dynamic Methods for Determination of Young's Modulus. Rev. of Scien. Inst. (N. S.) **6**, Nr. 10 (1935).

[10] W. Regula: Untersuchungen elastischer Eigenschaften an Gesteinen. Zeitschr. f. Geophys. **16**, 40—56 (1940).

[11] O. Förtsch: Ableitung des von der Frequenz unabhängigen Absorptionskoeffizienten aus Maschinenschwingungen. Zeitschr. f. Geophys. **16**, 57—84 (1940).

[12] Ishimoto u. Iida: Determination of elastic Constants of soils by means of Vibration Methods. Part 1, Youngs Modulus. Bull. Earthq. Res. Inst. **14**, 632—656 (1936); Part 2, Modulus of Rigidity and Poissons Ratio. Bull. Earthq. Res. Inst. **15**, 67—85 (1937).

[13] K. Iida: Experiments on the visco-elastic Properties of Pitch-like. Materials I. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo **13**, 198—212 (1935).

[14] K. Iida: Experiments of the visco-elastic Properties of Pitch-like. Materials II. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo **13**, 433—455 (1935).

Geophysikalisches Institut Göttingen, Juli 1940.

Bemerkungen zu der Abhandlung „Die hydrostatische Reduktion der Schwerebeobachtungen“ von Kurt Wegener*)

Von Dr. E. Kohlschütter

Es wird auf eine Reihe von Irrtümern in der in der Überschrift genannten Abhandlung aufmerksam gemacht und die Unhaltbarkeit der von Herrn Wegener abgeleiteten Formel für seine hydrostatische Reduktion bewiesen. Eine Formel für diese Reduktion mit voller Berücksichtigung der Konvergenz der Lotrichtungen wird abgeleitet.

I.

Obwohl ich in anderem Zusammenhange Herrn Wegener die Unhaltbarkeit seiner Ausführungen, insbesondere der von ihm erfundenen hydrostatischen

*) Zeitschr. f. Geophys. **16**, 33 (1940).

Reduktion bereits nachgewiesen hatte, allerdings weniger ausführlich, weil der mir damals vorliegende Text auch weniger ausführlich war, hat er seine Überlegungen drucken lassen und auf diese Weise gegen meine Beurteilung seiner Ableitungen an die Öffentlichkeit appelliert. Ich bin deshalb gezwungen, meine Begründung ebenfalls der Öffentlichkeit vorzulegen.

1. Wenn ich Herr Wegener richtig verstanden habe, will er die beobachteten Schwerewerte so auf den Meeresspiegel reduzieren, daß erstens die Abnahme der Schwere mit der Höhe berücksichtigt wird, und daß zweitens auch beim Vorhandensein von hydrostatischem Gleichgewicht Werte erhalten werden, die dem Massenausgleich entsprechen. Da Herr Wegener diese für den Meeresspiegel oder das Geoid geltenden Werte mit der theoretisch errechneten Schwere vergleicht, vernachlässigt er den Abstand zwischen dem Geoid und demjenigen Erdellipsoid (oder nach früherer Auffassung Erdsphäroid), das sich am besten dem Geoid anschließt, und für das die theoretischen Schwerewerte gelten. Dieser Abstand soll daher auch hier nicht berücksichtigt werden.

2. Da Herr Wegener hydrostatisches Gleichgewicht voraussetzt, legt er die von Airy vertretene und nach ihm benannte Auffassung des Baues der Erdkruste zugrunde, die nicht in bezug auf den Massenausgleich, sondern den Druckausgleich isostatisch ist*). Trotzdem erwähnt er die auf derselben Grundlage beruhende Reduktionsmethode von Heiskanen überhaupt nicht, sondern stellt eine neue Methode auf, die gegenüber der von Heiskanen in dreifacher Hinsicht einen Rückschritt bedeutet. Denn erstens führt er den von Stokes erfundenen Kunstgriff der Kondensation wieder ein, der etwas Gekünsteltes und Unbefriedigendes an sich hat, und auf den man bei Voraussetzung von Schwimmgleichgewicht nicht mehr angewiesen ist. Zweitens rechnet Herr Wegener so, als ob die tragende Flüssigkeit, wie bei einer schwimmenden Eisscholle, bis zur Meeresoberfläche reicht. Beim Sima, auf dem die Sialschollen der Erdkruste schwimmend angenommen werden müssen, ist das jedoch nicht der Fall. Drittens berücksichtigt Herr Wegener nur die Störmassen, die einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte entsprechen, deren Dicke gleich der Meereshöhe des Beobachtungspunktes ist, und läßt die auf der Erde weiter ab liegenden Störmassen unberücksichtigt, ohne den Nachweis für die Berechtigung dieses Vorgehens zu führen.

3. Der Gedanke von Herr Wegener, die Abnahme der Schwere mit der Höhe zu berücksichtigen, ist nur insofern neu, als er auf die Airysche Auffassung der Isostasie noch nicht angewandt ist. Für die Pratt'sche Annahme ist er bereits von Schiøtz und von Helmert durchgeführt worden**). Helmert gibt zwar

*) Siehe Karl Jung: Regionale und lokale Anomalien des Schwerfeldes, Isostasie in Handb. d. Experimentalphysik 25, Geophysik II, S. 278.

***) O. E. Schiøtz: Results of the pendulum observations and some remarks on the constitution of the earth's crust. The Norwegian North Polar Expedition 1893—96 by Fridtjof Nansen 8, London 1900; F. R. Helmert: Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften VI, 1 B, S. 116, Leipzig 1910.

keine Formel für diese Zusatzreduktion an, er sagt aber, daß sie zwischen den Grenzen 4 und 8 mgal liegt, je nachdem man ganz starre Kruste oder hydrostatische Druckfortpflanzung in der Kruste annimmt. Für Hochflächen von der Höhe Zentralasiens steigen diese Grenzwerte auf 10 und 20 mgal.

4. Da bekanntlich die Pratt'sche und die Airy'sche Annahme in der zahlenmäßigen Auswirkung auf die Schwere nur wenig voneinander verschieden sind, kann die Berücksichtigung der Konvergenz der Lotrichtungen bei Voraussetzung von Schwimmgleichgewicht keine Reduktion ergeben, die sehr viel größer ist als die Helmertschen Zahlen. Der Umstand, daß die Wegenersche Formel schon für eine Hochfläche von 1000 m Höhe eine Reduktion von rund 50 mgal ergibt, weist darauf hin, daß bei ihrer Ableitung Irrtümer unterlaufen sein müssen.

5. Auch rein gefühlsmäßig erscheint es nicht möglich, daß die Berücksichtigung der Konvergenz der Lotrichtungen eine Reduktion ergibt, die der Fortnahme der halben Gesteinsplatte zwischen Beobachtungsort und Meeresoberfläche gleichkommt.

6. Herr Wegener setzt hydrostatisches Gleichgewicht voraus. Diese Voraussetzung ist aber identisch mit der Voraussetzung, daß die über dem Meeresspiegel liegenden Störmassen durch darunterliegenden Massenmangel kompensiert sind. Herr Wegener hat den Einfluß dieser negativen Massen, deren Vorhandensein er selbst voraussetzt, jedoch unbeachtet gelassen. Denn weder in seinen Darlegungen noch in der Endformel kommen diese kompensierenden Massen vor. Auch der Dichteunterschied zwischen der schwimmenden Scholle und der tragenden Flüssigkeit kommt nicht vor, obwohl das Schwimmen einer Scholle wesentlich von diesem Dichteunterschied abhängt. Auch dies weist darauf hin, daß bei der Ableitung der Wegenerschen Formel irrtümliche Unterlassungen vorgekommen sind.

7. Die Formelableitung im dritten Abschnitt der Abhandlung, „Die hydrostatische Reduktion“, ist für mich so unklar, daß es mir trotz großer Mühe nicht gelungen ist, den Gedankengang von Herrn Wegener zu verstehen. Ich kann daher nicht angeben, worin die offenbar unterlaufenen Irrtümer bestehen. Es dürfte aber doch wohl anzunehmen sein, daß die Ableitung im dritten Abschnitt den im ersten Abschnitt auseinandergesetzten Prinzipien entspricht, so daß die dort nachweisbaren Fehler mit den bei der Formelableitung vorgekommenen übereinstimmen.

8. Herr Wegener schreibt: „Die Schwere nimmt bis ~ 3500 m Höhe um ein Tausendstel ihres Wertes ab, folglich muß die Masse, damit Gewicht (Masse $\times$ Beschleunigung) oder Druck/Flächeneinheit konstant bleiben, bis zu dieser Höhe um ein Tausendstel vergrößert werden, wenn Schwimmgleichgewicht herrschen soll.“

Mir scheint, daß Herr Wegener etwas anderes meint, als er sagt. Denn die Masse ist eine von der Natur gegebene Größe, sie kann nicht vergrößert werden. Es ist auch niemand da, der diese Vergrößerung vornehmen könnte, und woher

soll die zuzusetzende Masse genommen werden, ohne die Massenlagerung der Erdkruste zu verändern? Wenn ich ihn richtig verstanden habe, will Herr Wegener mit dem angeführten Satz sagen, daß die in der Natur wirklich vorhandene Masse um ein Tausendstel größer ist als eine im Meeresspiegel kondensiert gedachte Masse, die denselben Druck ausübt wie die wirklich vorhandene unkondensierte Masse.

9. Bei der Berechnung dieses Überschusses ist Herrn Wegener das Versehen unterlaufen, daß er den Endwert der Wirkung einsetzt, statt von Null bis zu der Höhe von 3500 m zu integrieren. Es sei R der Halbmesser der kugelförmig angenommenen Erde, q_0 die Grundfläche, H die Höhe und ρ die Dichte der Scholle, dann ist das Volumen der Scholle

$$\text{Volumen} = q_0 H + q_0 \frac{H^2}{R}.$$

Ist q_0 die Schwere im Meeresspiegel und nimmt man in Übereinstimmung mit Herrn Wegener die Schwereabnahme wie in freier Luft an, so ist nach dem Satze „Druck = Dichte $\times$ Volumen $\times$ Schwere“ der Druck der Scholle

$$D = \rho q_0 g_0 H.$$

Eine im Meeresspiegel kondensiert gedachte Masse, die diesen Druck ausübt, hat den Wert $m_k = \rho q_0 H$. Die wirkliche Masse ist daher um $\rho q_0 \frac{H^2}{R}$ größer als die kondensierte Masse, die den gleichen Druck ausübt. In Teilen der Masse ist dies aber $\frac{H}{R} \left(1 - \frac{H}{R}\right)$. Für die Höhe 3500 m gibt dies 0.00055, also nur etwa die Hälfte des Wertes, den Herr Wegener berechnet hat.

10. Herr Wegener schreibt: „Ein Teilchen der Eisscholle, das im Meeresniveau liegt, wird durch die Gravitation des über ihm liegenden Eises nach oben angezogen, sein Gewicht und damit sein Druck ist vermindert, und zum Ersatz muß die über ihm liegende Masse vergrößert werden (wodurch das Gewicht des Teilchens weiter abnimmt), bis Gleichgewicht herrscht.“

Diese Stelle ist für mich unverständlich, da die in der Natur vorhandene Masse nicht vermehrt werden kann. Ich vermute aber, daß Herr Wegener sagen will, daß infolge der gegenseitigen Anziehung der Schollenteilchen aufeinander die Schwereabnahme innerhalb fester Körper geringer ist als in freier Luft.

11. Bei dem Satze: „An der Oberfläche der Eisplatte ist die Verminderung 0, in der Mitte und damit im Durchschnitt $B/2$ “ hat Herr Wegener nicht bedacht, daß die Eisplatte auch die an der Oberfläche befindlichen Teilchen mit B anzieht, so daß an der Oberfläche eine Vermehrung der Schwere um B eintritt. Geht man von der an der Oberfläche gemessenen Schwere aus, so ist infolge der inneren Anziehung der Massenteilchen aufeinander die Verminderung der Schwere in der Meeresoberfläche $2B$ und in der Mitte oder im Durchschnitt B und nicht $B/2$, wie Herr Wegener behauptet.

12. Der Satz: „Der Druck der Eisplatte ist also halb so groß, wie die Masse zunächst vermuten läßt“, stimmt mit den vorhergehenden Überlegungen von Herr Wegener nur dann überein, wenn man unter „Druck“ versteht „Druckverminderung“ oder „Verminderung der Schwere“.

Außerdem deutet dieser Satz auf eine Verwechslung hin, in der vielleicht der Hauptirrtum der Wegenerschen Ableitung seiner hydrostatischen Reduktion liegt. Der Satz läßt nämlich vermuten, daß Herr Wegener die Druckverminderung oder die Verminderung der Anziehung, die die Scholle **durch die Erde erleidet**, als die von ihm gesuchte hydrostatische Massenreduktion der beobachteten Schwere angenommen hat, statt der Verminderung der Anziehung, die die Scholle **auf den Beobachtungspunkt ausübt**. Sollte diese Vermutung richtig sein, so würde sich dadurch auch erklären, daß Herr Wegener einen Ausdruck für seine Reduktion findet, der um eine ganze Größenklasse zu groß ist.

13. Daß die gegenseitige Anziehung der Teilchen einer Masse aufeinander die Schwereabnahme mit der Höhe innerhalb der Masse ändert, ist eine bekannte Tatsache. Die Formeln dafür finden sich z. B. bei Helmholtz H. G. 2, S. 47, oder Enc. d. m. Wiss., S. 160. Dort steht nämlich

$$\frac{dg}{dh} = -\frac{g}{R} \left(2 - \frac{3\rho}{\rho_m} \right) = -\frac{2g}{R} + 4\pi f \rho^*.$$

In der Schreibweise von Herr Wegener ist also

$$g_0 = g + \Delta - 2B.$$

Er selbst setzt an dieser Stelle die Schwereänderung innerhalb der Scholle (siehe Ziff. 11) gleich $\Delta - B$. Der richtige Wert findet sich jedoch auch in seiner Abhandlung, nämlich in dem der Reduktion von Prey gewidmeten Absatz. In der gleichen Abhandlung finden wir den falschen und den richtigen Wert nebeneinander.

14. Ein Versehen enthält auch der Satz: „Die weiter oben genannte (d. i. Massenvergrößerung) soll hier daneben vernachlässigt werden.“

Die Massenvergrößerung, die Herr Wegener vernachlässigen will, entspricht der Abnahme der Schwere um ein Tausendstel ihres Wertes bei 3500 m Höhe. Dagegen soll die Massenvergrößerung, die der Verminderung der Gravitation um $B/2$ entspricht, berücksichtigt werden, weil sie viel größer sei. Herr Wegener hat jedoch selbst die Formel für B angegeben. Danach ist bei $\rho = 2.7$ und 3500 m Höhe $B/2 = 200$ mgal. Das sind 0.2 Tausendstel der Schwere. Herr Wegener vernachlässigt also den Einfluß von 0.001 g gegenüber dem Einfluß von 0.0002 g!

15. Da ich, wie gesagt, dem Gedankengang der Formelableitung von Herr Wegener nicht zu folgen vermag, habe ich zur zweifelsfreien Nachprüfung, ob

*) Wie jetzt meist üblich, ist die Gravitationskonstante hier mit f bezeichnet, um deutlich zu machen, daß sie hier in Einheiten des CGS-Systems ausgedrückt werden muß, während sie mit k^2 bezeichnet zu werden pflegt, wenn sie in astronomischen Einheiten ausgedrückt ist.

die Wegenersche Formel richtig ist, die Formel für eine hydrostatische Reduktion, die auf den im ersten Abschnitt von Herrn Wegener angegebenen Grundlagen beruht, in verständlicher Form abgeleitet.

Die in Ziffer 13 angegebene Formel ist auf Glieder erster Ordnung beschränkt. Da die Wegenersche hydrostatische Reduktion aber von der zweiten Ordnung ist, müssen auch in der Ausgangsformel die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, damit man vor Vernachlässigungen sicher ist.

Bedeutet g die auf der Scholle von der Höhe H beobachtete, g_h die im Innern der Scholle in der beliebigen Höhe h herrschende Schwere, so findet man g_h , indem man die Anziehung des Schollenteiles zwischen H und h von g abzieht, an dem verbleibenden Wert die Niveaureduktion von H auf h anbringt und die Anziehung des Schollenteiles zwischen H und h nochmals abzieht. Die Scholle soll entsprechend dem Vorgange von Herrn Wegener zunächst als eben und unendlich ausgedehnt angenommen werden.

Daher ist

$$g_h = \left. \begin{aligned} & [g - 2\pi f \varrho (H - h)] \frac{(R + H)^2}{(R + h)^2} - 2\pi f \varrho (H - h) = g \left(1 + 2\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} \right) \\ & - 4\pi f \varrho H \left(1 + \frac{H}{R} \right) + 4\pi f \varrho \left(1 + \frac{H}{R} \right) h - 2g \left(1 + 2\frac{H}{R} \right) \frac{h}{R} \\ & + 4\pi f \varrho H \frac{h}{R} - 4\pi f \varrho \frac{h^2}{R} + \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

Ist q_0 die Grundfläche der Scholle, so ist das Druckelement

$$dD = q_0 \varrho g_h dh \dots \dots \dots (2)$$

Setzt man den Ausdruck für g_h hier ein und integriert von 0 bis H , so findet man den Druck der wirklichen Scholle zu

$$D = q_0 g \varrho H \left(1 + \frac{H}{R} - \frac{H^2}{R^2} - \frac{2\pi f \varrho H}{g} - \frac{4\pi f \varrho H^2}{3gR} + \dots \right) \dots (3)$$

Ist ϱ_k die Dichte einer in der Meeresoberfläche kondensierten Schicht, so ist deren Druck

$$D_k = q_0 \varrho_k g_0 \dots \dots \dots (4)$$

Bei Ableitung der Schwere g_0 muß in diesem Falle die Anziehung der kondensierten Schicht auf einen im Meeresspiegel, aber noch über der Schicht liegenden Punkt berücksichtigt werden. Daher ist

$$g_0 = [g - 2\pi f \varrho H] \frac{(R + H)^2}{R^2} + 2\pi f \varrho_k \dots \dots \dots (5)$$

Damit wird

$$D_k = q_0 g \varrho_k \left(1 + 2\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} - \frac{2\pi f \varrho H}{g} - \frac{4\pi f \varrho H^2}{gR} + \frac{2\pi f}{g} \varrho_k + \dots \right) (6)$$

Die von Herrn Wegener verlangte Gleichheit des Druckes der kondensierten Schicht und der wirklichen Scholle erlaubt, ρ_k zu bestimmen, indem man $D_k = D$ setzt. Durch Annäherungen findet man daraus

$$\rho_k = \rho H \left(1 - \frac{H}{R} - \frac{2\pi f \rho H}{g} + \frac{26\pi f \rho H^2}{8gR} + \frac{4\pi^2 f^2 \rho^3 H^2}{g^2} + \dots \right) \dots (7)$$

und damit unter Vernachlässigung der höheren Glieder

$$g_0 = g + 2g \frac{H}{R} + g \frac{H^2}{R^2} - \frac{2\pi f \rho H^2}{R} - \frac{4\pi^2 f^2 \rho^3 H^2}{g} \dots \dots (8)$$

oder in der Schreibweise von Herrn Wegener

$$g_0 = g + \Delta + \frac{\Delta^2}{4g} - \frac{B\Delta}{2g} - \frac{B^2}{g} \dots \dots (9)$$

Die den von Herrn Wegener aufgestellten Prinzipien entsprechende hydrostatische Reduktion, die den Massenausgleich zwischen der wirklichen Scholle und der denselben Druck ausübenden gedachten kondensierten Schicht herbeiführt, ist also

$$\Delta g = - \left(\frac{B\Delta}{2g} + \frac{B^2}{g} \right) \dots \dots (10)$$

und nicht $\Delta g = - B/2$, wie Herr Wegener behauptet. Bei der Wegenerschen Ableitung dieser Reduktion muß also tatsächlich ein Irrtum unterlaufen sein.

Mit $\rho = 2.67$ wird die Wegenersche hydrostatische Reduktion der über dem Meeresspiegel liegenden Massen, wenn H in km, Δg in mgal ausgedrückt wird,

$$\Delta g = - 0.0175 H^2 - 0.0128 H^2 = - 0.0303 H^2 \text{ mgal/km}, \dots \dots (11)$$

während die irrige Wegenersche Formel $\Delta g = - 55.94 H$ mgal/km ergibt. Für ein Plateau von 5000 m Höhe ist demnach

$$\Delta g = - (0.44 + 0.32) = - 0.76 \text{ mgal}$$

und nicht $g = - 279.7$ mgal, wie die Wegenersche Formel angibt.

Die Wegenersche hydrostatische Reduktion ist daher bei richtiger Berechnung von verschwindender Kleinheit, so daß ihr keinerlei praktische Bedeutung zukommt.

16. Aber auch theoretische Bedeutung kommt der richtigen Formel nicht zu. Denn die Wegenersche Problemstellung, durch eine hydrostatische Reduktion einen Ausgleich zwischen den sichtbaren Massen in ihrem wirklichen Zustande und nur gedachten Massen, die den gleichen, aber auch nur gedachten Druck ausüben, herbeizuführen, bietet auch kein theoretisches Interesse.

Ein solches würde vorhanden sein, wenn die Problemstellung sich auf die sichtbaren und die kompensierenden negativen Massen, die bei hydrostatischem Gleichgewicht vorhanden sein müssen, bezogen hätte. Da die Eintauchtiefe dieser

Massen sehr groß ist, würde eine Zusatzreduktion zu den isostatischen Reduktionsmethoden, die die Konvergenz der Lotrichtungen zu berücksichtigen gestattet, vielleicht merkliche Beträge erreichen. Aber auch wenn das nicht der Fall ist, würde eine solche Formel das theoretische Interesse haben, daß man zahlenmäßig festgestellt hätte, daß der Unterschied zwischen der Schwere bei Druckausgleich und bei Massenausgleich so klein ist, daß die Vernachlässigung der Konvergenz der Lotrichtungen keine merklichen Fehler im Gefolge hat.

Man kann bei diesem Vergleich auch die Kondensation beibehalten, wenn dies aus irgendeinem Grunde wünschenswert sein sollte. Nur muß man dann auch die kompensierenden Massen in die Meeresoberfläche kondensiert denken. Dann werden zwar auch nur gedachte Massen verglichen, aber sie sind in der gleichen Weise von den wirklichen Massen abgeleitet und können als gleichwertige Vertreter der wirklichen Massen angesehen werden. Der Vergleich zwischen ihnen kommt infolgedessen in der Endwirkung auf einen Massenausgleich zwischen wirklichen Massen heraus. Er kann daher auch Aufschlüsse über wirkliche Zustände in der Erdkruste liefern. Ein Ausgleich zwischen wirklichen Massen einerseits und nur gedachten Massen andererseits, wie ihn Herr Wegener vorschlägt, kann solche Aufschlüsse nicht geben.

17. Herr Wegener gebraucht für die Lotrichtungen den Ausdruck „Lotlinien“. Beides ist nicht dasselbe. Nach Helmert nennt man Lotlinien die gekrümmten Linien, die alle Niveauflächen senkrecht durchstoßen und deren Tangenten die Lotrichtungen sind.

18. Was Herr Wegener auf S. 35 als Freiluftreduktion definiert, ist die Niveaureduktion, während die Freiluftreduktion eine Massenreduktion ist. Die Niveaureduktion tritt zu allen Massenreduktionen hinzu, zur Bouguerschen, Rudzkischen, Preyschen und allen anderen ebenso, wie zur Freiluftreduktion. Der Umstand, daß die letztere meist zu Null angenommen wird und daher bei ihrer Anwendung die Niveaureduktion allein in Erscheinung tritt, gibt kein Recht dazu, die Niveaureduktion als Freiluftreduktion zu bezeichnen.

19. Herr Wegener nennt die Größe dg/dh , d. h. die Änderung der Schwerebeschleunigung mit der Höhe „Vertikalgradienten des Schwerepotentials“ oder auch „Potentialgefälle der Schwere“! Er verwechselt also den ersten und den zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials, da die Schwere g selbst der Vertikalgradient des Schwerepotentials ist.

20. Ich bin überzeugt, daß Herr Wegener weiß, daß man verschiedenartige Dinge nicht zusammenzählen kann. Trotzdem kommen in seiner Gleichung (1) eine Schwerebeschleunigung g_0 und eine Masse f als Summanden einer Summe nebeneinander vor. Auch weiterhin wird f ausdrücklich als „Masse“ und als „Massenüberschuß“ bezeichnet, trotzdem aber Beschleunigungen gleichgesetzt!

21. Herr Wegener benutzt vielfach NN als Abkürzung für Meeresoberfläche oder Meeresniveau. Das ist zwar bequem, man sollte es aber trotzdem nicht tun, weil es irreführend ist. Denn Normalnull liegt zwar in der Nähe des Meeresspiegels, weicht aber definitionsgemäß bewußt davon ab,

22. Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß mein früheres Urteil, daß die Wegenerschen Ausführungen, insbesondere seine Formel für eine hydrostatische Schwerereduktion nicht haltbar sind, zutrifft.

II.

23. Die in Ziffer 15 gegebene Ableitung der Wegenerschen hydrostatischen Reduktion enthält einen Widerspruch. Es ist zwar in Gleichung (1) durch den Faktor $\frac{(R + H)^2}{(R + h)^2}$ die Abnahme der Schwere mit der Höhe, oder was dasselbe ist, die Konvergenz der Lotrichtungen berücksichtigt worden. Dagegen gilt der Ausdruck $2\pi f \rho (H - h)$ nur für eine ebene und unendlich ausgedehnte Scholle, was einer Vernachlässigung der Konvergenz der Lotrichtungen gleichkommt. Auch in Gleichung (2) ist diese Konvergenz nicht berücksichtigt. Es war nötig, diesen Widerspruch zunächst bestehen zu lassen, weil er den von Herrn Wegener aufgestellten Prinzipien entspricht.

Jetzt soll aber die Wegenersche hydrostatische Reduktion auch noch mit vollständiger Berücksichtigung der Konvergenz der Lotrichtungen für größere Schollen ermittelt werden.

24. Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, die Anziehung einer kugelförmig gekrümmten Scholle von endlicher Dicke auf einen Punkt, der über oder unter ihrem Mittelpunkt liegt, zu kennen. Helmert und Jung geben nur die Formel für eine unendlich dünne Scholle.

Es sei c die Höhe des angezogenen Punktes, h_u die Höhe der unteren, h_0 die der oberen Schollengrenze über der Kugeloberfläche, deren Halbmesser R sei. Ferner sei ψ der Zentriwinkel, der dem sphärischen Halbmesser a der Scholle entspricht. Die Höhen c, h_u, h_0 seien klein gegen R , dann kann man die Formeln für unendlich dünne Schollen [Helmert, H. G. 2, S. 145, Formel (3) und (3*)] entwickeln und integrieren. So findet man die Anziehung A einer Scholle von endlicher Dicke gleich

$$A = 2\pi f \rho \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{R^2}{(R+c)^2} (h_0 - h_u) \pm \frac{R^2}{(R+c)^2} \sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{h_0}{R}\right) \left(1 + \frac{c}{R}\right) + (c - h_0)^2} \right. \\ & \mp \frac{R^2}{(R+c)^2} \sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{h_u}{R}\right) \left(1 + \frac{c}{R}\right) + (c - h_u)^2 + \frac{h_0^2 - h_u^2}{R} \left(1 \pm \sin \frac{\psi}{2}\right)} \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{(h_0^2 - h_u^2)}{R^2} c \left(4 \pm 3 \sin \frac{\psi}{2} \pm \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}\right) + \frac{1}{3} \frac{h_0^3 - h_u^3}{R^2} \left(1 \pm \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}\right) + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn $c \geq h_0$, das untere, wenn $c \leq h_u$ ist. Wegen der Glieder mit $\operatorname{cosec} \psi/2$ ist es fraglich, ob für sehr kleine ψ die Entwicklung konvergiert. Solange $a > \frac{c}{1000}$ und $a > \frac{h}{1000}$ ist, konvergiert die Reihe noch bei Schollen von 8000 m Dicke,

25. Soll die Krümmung der Scholle voll berücksichtigt werden, so ist in Gleichung (1) an Stelle der Anziehung einer ebenen Scholle die nach Gleichung (12) berechnete Anziehung einzusetzen. Dies gibt

$$g_h = [g - A_H] \frac{(R + H)^2}{(R + h)^2} - A_h \quad \dots \quad (1^*)$$

Die Anziehung A_H findet man, wenn man in Gleichung (12) $c = H, h_0 = H, h_u = h$ setzt und das obere Vorzeichen benutzt, die Anziehung A_h , wenn man $c = h, h_0 = H, h_u = h$ setzt und das untere Vorzeichen nimmt.

Ferner ändert sich infolge der Konvergenz der Lotrichtungen das Volumen des Druckelements, so daß an Stelle von Gleichung (2) tritt

$$dD = q_0 \frac{(R + h)^2}{R^2} \varrho g_h dh \dots \dots \dots (2^*)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$M = \sqrt{4 R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{H}{R}\right) + H^2} \quad \text{und} \quad N = 4 R \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{H}{R}\right) - 2 H,$$

so findet man aus (1*) und (2*) durch Integration von 0 bis H

$$D = q_0 g \varrho H \left[1 + 2 \frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} + \frac{4 \pi f \varrho}{g} \left(M - 2 R \sin \frac{\psi}{2} \right) - \frac{2 \pi f \varrho H}{g} \left(1 + 3 \sin \frac{\psi}{2} - \frac{H}{3 M} - \frac{N}{2 M} + \frac{1}{12} \frac{N^2 H}{M^3} + \frac{4}{3} \frac{H}{R} \right) + \dots \right] \quad (3^*)$$

Ist ψ nicht allzu klein, so ist die Anziehung einer gedachten kondensierten Scholle mit der Flächendichte ϱ_k nach der Helmertschen Formel

$$A_{0k} = 2 \pi f \varrho_k \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right).$$

Für kleine ψ ist eine besondere Untersuchung nötig. Sie sollen hier daher ausgeschlossen werden. Dieser Ausdruck tritt in (1*) an die Stelle von $- A_h$, da der angezogene Punkt zwar im Meeresspiegel aber noch über der kondensierten Schicht liegt. Ferner ist $h = 0$ zu setzen. Dann gehen (5) und (6) über in

$$g_0 = (g - A_H) \frac{(R + H)^2}{R^2} + A_{0k}, \dots \dots \dots (5^*)$$

$$D_k = q_0 g \varrho_k \left[1 + 2 \frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} + \frac{2 \pi f \varrho}{g} \left(M - 2 R \sin \frac{\psi}{2} \right) - \frac{2 \pi f \varrho H}{g} \left(1 + 2 \sin \frac{\psi}{2} + \frac{H}{R} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right) + \dots + \frac{2 \pi f \varrho_k}{g} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (6^*)$$

Indem $D_k = D$ gesetzt wird, ergibt sich die Flächendichte

$$\varrho_k = \varrho H \left[1 + \frac{2 \pi f \varrho}{g} \left(M - 2 R \sin \frac{\psi}{2} \right) - \frac{2 \pi f \varrho H}{g} \left(1 + 2 \sin \frac{\psi}{2} - \frac{H}{3 M} - \frac{N}{2 M} + \frac{1}{12} \frac{N^2 H}{M^3} \right) + \dots \right] \quad (7^*)$$

und damit schließlich

$$g_0 = g + 2g \frac{H}{R} + g \frac{H^2}{R^2} + 2\pi f \rho \left(M - (2R + H) \sin \frac{\psi}{2} \right) - \frac{2\pi f \rho H^2}{R} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) + \frac{4\pi^2 f^2 \rho^2 H^2}{g} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \left(1 - \frac{M - (2R + 2H) \sin \frac{\psi}{2}}{H} - \frac{H}{3M} - \frac{N}{2M} + \frac{1}{12} \frac{N^2 H}{M^3} \right) + \dots \quad (8^*)$$

oder in der Wegenerschen Schreibweise

$$g_0 = g + \Delta + \frac{\Delta^2}{4g} + B \left(\frac{M - (2R + H) \sin \frac{\psi}{2}}{H} \right) - \frac{B \Delta}{2g} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - \frac{B^2}{g} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \left(1 - \frac{M - (2R + 2H) \sin \frac{\psi}{2}}{H} - \frac{H}{3M} - \frac{N}{2M} + \frac{1}{12} \frac{N^2 H}{M^3} \right) + \dots \quad (9^*)$$

Die Berücksichtigung des vollen Einflusses der Krümmung der Scholle wirkt sich daher hauptsächlich so aus, daß noch ein Glied mit dem Faktor B , also ein Glied erster Ordnung, auftritt. Bei Schollen mit größerem Durchmesser, etwa von $2R \sin \psi/2 = 2H \approx a$ an, kann man M entwickeln und erhält

$$\Delta g = - \left[\frac{B \Delta}{2g} \left(1 - \frac{1}{4} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + \frac{5}{4} \sin \frac{\psi}{2} \right) + \frac{B^2}{g} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (10^*)$$

Das erwähnte Glied erster Ordnung ist in dem Glied $\frac{B \Delta}{8g} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}$ der Gleichung (10*) enthalten. Es wird merklich, wenn $a = R \psi < 112 H$ wird, denn für diese Grenze ist $\frac{B \Delta}{8g} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} = 0,5 H \text{ mgal}$, wenn H in km ausgedrückt wird.

26. Für einige leicht zu berechnende Fälle habe ich die vervollständigte Wegenersche hydrostatische Reduktion berechnet. Es ist für

$$\begin{aligned} \psi = 180^\circ & \quad \Delta g = -2 \left(\frac{B \Delta}{2g} + \frac{B^2}{g} \right) = -0.0606 H^2, \\ 90^\circ & \quad = - \left(1.5303 \frac{B \Delta}{2g} + 1.7071 \frac{B^2}{g} \right) = -0.0486 H^2, \\ 14^\circ 30.6' & \quad = 0, \\ 4R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{H}{R} \right) = H^2 & \quad = 0.4142 B - \left(\frac{B \Delta}{2g} + 0.1751 \frac{B^2}{g} \right) = 19.2 H - 0.0198 H^2 \end{aligned}$$

oder $\psi = 0.54' H_{\text{km}}$

Wenn H in km ausgedrückt ist, ergibt sich Δg in mgal.

Für noch kleinere ψ bleibt die Reduktion positiv. Es ist auf den ersten Blick überraschend, daß die Wegenersche Reduktion bei kleinen Schollen positiv wird. Dies erklärt sich aber dadurch, daß die vertikale Komponente der Anziehung um

so kleiner wird, je näher die Teilchen der kondensierten Schicht an den unendlich wenig über ihr liegenden angezogenen Punkt heranrücken. Da bei kleinen Schollen die kondensierte Schicht auf Teilchen beschränkt ist, die nahe bei diesem Punkte liegen, ist die Vertikalkomponente der Anziehung der kondensierten Schicht verhältnismäßig klein. Die Teilchen kommen daher durch die Kondensation nicht in größere, sondern in kleinere Schwere. Es ist bei kleinen Schollen daher kein Überschuß der wirklichen Masse über die den gleichen Druck ausübende kondensierte Masse vorhanden, sondern ein Unterschluß.

27. Aus den in Ziffer 16 angegebenen Gründen kommt aber auch der vervollständigten Formel für die Wegenersche hydrostatische Reduktion keine Bedeutung zu. Ich habe die Formeln dafür nur der Vollständigkeit halber abgeleitet.

Antwort auf die Bemerkungen Herrn Kohlschüppers zu der Abhandlung: „Die hydrostatische Reduktion der Schwerebeobachtungen“

Von Kurt Wegener

Ich habe Herrn Kohlschüppers Bemerkungen ebensowenig verstanden wie er offenbar meine Abhandlung verstanden hat. Es möge daher genügen, den Kernpunkt des Problems kurz zusammenfassend hier für den Leser darzustellen.

1. Bei der Bouguerschen Höhenreduktion der Schwerebeobachtungen im Gebirge wird die Wirkung des Plateaus, auf dem beobachtet ist (B), von der beobachteten Schwere abgezogen und nun mit Freiluftreduktion (Δ) auf das NN. hinuntergegangen. Wenn die so von dem sichtbaren Gebirge befreite Erdoberfläche die normalen Schwerewerte aufwies, konnte man auf einen Gleichgewichtszustand dieser korrigierten Erdoberfläche schließen.

Die Erfahrung zeigte, daß der Gleichgewichtszustand in viel höherem Maße vorhanden ist, und bei Verwendung der vollständigen Bouguerschen Reduktion ($g - B + \Delta$) die von der Höhe reduzierten Werte um so mehr von den Normalwerten abweichen, je höher das Gebirgsplateau war.

2. Infolgedessen mußte man vor etwa 100 Jahren dazu übergehen, die Anziehung des Gebirges mit zu berücksichtigen; dies geschah in der sogenannten Kondensationsmethode: Man dachte sich das Gebirgsplateau nach unten kondensiert und verlegte seinen Standpunkt mit Freiluftreduktion hiernach in das NN. Man erwartete, mit dieser Kondensationsmethode zur Übereinstimmung der höhenreduzierten Schwerebeobachtungen mit den Normalwerten für die gegebene geographische Breite zu kommen.

Die Erfahrung zeigte, daß man im Gegenteil prinzipiell größere Werte erhielt und der Unterschied gegenüber den Normalwerten wuchs mit der Höhe der Plateaus.