

Werk

Jahr: 1940

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:16

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0016

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0016

LOG Id: LOG_0054

LOG Titel: Der Einfluß der Elastizität der Schneide und Unterlage eines Pendels auf die Schwingungszeit

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

- [4] G. Aliverti e G. Rosa: Su l'uso della corrente continua e dell'alternata nel metodo dell'effluvio per misure di radioattività dell'aria. N. Cim. 1935.
- [5] G. Aliverti e G. Rosa: Zur Frage der Adsorption von RaEm an Kernen. Gerl. Beitr. z. Geophys. **44** (1935).
- [6] G. Rosa: Über die Adsorption der RaEm an Staubteilchen. Ebenda **45** (1935).
- [7] G. Aliverti: A proposito del metodo Aliverti per misure di radioattività atmosferica. Ebenda **46**, 223—226 (1935).
- [8] G. Rosa: Sull'ancoraggio del RaA del RaB del RaC al pulviscolo. Ebenda **46**, 394—399 (1936).
- [9] G. Aliverti: Considerazioni sull'ancoraggio del radon a particelle degli aerosol. Ebenda **47**, 337—339 (1936).
- [10] G. Aliverti: Su la carica e su la captabilità del RaA in aria atmosferica arricchita di radon. Ebenda **48**, 121—130 (1936).
- [11] G. Rosa: Sulla deposizione degli elementi radioattivi dell'atmosfera mediante il metodo Aliverti. Ebenda **51**, 286—297 (1937).
- [12] G. Aliverti: Su l'importanza dell'aerosol atmosferico per misure di radioattività dell'aria. Conferenze di Fisica e Matematica, R. Università di Torino, 1937.

Pavia, R. Osservatorio Geofisico, den 12. November 1940.

Der Einfluß der Elastizität der Schneide und Unterlage eines Pendels auf die Schwingungszeit

Von **H. Tesch**. — (Mit 10 Abbildungen)

Es wurde der Einfluß der Elastizität der Schneide und Unterlage eines Pendels auf die Schwingungszeit untersucht. Versuche am Pendel mit Gummischneiden und Gummunterlagen ergaben bei verschiedenen Schneidenformen eine Verkürzung der Schwingungszeit gegen diejenige des „starren Falles“. Die Verkürzungen waren um so größer, je kleiner die Amplitude gewählt wurde. Dieses Ergebnis wurde durch die Einwirkung eines elastischen Störungsmoments erklärt.

Einleitung. I. Theorie. II. Versuche. III. Erklärung der Versuchsergebnisse.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde durch gewisse Abweichungen der Amplitudenfunktion $T = T(\varphi)$ eines Schwebpendels von der theoretisch geforderten veranlaßt. Die Theorie liefert für ein punktförmig aufgehängtes Pendel die Näherungsformel:

$$T(\varphi) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right) \cdot \dots \dots \dots (1)$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g \cdot s}} = \text{Schwingungszeit für unendlich kleine Winkel,}$$

φ = Amplitude,

s = Schwerpunktsabstand,

ϱ = Trägheitsradius bezogen auf den Schwerpunkt,

g = Schwerebeschleunigung.

Bei kreisförmiger Schneide geht Formel (1) über in:

$$T(\varphi) = T_0 \cdot \left[1 + \frac{\varphi^2}{16} + \frac{r}{4l} \cdot \varphi^2 \right] \dots \dots \dots (2)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g(s+r)}} = \text{Schwingungszeit für unendlich kleine Winkel} \dots (3)$$

$$l = \frac{s^2 + \varrho^2}{s+r} = \text{reduzierte Pendellänge.}$$

In der Praxis wird die Eigenschaft eines Pendels für Meßzwecke nach der Abweichung der aus Auslaufversuchen gefundenen Funktionen $T = T(\varphi)$ gegen die Funktionen $T_0 \cdot \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$ beurteilt. Die Differenz $T(\varphi) - T_0 \cdot \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right) = \tau(\varphi)$ soll als Restfunktion bezeichnet werden. Im Idealfall eines reibungs-freien, punktförmig aufgehängten und vollkommen starren Pendels müßte $\tau(\varphi) = 0$

sein. In Wirklichkeit wurden, selbst nach Beachtung der üblichen Korrekturen, bei Schwin-gungsversuchen Restfunktionen $\tau(\varphi) > 0$ erhalten. Fig. 1 zeigt einige Versuchsergebnisse. Die Kurve J stammt aus der Reichs-anstalt für Erdbebenforschung zu Jena, die übrigen Kurven wurden bei Versuchen am Schuler-Pendel in Göttingen erhalten. Weitere Versuche, die im In-stitut für Geophysik der Uni-versität Göttingen durchgeführt wurden, sind bei Köller, Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. 13, Heft 7/8, angegeben. Die Kurvenform ist

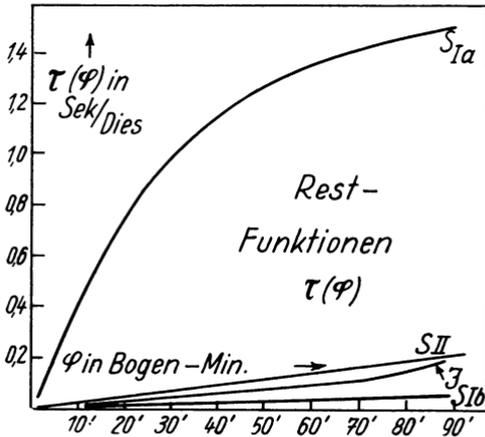


Fig. 1

bei fast allen Messungen die gleiche. Nur bei dem letzten Auslaufversuch am Schuler-Pendel (die Schneide war besonders geschliffen!) ergab sich innerhalb der Meßgenauigkeit $\tau(\varphi) = 0$. Auch durch die Annahme einer kreisförmigen Schneide können die angeführten Abweichungen nicht erklärt werden.

In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, wie sich die Elastizität der Schneide und Unterlage auf die Funktion $T = T(\varphi)$ auswirkt.

I. Theorie

1. Das Prinzip der Näherungsrechnung. Die unverformte Schneide sei kreis-förmig, die unverformte Unterlage eben und horizontal. Es wird sich zeigen, daß

diese Annahmen keine besondere Einschränkung des Problems bedeuten. Für den angenommenen Fall soll der Einfluß der Elastizität der Schneide und Unterlage auf die Funktion $T = T(\varphi)$ berechnet werden.

Auf Grund der Tatsache, daß die aus Auslaufversuchen ermittelten Restfunktionen $\tau(\varphi)$ außerordentlich klein sind, kann die Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe einer Näherungsrechnung durchgeführt werden. Das Prinzip ist das folgende:

Vermöge der Kräftefunktionen des starren Falles und unter Berücksichtigung der Elastizitätsgesetze der Schneide und Unterlage werden die elastischen Auslenkungen in Abhängigkeit vom Ausschlagswinkel α und der Amplitude φ näherungsweise berechnet. Dadurch wird das System auf ein solches mit einem Freiheitsgrad (Ausschlagswinkel α) reduziert.

Für die Rechnung werden folgende Annahmen über die Wirkungsweise der elastischen Schneide und Unterlage gemacht:

1. Die Elastizität der Schneide und Unterlage hat bei schwingendem Pendel Parallelverschiebung der Pendelstange in horizontaler und vertikaler Richtung gegen die entsprechende Lage bei starren Verhältnissen zur Folge.
2. Bei kreisförmiger elastischer Schneide führt das Pendel eine Rollbewegung aus, für die als Abrollkurve die Hüllkurve an alle einzelnen Drucklinien maßgebend ist.
3. Die angeführte Hüllkurve ist nur von der senkrechten, nicht von der horizontalen Belastung der Schneidenwalze abhängig.
4. Die Deformationen der Schneide finden hauptsächlich in der Nähe der Berührungslinie zwischen Schneide und Unterlage statt.

2. Die Zwangskräfte P_x und P_y des schwingenden Pendels mit punktförmiger Aufhängung. Es bedeutet:

- P_x = Zwangskraft des Pendels in der horizontalen Richtung,
- P_y = Zwangskraft des Pendels in der vertikalen Richtung,
- $m \cdot g$ = Gewicht des Pendels,
- s = Schwerpunktsabstand,
- l = reduzierte Pendellänge,
- α = jeweiliger Ausschlagswinkel, φ = Amplitude (maximaler Ausschlag).

Für ein Pendel mit punktförmiger Aufhängung gilt:

$$P_x = \frac{m \cdot g \cdot s}{l} (3 \cos \alpha - 2 \cos \varphi) \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (4)$$

$$P_y = m \cdot g + \frac{m \cdot g \cdot s}{l} (3 \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi - 1) \dots \dots \dots (5)$$

oder, wenn $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$, $\sin \alpha = \alpha$ und als Abkürzung $\frac{m \cdot g \cdot s}{l} = K$ gesetzt wird:

$$P_x = K \cdot (1 + \varphi^2) \cdot (\alpha - \frac{5}{3} \alpha^3), \quad P_y = m \cdot g + K \cdot (\varphi^2 - 2 \alpha^2) \quad . \quad (6)$$

$K \cdot (\varphi^2 - 2 \alpha^2)$ bedeutet die Änderung der Normalkraft des schwingenden Pendels gegen das Pendelgewicht $m \cdot g$. Wir kürzen ab: $K \cdot (\varphi^2 - 2 \alpha^2) = \Delta P_y$.

3. Die Deformationsgesetze der Schneide und Unterlage. Bei den angestellten Versuchen wurde als elastisches Material für die Schneide und Unterlage *Gummi* gewählt. In diesem Falle ist es wahrscheinlich, daß der elastische Einfluß alle anderen Störungen, die auf das Pendel einwirken, übertrifft. Eine Änderung der Schwingungszeit gegen den starren Fall ist verhältnismäßig leicht festzustellen. Schließlich hat man den Vorteil, daß die elastischen Konstanten statisch leicht zu bestimmen sind. Statische Belastungsversuche wurden für verschiedene Schneiden und Unterlagen aus Gummi durchgeführt.

Belastungsversuch in der Normalrichtung. Um die Senkung des Pendels auf Grund der Elastizität der Schneide und Unterlage zu untersuchen, wurde das Pendel durch ein Belastungsjoch ersetzt. Die Senkung des Gestells bei

Belastung durch die Normalkraft P_y gegen die Lage bei $P_y = 0$ sei mit $\bar{\varepsilon}_y$ bezeichnet. Bei den Versuchen ergaben sich für $P_y = F(\bar{\varepsilon}_y)$ Kurven von der Form der Fig. 2. (Kurve 1 bei Belastung, Kurve 2 bei folgender Entlastung, Hysterisis!) Die Auslenkung ε_y bei Belastung mit dem Pendelgewicht $m \cdot g$ bezeichnen wir mit ε_{y0} . Bei schwingendem Pendel ist die Änderung der Normalkraft P_y gegen das Pendelgewicht $m \cdot g$ gering. ($\Delta P_y = K (\varphi^2 - 2 \alpha^2)$). Es kann daher in einem entsprechend kleinen Belastungsintervall lineare Abhängigkeit zwischen der Auslenkung und der Kraftänderung angenommen werden.

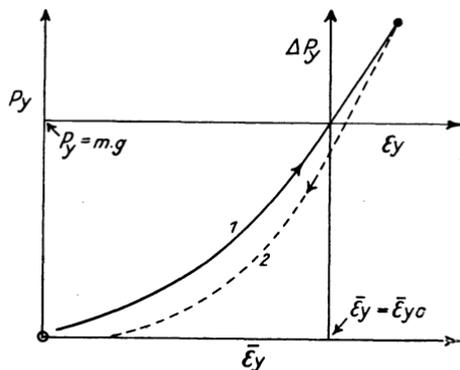


Fig. 2. Funktion $P_y = F(\bar{\varepsilon}_y)$

Wir machen den Schnittpunkt $P_y = m \cdot g$ und $\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_{y0}$ zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems, wobei die Ordinate die Kraftänderung ΔP_y , die Abszisse die Änderung der Auslenkung, bezeichnet mit ε_y , darstellt. Beide sind positiv in der Pfeilrichtung. Bedeutet c_3 den Richtung tangens an der Stelle $P_y = m \cdot g$, so lautet das Elastizitätsgesetz in dem entsprechenden Intervall:

$$\Delta P_y = c_3 \cdot \varepsilon_y.$$

Belastungsversuch in der tangentialen Richtung. Das Joch sei in der y -Richtung mit dem Pendelgewicht $m \cdot g$ belastet. Wirkt auf das Gestell in der x -Richtung ein tangentialer Zug P_x , so erfährt das Ganze in dieser Richtung gegen die Ruhe-

stellung die Verschiebung ε_x . Die Versuche ergaben für $P_x = F(\varepsilon_x)$ bei nicht zu starker Belastung lineare Abhängigkeit. Es gilt:

$$P_x = c_2 \cdot \varepsilon_x$$

($c_2 =$ Elastizitätsfaktor). Die Belastungsversuche wurden bei verschiedenen geformten Schneiden für folgende Einzelfälle durchgeführt:

1. Starre Schneide auf elastischer Unterlage.
2. Elastische Schneide auf starrer Unterlage.
3. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage.

Die Verschiebungen ε_x und ε_y bei schwingendem Pendel. In den Elastizitätsgesetzen $\Delta P_y = c_3 \cdot \varepsilon_y$, $P_x = c_2 \cdot \varepsilon_x$ werden die angegebenen Kräftefunktionen [Gl. (6)] des Pendels eingesetzt. Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{K}{c_2} \cdot \left((1 + \varphi^2) \alpha - \frac{5}{3} \alpha^3 \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{K}{c_3} \cdot (\varphi^2 - 2\alpha^2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. Die Schwingungsgleichung, der Energiesatz.

Die Festlegung des Koordinatensystems geschieht an Hand der Fig. 3. Die Gerade AB stellt die Oberkante der unverformten, horizontalen Unterlage dar. Wir setzen das Pendel in einem Punkte O der Oberkante auf, wobei sich der Berührungspunkt wegen der Elastizität der Unterlage senkrecht nach unten, bis O' , verschiebt. Den Punkt O' machen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen, raumfesten Koordinatensystems x, y . Durch ihn verläuft parallel zu AB die x -Achse (pos. nach rechts) und senkrecht zu dieser nach unten die positive y -Achse.

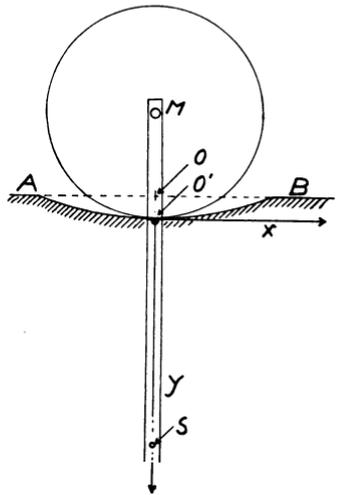


Fig. 3. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage. Ruhestellung

Bezeichnungen (nach Fig. 3, das Pendel ruht):

- R = Radius der unverformten Schneide,
- $MO' = r$ = mittlerer Rollradius (die Schneide ist deformiert),
- $SO' = s$ = Schwerpunktsabstand,
- $MS = a$ = Schwerpunktsabstand vom mittleren Rollzentrum,
- m = Pendelmasse,
- ϱ = Trägheitsradius, bezogen auf den Schwerpunkt S ,
- x, y = Schwerpunktskoordinaten bei schwingendem Pendel,
- α = Augenblickliche Auslenkung des Pendels (Winkel),
- φ = Maximaler Ausschlagswinkel oder Amplitude,
- ε_x = Elastische Auslenkung des Pendels in der x -Richtung,

- $\bar{\varepsilon}_y$ = Gesamte elastische Auslenkung des Pendels in der y -Richtung gegen die Lage des Pendels bei nicht deformierter Schneide und Unterlage,
 ε_{y0} = Elastische Auslenkung wie eben, aber bei Belastung mit dem Pendelgewicht $m \cdot g$,
 ε_y = Elastische Auslenkung des Pendels in der y -Richtung gegen die nach Fig. 3 definierte Ruhelage.

Es besteht die Beziehung: $\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_{y0} + \varepsilon_y$.

Die folgende Rechnung gilt für den Fall, daß die Schneide oder die Unterlage bzw. die Schneide und die Unterlage als ideal elastisch angesehen wird.

Ist L die kinetische, V die potentielle Energie des Systems, so lautet der Energiesatz:

$$L + V = V_0$$

(V_0 = potentielle Energie im Umkehrpunkt).

Für den vorliegenden Fall ergibt dies:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + \frac{m}{2} \varrho^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + m \cdot g \cdot (C - y) + \int_0^{\varepsilon_x} P_x d\varepsilon_x + \int_0^{\bar{\varepsilon}_y} P_y d\bar{\varepsilon}_y \\ = m \cdot g (C - y_\varphi) + \int_0^{\varepsilon_x \varphi} P'_x d\varepsilon_x + \int_0^{\bar{\varepsilon}_y \varphi} P_y d\bar{\varepsilon}_y \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

oder umgeformt:

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 + \varrho^2 \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = m \cdot g (y - y_\varphi) + \int_{\varepsilon_x}^{\varepsilon_x \varphi} P_x d\varepsilon_x + \int_{\bar{\varepsilon}_y}^{\bar{\varepsilon}_y \varphi} P_y d\bar{\varepsilon}_y \quad (8b)$$

In Gleichung (8a) bedeutet:

- $\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$ = Translationsenergie des Pendel-Schwerpunktes,
 $\frac{m}{2} \varrho^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2$ = Rotationsenergie des Pendels, bezogen auf S ,
 $m \cdot g (C - y)$ = Energie der Lage (C ist eine Konstante).

Die Integrale stellen die Deformationsenergie der Schneide und Unterlage in der x - und y -Richtung dar.

Für die Schwingungszeit T folgt das Integral [aus Gleichung (8b)]

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad T &= \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 + \varrho^2}{(y - y_\varphi) + \frac{1}{mg} \left\{ \int_{\varepsilon_x}^{\varepsilon_x \varphi} P_x d\varepsilon_x + \int_{\bar{\varepsilon}_y}^{\bar{\varepsilon}_y \varphi} P_y d\bar{\varepsilon}_y \right\}}} d\alpha, \\ 2. \quad T &= \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{F_1(\alpha_1 \varphi)}{F_2(\alpha_1 \varphi)}} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

[F_1, F_2 = Abkürzung für die Zähler und Nennerfunktion der Gleichung (9)].

Für die Berechnung von F_1 sind die Differentiale dx und dy anzugeben. Wir beziehen uns auf die Fig. 4. Bei einer positiven Änderung des Ausschlagwinkels um $d\alpha$ erfährt die Pendelstange eine Weiterdrehung um M um den Winkel $d\alpha$. Mit dieser Drehung ist ein Weiterrollen der Schneide nach links um das Stück $(r - \varepsilon_y^*) \cdot d\alpha$ verbunden. Hier bedeutet ε_y^* die Senkung des Pendels in der y -Richtung auf Grund der Elastizität der Schneide. Da dieses Abrollglied nur für die Schneide in Frage kommt, ist die besondere Bezeichnung ε_y^* nötig. Gleichzeitig mit der Rollbewegung ändert sich ε_x um $d\varepsilon_x$ und ε_y um $d\varepsilon_y$. Der Bewegungsvorgang wird durch folgende Differentiale beschrieben:

$$\left. \begin{aligned} dx &= a \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha - (r - \varepsilon_y^*) \cdot d\alpha + d\varepsilon_x \\ dy &= -a \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha + d\varepsilon_y \end{aligned} \right\} (10)$$

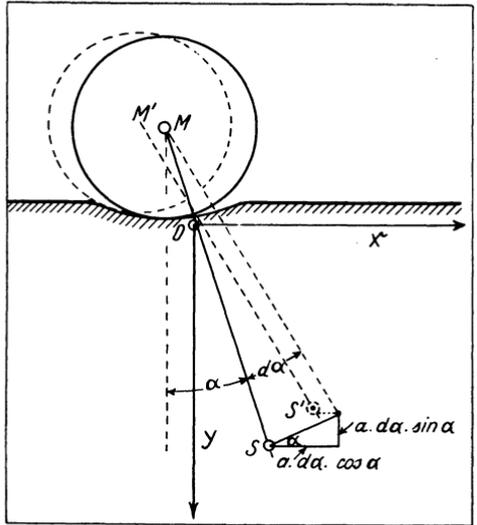


Fig. 4. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage. Pendel in ausgelenktem Zustand

Die Funktionen F_1, F_2 können in Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel α und der Amplitude φ berechnet werden. Die Berechnung wird bis zu quadratischen Gliedern in α und φ durchgeführt (Glieder mit $1/c_2, 1/c_3$ werden nur linear berücksichtigt). Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= p_0 \cdot (1 + p_1 \varphi^2 + p_2 \alpha^2) \\ F_2 &= q_0 \cdot (\varphi^2 - \alpha^2) \cdot (1 - q_1 \varphi^2 - q_2 \alpha^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

mit den Konstanten

$$p_0 = (s^2 + \varrho^2) \left(1 + \frac{2K}{l \cdot c_2} \right); \quad K = \left(\frac{m \cdot g \cdot s}{l} \right),$$

$$p_1 = \frac{2K}{l} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3^*} \right),$$

$$p_2 = \frac{r}{l} + \frac{8K}{l \cdot c_3} - \frac{11K}{l \cdot c_2} - \frac{4K}{l \cdot c_3^*}$$

(c_3^* = elastische Konstante für die Schneide, entsprechend der Auslenkung ε_y^*);

$$q_0 = \frac{a}{2} + \frac{K^2}{2m g \cdot c_2},$$

$$q_1 = \frac{1}{12} + \frac{5 \cdot K}{4 \cdot l \cdot c_2},$$

$$q_2 = \frac{1}{12} + \frac{13 \cdot K}{4 \cdot l \cdot c_2} - \frac{4K}{l \cdot c_3}.$$

Die Schwingungszeit $T = T(\varphi)$. Die berechneten Funktionen F_1 und F_2 werden in Gl. (9) eingesetzt. Es folgt:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{p_0(1 + p_1\varphi^2 + p_2\alpha^2)}{q_0(\varphi^2 - \alpha^2)(1 - q_1\varphi^2 - q_2\alpha^2)}} d\alpha \dots \dots \dots (12a)$$

Eine Umformung durch die Substitution $\alpha = \varphi \cdot \sin \psi$ also $d\alpha = \varphi \cdot \cos \psi \cdot d\psi$ ergibt:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{(1 + p_1\varphi^2 + p_2\varphi^2 \cdot \sin^2 \psi)p_0}{(1 - q_1\varphi^2 - q_2\varphi^2 \cdot \sin^2 \psi)q_0}} d\psi \dots \dots \dots (12b)$$

Für dieses Integral kann nach Reihenentwicklung, bei Beschränkung auf quadratische Glieder in φ , geschrieben werden:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{p_0}{q_0}} \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \frac{p_1 + q_1}{2} \varphi^2 + \frac{p_2 + q_2}{2} \varphi^2 \cdot \sin^2 \psi \right\} d\psi \dots \dots (13a)$$

Die Integration liefert für die Schwingungszeit T die endgültige Formel (bei Berücksichtigung der Werte für die Konstanten):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g \cdot a}} \cdot \left\{ 1 + \frac{m \cdot g \cdot s}{2 l^2 \cdot c_2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{16} + \frac{r}{4l} + \frac{m \cdot g \cdot s}{l^2 \cdot c_3} - \frac{m \cdot g \cdot s}{3 l^2 \cdot c_2} \right) \varphi^2 \right\} \right\} \quad (13b)$$

$$= T_{0e} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{16} + \frac{r}{4l} + \frac{m \cdot g \cdot s}{l^2 \cdot c_3} - \frac{m \cdot g \cdot s}{3 \cdot l^2 \cdot c_2} \right) \varphi^2 \right\}.$$

Diskussion der Schwingungszeitformel. In Gl. (13b) bedeutet das Glied $\left(\frac{1}{16} + \frac{r}{4l}\right) \varphi^2$ die bekannte Amplitudenkorrektur eines entsprechenden starren Rollpendels. Die Elastizität der Schneide und Unterlage wirkt sich nach Gl. (13) in einer T_0 -Verlängerung, sowie in einer Änderung der Amplitudenfunktion aus. Der Charakter einer quadratischen Funktion bleibt jedoch erhalten. Da im allgemeinen das Glied $r/4l$ in der Klammer vernachlässigt werden kann, würde die Elastizität die Restfunktion

$$\tau(\varphi) = T_{0e} \cdot \frac{m \cdot g \cdot s}{l^2} \left(\frac{1}{c_3} - \frac{1}{3 \cdot c_2} \right) \varphi^2 \dots \dots \dots (14)$$

zur Folge haben.

Nach dieser Formel hebt der elastische Effekt in der x -Richtung denjenigen in der y -Richtung zum Teil wieder auf. Für den Fall $c_3 = 3 c_2$ ist $\tau(\varphi) = 0$.

Aus Gl. (14) sieht man weiter, daß Glieder von der Form $1/c_3^*$ nicht auftreten. Die Amplitudenfunktion wird in der angeführten Näherung durch die Abwei-

chung der maßgebenden Abrollkurve von der ursprünglichen Kreisform nicht beeinflusst*).

In Abschnitt III. werden Schwingungsversuche mit elastischen Schneiden und Unterlagen angegeben. Für die dort behandelten Fälle wurden c_2 und c_3 statisch ermittelt. Im Gegensatz zu unserem Rechenergebnis zeigten die Versuche bei elastischer Schneide oder Unterlage bzw. bei elastischer Schneide und elastischer Unterlage verhältnismäßig starke T_0 -Verkürzungen gegen den starren Fall. Die Restfunktionen waren nicht quadratisch und viel größer als die nach der Formel berechneten Werte. Daraus muß geschlossen werden, daß die Verformungen der Schneide und Unterlage noch in einer anderen Art als angenommen wurde auf den Schwingungsvorgang einwirken. Diese Dinge sollen im Anschluß an die nun folgenden Versuchsergebnisse diskutiert werden.

II. Versuche

1. Die Versuchsanordnung. Wegen der Möglichkeit von seitlichen Verschiebungen des Pendels bei Gummischneiden oder Gummunterlagen wurde die Schwingungszeit mit Hilfe der nachstehenden Versuchsanordnung so registriert, daß immer bei senkrechter Pendelstellung sich eine Schnittmarke auf dem Registrierfilm abzeichnete.

Seitliche Verschiebungen des Pendels in der Nullstellung sind auf dem Film zu erkennen.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 5.

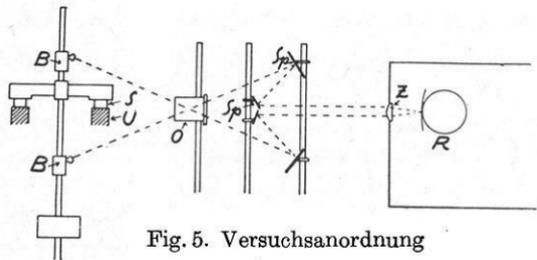


Fig. 5. Versuchsanordnung

Die Schneidenwalzen S ruhen auf den Unterlagen U . An der Pendelstange sind in ungefähr gleichen Abständen von der Drehachse zwei Einfadenlampen mit

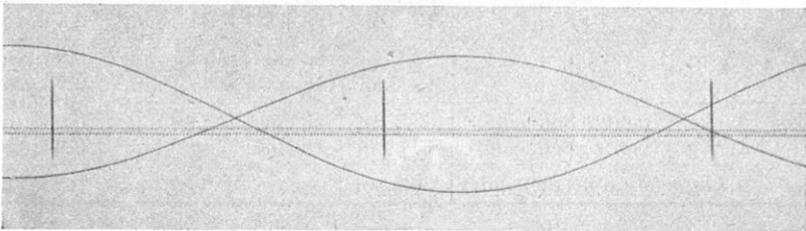


Fig. 6. Filmstreifen

Taschenlampenbatterien angebracht. Die beiden in der Figur gezeichneten Lichtstrahlen gehen durch das Objektiv O und werden durch zwei Spiegelpaare Sp so

*) Hierzu siehe: H. Gebelein: Das abrollende physikalische Pendel. Ing.-Arch. 6, 75 (1935).

reflektiert, daß sie in der gezeichneten Weise parallel laufen und senkrecht auf die Zylinderlinse *Z* auffallen. Auf dem bewegten Film zeigen sich nach dem Entwickeln zwei sich schneidende, sinusförmige Kurven. Der größte Abstand beider Kurven gibt ein Maß für die Größe des Ausschlagwinkels. Fig. 6.

Neben der eigentlichen Pendelmarke (große Sinuskurve) sieht man als Sekundenmarke senkrechte Striche, und als feinere Zeitmarke eine Stimmgabelschwingung. Die Sekundenmarke wurde von einem Reversionspendel (Stahlschneide auf Achatunterlage) aufgenommen. Dieses Pendel wurde für die Dauer einer Messung einmal angestoßen.

2. Die Durchführung der Versuche. Für jeden Versuch standen zwei körperlich gleiche Schneidenpaare aus Eisen und Gummi zur Verfügung. Schneiden und Unterlagen waren auswechselbar, auf diese Weise war es möglich, die Schwingungszeit des elastischen Systems mit derjenigen des starren Falles zu vergleichen. Zur Beurteilung der Restfunktionen $\tau(\varphi)$ wurde *T* bei den Ausschlägen $\varphi = 70^\circ$, $\varphi = 50^\circ$, $\varphi = 1,50$ gemessen. Bei jedem Versuch wurden etwa 30 Schwingungen beobachtet. Bei der Auswertung war mit einer Genauigkeit von größer als $1 \cdot 10^{-4}$ Sekunden pro Schwingungszeit zu rechnen. Die Schwingungsversuche wurden in der nachstehenden Reihenfolge durchgeführt:

1. Starre Schneide auf starrer Unterlage (Eisen auf Eisen).
2. Starre Schneide auf elastischer Unterlage (Eisen auf Gummi).
3. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage (Gummi auf Gummi).
4. Elastische Schneide auf starrer Unterlage (Gummi auf Eisen).

3. Die Versuchsergebnisse. Die Pendeldata bei den einzelnen Versuchen.

Versuchsbezeichnung VS.	Pendelgewicht mg	Schneidenradius <i>r</i>	Schwerpunktsabstand <i>s</i>	Trägheitsradius ρ	Elastizitätsmodul der Schneide E_1	Elastizitätsmodul der Unterlage E_2
Ia	3.4 kg	1 cm	25.4 cm	32 cm	0.3 kg/mm ²	0.6 kg/mm ²
Ib	1.8 kg	1 cm	15 cm	26 cm	0.3 kg/mm ²	0.6 kg/mm ²
IIa	4.7 kg	0.6 cm	37.1 cm	26 cm	0.8 kg/mm ²	0.9 kg/mm ²
IIb	2.1 kg	0.6 cm	13 cm	26 cm	0.8 kg/mm ²	0.9 kg/mm ²
IIIa	3.6 kg	(spitze Schneide)	36.3 cm	39 cm	0.8 kg/mm ²	0.9 kg/mm ²
IIIb	1.9 kg	(spitze Schneide)	13 cm	15 cm	0.8 kg/mm ²	0.9 kg/mm ²
IV	3.7 kg	(stumpfe Schneide)	36.5 cm		0.8 kg/mm ²	0.9 kg/mm ²

Das Ergebnis der Versuche wurde in Form von Schwingungszeit-Funktionen $T = T(\varphi)$ und Restfunktionen $(\tau) = T(\varphi) - T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$ aufgezeichnet. Die Art des Schneiden- und Unterlagematerials ist bei jeder Funktionskurve angegeben.

Es bedeutet: st. S. starre Schneide, el. S. elastische Schneide, st. U. starre Unterlage, el. U. elastische Unterlage.

Als Beispiel seien Diagramme der Versuche Ia und Ib für $T(\varphi)$ und für $\tau(\varphi)$ in Fig. 7 und 8 gegeben.

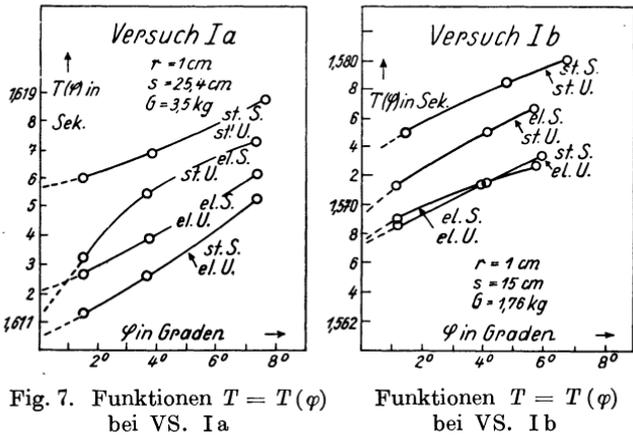


Fig. 7. Funktionen $T = T(\varphi)$ bei VS. Ia

Funktionen $T = T(\varphi)$ bei VS. Ib

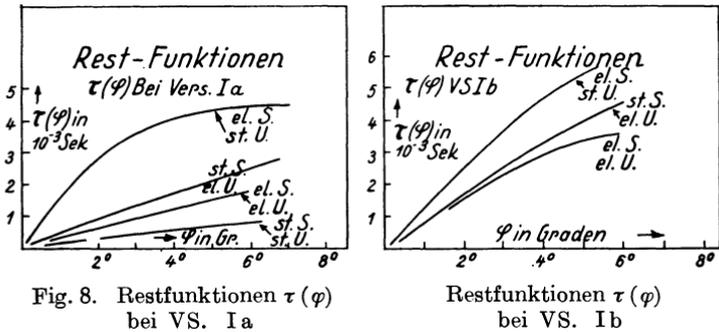


Fig. 8. Restfunktionen $\tau(\varphi)$ bei VS. Ia

Restfunktionen $\tau(\varphi)$ bei VS. Ib

Zur weiteren Übersicht über die Versuche wurden die Ergebnisse im Anschluß an die Diagramme in einer Tabelle zusammengestellt. Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet:

VS. = Bezeichnung des Versuches.

ΔT_0 = Abweichung der Schwingungszeit des elastischen Systems gegen diejenige des starren Falles bei unendlich kleinen Amplituden.

Es gilt: $\begin{cases} + \Delta T_0 = \text{Verlängerung} \\ - \Delta T_0 = \text{Verkürzung} \end{cases}$ der Schwingungszeit gegen den starren Fall.

$\tau(\varphi)$ = Restfunktionswert, berechnet für die Amplitude $\varphi = 6^\circ$.

c_2, c_3 = Konstante aus den Elastizitätsgesetzen $P_x = c_2 \cdot \epsilon_x$, $\Delta P_y = c_3 \cdot \epsilon_y$.

e = elastisch.

s = starr.

An Hand der Tabelle 1 sollte untersucht werden, ob zwischen ΔT , $\tau(\varphi)$, c_2 und c_3 ein Zusammenhang besteht. Aus diesem Grunde wurden die gesamten Meßwerte der einzelnen Unterversuche eines Hauptversuches nach der Größe der

elastischen Einwirkung geordnet. Hinter jedem Versuchswert sind in zwei engen Spalten die Schneiden- und Unterlagsordnung angegeben (z. B. bedeutet s starre Schneide, e elastische Unterlage).

Tabelle 1

VS.	ΔT_0 in Sek.	Schneide		$\tau (\varphi)$ in Sek.		Schneide		c_2 in kg/m		c_3 in kg/m		Schneide	
		Unterlage		Unterlage		Unterlage		Unterlage		Unterlage		Unterlage	
Ia	— $6,2 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $4,4 \cdot 10^{-3}$	e	s	1,4 · 10 ³	e	e	2,8 · 10 ³	e	e	
	— $5,1 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $2,5 \cdot 10^{-3}$	s	e	1,7 · 10 ³	e	s	4,5 · 10 ³	e	s	
	— $4,6 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $1,8 \cdot 10^{-3}$	s	e	4,2 · 10 ³	s	e	6,5 · 10 ³	s	e	
Ib	— $13,0 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $5,7 \cdot 10^{-3}$	e	s	1,0 · 10 ³	e	e	2,4 · 10 ³	e	e	
	— $12,9 \cdot 10^{-3}$	e	e	+ $4,3 \cdot 10^{-3}$	s	e	1,4 · 10 ³	e	s	3,6 · 10 ³	e	s	
	— $9,1 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $3,5 \cdot 10^{-3}$	e	e	4,2 · 10 ³	s	e	5,0 · 10 ³	s	e	
IIa	— $6,2 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $2,9 \cdot 10^{-3}$	e	s	3,4 · 10 ³	e	e	7,4 · 10 ³	e	e	
	— $4,7 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $2,8 \cdot 10^{-3}$	s	e	5,2 · 10 ³	e	s	10,0 · 10 ³	e	s	
	— $4,0 \cdot 10^{-3}$	e	e	+ $2,4 \cdot 10^{-3}$	e	e	8,0 · 10 ³	s	e	12,0 · 10 ³	s	e	
IIb	— $22,0 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $11 \cdot 10^{-3}$	e	s	2,7 · 10 ³	e	e	5,8 · 10 ³	e	e	
	— $14,5 \cdot 10^{-3}$	e	e	+ $8,0 \cdot 10^{-3}$	s	e	4,3 · 10 ³	e	s	10,0 · 10 ³	e	s	
	— $10,2 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $7,2 \cdot 10^{-3}$	e	e	8,0 · 10 ³	s	e	12,0 · 10 ³	s	e	
IIIa	— $3,2 \cdot 10^{-3}$	e	e	+ $0,3 \cdot 10^{-3}$	e	e	1,6 · 10 ³	e	e	3,1 · 10 ³	e	e	
	— $2,6 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $0,2 \cdot 10^{-3}$	s	e	1,8 · 10 ³	e	s	4,3 · 10 ³	e	s	
	— $0,6 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $0,1 \cdot 10^{-3}$	e	s	7,7 · 10 ³	s	e	8,0 · 10 ³	s	e	
IIIb	— $13,1 \cdot 10^{-3}$	e	e	+ $0,8 \cdot 10^{-3}$	e	e	1,3 · 10 ³	e	e	3,1 · 10 ³	e	e	
	— $11,2 \cdot 10^{-3}$	e	s	+ $0,8 \cdot 10^{-3}$	e	s	1,5 · 10 ³	e	s	4,3 · 10 ³	e	s	
	— $0,8 \cdot 10^{-3}$	s	e	+ $0,2 \cdot 10^{-3}$	s	e	5,7 · 10 ³	s	e	8,0 · 10 ³	s	e	

Schlußfolgerungen aus den Diagrammen. Bei einzelnen Schwingungsversuchen zeigen die Funktionen $T(\varphi)$ schon für den Fall „Starre Schneide auf starrer Unterlage“ verhältnismäßig starke Abweichungen gegen den theoretisch geforderten Verlauf. Diese Unregelmäßigkeiten müssen auf Fehler in der Bearbeitung der Schneide und Unterlage, sowie auf Unsauberkeit dieser Teile zurückgeführt werden. Bei den Gummiversuchen sind folgende Abweichungen gegen den „Starren Fall“ besonders auffallend:

Bei allen Versuchen ergibt sich eine *Verkürzung* der Schwingungszeit gegen den „Starren Fall“. Diese Abweichungen nehmen mit wachsender Amplitude ab, sie werden größer, je kleiner man den Schwerpunktsabstand s wählt. Auffallend ist weiter, daß bei Versuch III (spitze Schneide) starke T_0 -Verkürzungen, aber verhältnismäßig kleine Restfunktionen $\tau(\varphi)$ gemessen wurden. *Bei einem Reversionspendel würde sich dieses Ergebnis dahin auswirken, daß bei beiden Schneiden die Schwingungszeit zu kurz gemessen wird.*

Es ist schließlich noch die Größe und die Form der Restfunktionskurven zu beachten.

Nach dem Rechenergebnis von Abschnitt II müßte für eine Amplitude von 60° sich bei den gemessenen Elastizitätskonstanten c_2 und c_3 ein $\tau(\varphi)$, $\varphi = 60^\circ$ in der Größenordnung 10^{-5} Sekunden ergeben. Bei den Versuchen haben die Abweichungen jedoch die Größenordnung 10^{-3} Sekunden. Die Restfunktionen können nicht durch quadratische Kurven, wie es die angegebene Rechnung ergab, angenähert werden.

Schlußfolgerung aus der Tabelle. Bei den Versuchen I und II besteht zwischen den T_0 -Verkürzungen, sowie den Restfunktionen $\tau(\varphi)$ und den elastischen Konstanten c_2 und c_3 anscheinend kein direkter Zusammenhang. Bei Versuch III hingegen scheint dies im großen und ganzen der Fall zu sein. Hier gibt die Anordnung „Elastische Schneide auf elastischer Unterlage“ die größte Änderung gegen den „Starren Fall“.

III. Erklärung der Versuchsergebnisse

Beim Vergleich der bisherigen Rechenergebnisse mit den Versuchsergebnissen ist zu beachten, daß bei der Rechnung der Einfluß der bei elastischer Schneide durch das Pendelgewicht hervorgerufenen Schwerpunktssenkung auf die Schwingungszeit nicht berücksichtigt wurde. In Abschnitt II kam es hauptsächlich auf die Berechnung der Restfunktion an.

Man könnte daher vermuten, daß die einfache Senkung des Schwerpunkts beim Pendel mit elastischer Schneide gegen die Schwerpunktslage bei starrer Schneide die Ursache der gemessenen Schwingungszeitverkürzung bei unendlich kleinen Ausschlägen ist. Wir unterscheiden bei dieser Betrachtung den Fall der kreisförmigen Schneide von dem der spitzen Schneide. Bei kreisförmiger Schneide ergibt die Korrekturrechnung folgendes: Es sei

- r = Schneidenradius bei unverformter Schneide,
- s = Schwerpunktsabstand bei unverformter Schneide,
- ϱ = Trägheitsradius, bezogen auf den Schwerpunkt S ,
- ε = Schwerpunktssenkung durch das Pendelgewicht bei elastischer Schneide.

Für den starren Fall gilt:

$$T_{0s} = 2\pi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g(s+r)}}$$

Bei elastischer Schneide lautet die Korrektur ($T_{0e} = T_0$ elastisch):

$$\text{Schwerpunktsabstand} = s + \varepsilon,$$

$$\text{Schneidenradius} = r - \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \text{Schwingungszeit } T_{0e} &= 2\pi \sqrt{\frac{(s + \varepsilon)^2 + \varrho^2}{g(s + \varepsilon + r - \varepsilon)}} \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \frac{2s \cdot \varepsilon}{s^2 + \varrho^2} \cdot \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g(s+r)}}} \end{aligned}$$

Wenn nur lineare Glieder in ε berücksichtigt werden, folgt durch Reihenentwicklung:

$$T_{0\varepsilon} = 2\pi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g(s+r)}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{l}\right) \dots \dots \dots (15)$$

$$l = \text{reduzierte Pendellänge} = \frac{s^2 + \varrho^2}{s}$$

Wir erhalten durch die Elastizität der Schneide Verlängerung der Schwingungszeit gegen den starren Fall. Die gemessenen T_0 -Verkürzungen können bei kreisförmiger Schneide nicht durch eine einfache Schwerpunktssenkung erklärt werden.

Es soll noch kurz auf eine entsprechende Korrektur bei spitzer Schneide eingegangen werden.

Man kann vermuten, daß auch für den Fall der spitzen, elastischen Schneide ein wirksamer Krümmungsradius anzusetzen ist.

Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

- s = Schwerpunktsabstand bei unverformter Schneide,
- ϱ = Trägheitsradius, bezogen auf den Schwerpunkt,
- ε = Schwerpunktssenkung bei Belastung mit dem Pendelgewicht,
- r = angenommener wirksamer Krümmungsradius bei elastischer Schneide.

Die Schwingungszeit für den starren Fall ist (Amplitude $\varphi \rightarrow 0$)

$$T_{0s} = 2\pi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g \cdot s}}$$

Bei elastischer Schneide werden in die Schwingungszeitformel eines Rollpendels folgende korrigierte Größen eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{Schwerpunktsabstand} &= s + \varepsilon \\ \text{Wirksamer Schneidenradius} &= r \end{aligned}$$

Für die Schwingungszeit des elastischen Falles folgt dann:

$$T_{0\varepsilon} = 2\pi \sqrt{\frac{(s+\varepsilon)^2 + \varrho^2}{g(s+r+\varepsilon)}} = 2\pi \sqrt{\frac{s^2 + \varrho^2}{g \cdot s}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{2s \cdot \varepsilon}{s^2 + \varrho^2}}{1 + \frac{r + \varepsilon}{s}}}$$

Die Umformung der Wurzel durch Reihenentwicklung nach ε (nur lineare Glieder in ε) liefert:

$$T_{0\varepsilon} = T_{0s} \left(1 - \frac{r + \varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{l}\right) \dots \dots \dots (16)$$

[Es sei bemerkt, daß der Grenzübergang $r \rightarrow 0$ von dieser Formel zu der oben abgeleiteten Gl. (15) nicht statthaft ist.]

Nach Formel (16) könnte man die T_0 -Verkürzungen bei Versuch III für den Fall „Elastische Schneide auf starrer Unterlage“ und „Elastische Schneide auf elastischer Unterlage“ durch die Annahme eines wirksamen Krümmungskreises erklären. Aus den Versuchswerten berechnet sich der Schneidenradius aus der obigen Gleichung zu:

$$r = \frac{2s}{l} \cdot \varepsilon - \frac{2s \cdot \Delta T_0}{T_{0s}} - \varepsilon_0.$$

Die Durchrechnung ergibt für Versuch III:

Fall 1. Elastische Schneide auf starrer Unterlage

VS. IIIa: $r = 9.8 \cdot 10^{-2}$ cm Pendelgewicht = 3.56 kg

VS. IIIb: $r = 13.3 \cdot 10^{-2}$ cm Pendelgewicht = 1.96 kg

Fall 2. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage

VS. IIIa: $r = 12 \cdot 10^{-2}$ cm Pendelgewicht = 3.56 kg

VS. IIIb: $r = 13 \cdot 10^{-2}$ cm Pendelgewicht = 1.96 kg

Diese wirksamen Krümmungsradien sind jedoch unwahrscheinlich, da nicht anzunehmen ist, daß bei größerer Belastung sich ein kleinerer Abrollkreis ausbildet.

Aus den bisherigen Untersuchungen muß geschlossen werden, daß die angenommene Wirkungsweise der elastischen Teile bei weitem übertroffen wird durch solche Verzerrungen, die ein zusätzliches Rückfuhrmoment zur Folge haben. Auf diese Dinge soll nun eingegangen werden.

Wangengewirkung der Schneide als Ursache eines zusätzlichen Rückfuhrmomentes. Aus den bisherigen Untersuchungen muß geschlossen werden, daß die elastischen Verformungen der Schneide und Unterlage bei schwingendem Pendel ein zusätzliches Drehmoment zur Folge haben. Um über die Art dieses Zusatzmomentes etwas zu erfahren, wurden Filmaufnahmen der elastischen Schneide und Unterlage bei schwingendem Pendel gemacht. Es sollen nur die Filmstreifen der elastischen Schneide und elastischen Unterlage bei VS. II und VS. III gezeigt werden.

Filmstreifen I: Elastische spitze Schneide auf elastischer Unterlage von VS. III (Fig. 9).

Bild 1. Die Schneide, auf die ein regelmäßiges weißes Liniennetz gezeichnet wurde, ist unbelastet, also unverformt.

Bild 2. Das Pendel schwingt und passiert gerade die Ruhelage. In dieser Stellung ist die Spannungsverteilung symmetrisch. Die vorher geraden Schneidenseiten sind nach außen ausgewölbt. (Das Netz ist entsprechend verzerrt.)

Bilder 3 und 4. Diese Aufnahmen wurden bei schwingendem ausgelenktem Pendel gemacht. Die Spannungsverteilung in der Schneide ist unsymmetrisch, wahrscheinlich wird hierdurch die Ausbuchtung in der einen Schneidenseite begünstigt (in der Figur die rechte). Die rechte Schneidewange legt sich mit wachsender Auslenkung mehr und mehr gegen die Unterlage. Hierdurch entsteht ein zusätzliches Rückfuhrmoment.

Filmstreifen II: Elastische, unten abgerundete Schneide auf elastischer Unterlage (Fig. 10).

Bild 1. Das Pendel schwingt gerade durch die Nullstellung.

Bilder 2 und 3. Beim Schwingen des Pendels legt sich die eine Schneidenseite gegen die Unterlage (Wangenwirkung!). Die Folge ist ein elastisches Störmoment.

Es muß noch erwähnt werden, daß bei einigen Versuchen (z. B. starre *Kreiswalze* auf elastischer Unterlage oder ela-

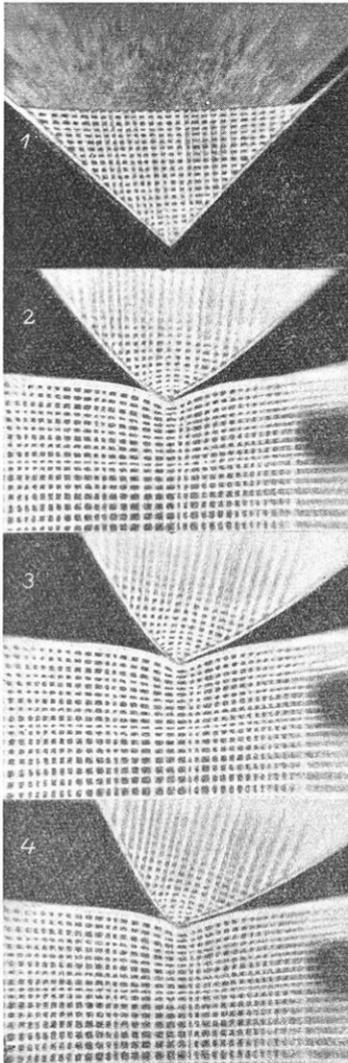


Fig. 9. Filmstreifen I.

Elastische, spitze Schneide auf elastischer Unterlage

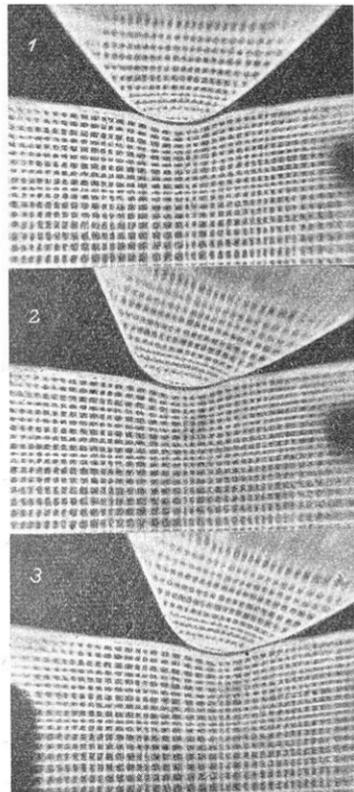


Fig. 10. Filmstreifen II.

Elastische, unten abgerundete Schneide auf elastischer Unterlage

stische *Kreiswalze* auf starrer Unterlage) die Erklärung eines elastischen Störmomentes nicht so einfach ist wie bei den in Fig. 9 und 10 angegebenen.

Versuchen. Es muß angenommen werden, daß bei einer derartigen Walze ein Aufwalzen der Schneide bzw. Unterlage eintritt. Dadurch entsteht bei Schwingungsumkehr ein Zusatzmoment.

Alle angegebenen Einwirkungen, die das Pendel durch die Elastizität der Schneide oder Unterlage erfährt, sind besonders groß im Umkehrpunkt der Bewegung. Da nach der Theorie der Pendelschwingungen Störungen bei der Schwingungsumkehr besonders wirksam auf die Schwingungszeit sind, haben kleine elastische Momente verhältnismäßig starke Schwingungszeitänderungen zur Folge.

Es soll nun aus der Verschiedenheit der gemessenen Schwingungsfunktionen des elastischen und starren Falles auf die Form des Störungsmomentes geschlossen werden.

Der mathematische Ansatz für ein zusätzliches Rückführungsmoment. Das Störungsmoment wird mit M bezeichnet. Wir nehmen an, daß dies für $\alpha = 0$ ebenfalls Null ist und sich in einer Potenzreihe von α darstellen läßt. Der Ansatz lautet für den ersten Quadranten:

$$M = - (k_1 \cdot \alpha + k_2 \alpha^2 + k_3 \alpha^3),$$

$k_1, k_2, k_3 =$ Konstante.

Aus den aus den angeführten Versuchen gemessenen Restfunktionen und T_0 -Verkürzungen soll die Größe und das Vorzeichen der k , bei den einzelnen Versuchen berechnet werden. Wir betrachten als ungestörtes System ein Pendel mit punktförmiger Aufhängung. Die Schwingungsgleichung für den starren Fall lautet:

$$\theta \cdot \ddot{\alpha} + D \cdot \sin \alpha = 0.$$

$\theta =$ Trägheitsmoment, bezogen auf den Drehpunkt; $D = m \cdot g =$ Schweremoment; $m =$ Masse des Pendels; $g =$ Schwerebeschleunigung.

Fügt man in der Schwingungsgleichung das elastische Störungsmoment hinzu, so ergibt sich:

$$\theta \cdot \ddot{\alpha} + D \cdot \sin \alpha + k_1 \cdot \alpha + k_2 \alpha^2 + k_3 \alpha^3 = 0.$$

Wird hier $\sin \alpha = \alpha - \alpha^3/6$ gesetzt und die Gleichung durch θ dividiert, so erhält man die Form:

$$\ddot{\alpha} + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^3 = 0,$$

$A_1, A_2, A_3 =$ Konstante.

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich in bekannter Weise lösen, wenn man sie mit $d\alpha/dt$ multipliziert und dann integriert. Die Rechnung, die hier nicht angegeben werden soll, führt für T auf ein Integral von der Form, wie es bei den Untersuchungen auf S. 296 auftrat. Das Rechenergebnis lautet:

$$T = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{\theta}{D}} \left(1 - \frac{k_1}{2D}\right) \left[1 - \frac{0.42}{D} k_2 \cdot \varphi + \left(\frac{1}{16} - \frac{k_1}{16D} - \frac{3k_3}{8D}\right) \varphi^2\right]. \quad (17)$$

Nach dieser Formel ändert sich die Schwingungszeit $T_{0\varphi \rightarrow 0}$ des starren Systems bei Einwirkung des genannten Störungsmomentes um

$$\Delta T_0 = - 2 \pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \cdot \frac{k_1}{2D} = - T_0 \cdot \frac{k_1}{2D},$$

woraus folgt:

$$k_1 = - \frac{2D \cdot \Delta T_0}{T_{0s}}$$

($T_{0s} = T_0$ für den starren Fall).
 $\varphi \rightarrow 0$

Wir bilden aus Gleichung (17) die Restfunktion $\tau(\varphi) = T(\varphi) - T_{0e} \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$.

Es folgt:

$$\tau(\varphi) = T_{0e} \left\{ - \frac{0.42 \cdot k_2}{D} \cdot \varphi - \left(\frac{k_1}{16D} + \frac{3k_3}{8D} \right) \varphi^2 \right\}$$

($T_{0e} = T_0$ für das elastische System).
 $\varphi \rightarrow 0$

Differenziert man diese Gleichung nach φ und setzt dann $\varphi = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = - \frac{0.42 \cdot T_{0e} \cdot k_2}{D} = p$$

($p =$ Richtungstangens der Restfunktion bei $\varphi = 0$). Für k_2 folgt daraus:

$$k_2 = - \frac{p \cdot D}{0.42 \cdot T_{0e}}$$

Schließlich wird auch die Konstante k_3 des Störungsmomentes aus der Formel für $\tau(\varphi)$ berechnet, wenn man dort die schon ermittelten Konstanten k_1 und k_2 , sowie ein $\tau(\varphi)$ bei größerem φ einsetzt.

Die Berechnung der k_i nach der angegebenen Methode wurde für die Schwingungsversuche I, II und III durchgeführt. Das Ergebnis ist in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Diese Tabelle gibt in der ersten Spalte den Versuch an. In Spalte 2 ist das Pendelgewicht mg , in der Doppelspalte 3 die Schneiden- und Unterlagsanordnung verzeichnet. Danach folgen in den übrigen Spalten die berechneten Konstanten k_1 , k_2 und k_3 .

Nach der Tabelle 2 können wir über die k_i folgendes aussagen.

Die Konstante k_1 . 1. k_1 hat bei einem Hauptversuch stets dieselbe Größenordnung, gleichgültig, ob die Schneide starr und die Unterlage elastisch, oder die Schneide elastisch und die Unterlage starr, oder ob beide elastisch sind. 2. Bei allen Versuchen hat k_1 für den Fall „Elastische Schneide auf elastischer Unterlage“, der für Schweremessungen besonders wichtig ist, ungefähr dieselbe Größe, gleichgültig wie die Schneide geformt, wie schwer das Pendel und wie groß der Schwerpunktsabstand ist. (Nur Versuch IIa fällt etwas heraus.)

Die Konstante k_2 . Bei den Versuchen I und II liegt diese Konstante in derselben Größenordnung, sie wird eine Zehnerpotenz kleiner bei Versuch III. (Spitze Schneide.)

Die Konstante k_3 . k_3 ist bei den einzelnen Versuchen sehr verschieden. Am geringsten ist sie wie k_2 bei Versuch III. (Spitze Schneide.)

Tabelle 2. Die Konstanten des Störungsmomentes

VS.	mg	Schneide	Unterlage	k_1 (kg · m)	k_2 (kg · m)	k_3 (kg · m)
Ia	3,36 kg	s	e	+ 6,4 · 10 ⁻³	- 3,2 · 10 ⁻²	+ 5,1 · 10 ⁻²
		e	e	+ 4,7 · 10 ⁻³	- 2,5 · 10 ⁻²	+ 3,8 · 10 ⁻²
		e	s	+ 4,9 · 10 ⁻³	- 12,1 · 10 ⁻²	+ 74,0 · 10 ⁻²
Ib	1,76 kg	s	e	+ 4,3 · 10 ⁻³	- 2,4 · 10 ⁻²	+ 2,6 · 10 ⁻²
		e	e	+ 4,3 · 10 ⁻³	- 1,1 · 10 ⁻²	+ 3,7 · 10 ⁻²
		e	s	+ 3,0 · 10 ⁻³	- 2,9 · 10 ⁻²	+ 8,9 · 10 ⁻²
IIa	4,74 kg	s	e	+ 12,7 · 10 ⁻³	- 7,7 · 10 ⁻²	+ 18,8 · 10 ⁻²
		e	e	+ 8,2 · 10 ⁻³	- 6,6 · 10 ⁻²	+ 15,0 · 10 ⁻²
		e	s	+ 9,6 · 10 ⁻³	- 9,1 · 10 ⁻²	+ 31,4 · 10 ⁻²
IIb	2,13 kg	s	e	+ 3,5 · 10 ⁻³	- 3,2 · 10 ⁻²	+ 141,0 · 10 ⁻²
		e	e	+ 4,9 · 10 ⁻³	- 2,6 · 10 ⁻²	+ 41,7 · 10 ⁻²
		e	s	+ 7,5 · 10 ⁻³	- 7,6 · 10 ⁻²	+ 76,2 · 10 ⁻²
IIIa	3,56 kg	s	e	+ 0,9 · 10 ⁻³	- 4,9 · 10 ⁻³	+ 1,0 · 10 ⁻²
		e	e	+ 4,6 · 10 ⁻³	- 7,9 · 10 ⁻³	+ 2,0 · 10 ⁻²
		e	s	+ 3,8 · 10 ⁻³	- 4,5 · 10 ⁻³	+ 3,4 · 10 ⁻²
IIIb	1,96 kg	s	e	+ 0,3 · 10 ⁻³	- 2,1 · 10 ⁻³	- 5 · 10 ⁻⁵
		e	e	+ 3,9 · 10 ⁻³	- 2,9 · 10 ⁻³	+ 1 · 10 ⁻²
		e	s	+ 3,4 · 10 ⁻³	- 2,9 · 10 ⁻³	+ 1,1 · 10 ⁻²

Mit diesen Betrachtungen ist die Diskussion der angeführten Schwingungsversuche im wesentlichen abgeschlossen. Das Ergebnis ist kurz:

Bei Schwingungsversuchen mit Gummischneiden bzw. Gummiunterlagen ergab sich Verkürzung der Schwingungszeit gegen den starren Fall. Dieser Effekt ist nur durch die Annahme eines elastischen Störungsmomentes zu erklären und kann nicht durch andere Einflüsse gedeutet werden.

In diesem Abschnitt soll auf Versuche von Bessel hingewiesen werden, bei denen dieser den Einfluß von verschiedenem Unterlagsmaterial auf die Schwingungszeit eines Reversionspendels untersuchte. Bessel machte Versuche mit Achatebenen, Glasebenen und Glasröhren als Unterlagen, wobei jedoch nicht mit Sicherheit eine Einwirkung des Materials nachgewiesen werden konnte. Eine Änderung der Schwingungszeit ergab sich jedoch, als die Achatunterlage durch Messingplättchen ersetzt wurde. Hier ergab die Messingunterlage eine kleinere Schwingungszeit als die Achatunterlage. Von einer weiteren Versuchsfolge sagt Bessel, daß sie einen großen, mit dem Schwingungswinkel veränderlichen Einfluß des Materials zeigt. Die Versuchsergebnisse sind im großen und ganzen von derselben Art, wie sie sich bei unseren Versuchen mit Gummischneiden und Gummiunterlagen ergaben. Das Nähere findet man in den am Schluß der Arbeit angegebenen Abhandlungen von Bessel und Helmert. Es sei bemerkt, daß

wir auf Grund der hier gemachten und erklärten Messungen zu einem ähnlichen Ansatz wie Helmert kommen. Nur die Konstanten des Ansatzes müssen allgemeiner gehalten werden.

Zusammenfassung

Rechnung bei ideal elastischer Schneide und Unterlage. Es wurde die Schwingzeitfunktion $T(\varphi)$ eines Pendels mit ideal elastischer Schneide und Unterlage bis zum quadratischen Glied in φ ($\varphi =$ Amplitude), bei Berücksichtigung nur linearer elastischer Störungsglieder, berechnet. Bei der Rechnung wurde davon ausgegangen, das der Pendelkörper auf Grund der Elastizität der Teile durch die Zwangskräfte horizontale und vertikale Verschiebungen gegen die Lage bei starren Verhältnissen erfährt.

Die *Rechnung* hatte folgendes Ergebnis: 1. Die Elastizität der Schneide der Unterlage, oder der Schneide und Unterlage hat Verlängerung der Schwingungszeit gegen den starren Fall zur Folge. 2. Für elastische Verhältnisse wurde eine Restfunktion von der Form $\tau(\varphi) = A \cdot \varphi^2$ berechnet. A bedeutet eine Konstante, die durch die elastische Eigenschaft der Schneide und Unterlage bestimmt ist.

Versuche mit Gummischneiden und Gummiunterlagen. Für die Versuche wurde ein Pendel mit auswechselbarer Schneide und Unterlage benutzt. Als elastisches Material wurde Gummi, als starres Material Eisen verwendet.

Es wurden Versuche bei folgenden Schneidenformen angestellt:

Versuch I: Die Schneide bestand aus einer Kreiswalze von 1 cm Radius.

Versuch II: Die Schneide war keilförmig mit unten abgerundeter Spitze.
($r = 0.6$ cm.)

Versuch III: Die Schneide war keilförmig und unten spitz.

Versuch IV: Die Schneide war keilförmig mit unten abgeschnittener Spitze.
(Kantenwirkung.)

Für jede Schneidenform wurden Unterversuche bei folgender Schneiden- und Unterlagenanordnung durchgeführt:

1. Starre Schneide auf starrer Unterlage (Eisen auf Eisen).
2. Starre Schneide auf elastischer Unterlage (Eisen auf Gummi).
3. Elastische Schneide auf elastischer Unterlage (Gummi auf Gummi).
4. Elastische Schneide auf starrer Unterlage (Gummi auf Eisen).

Die Versuchsergebnisse. Die Versuchsergebnisse stimmen in keiner Weise mit den angeführten Rechenergebnissen überein. Es zeigte sich folgendes:

1. Die Elastizität der Schneide oder Unterlage, oder der Schneide und Unterlage hatte eine *Verkürzung* der Schwingungszeit gegen den starren Fall zur Folge (ausgenommen Versuch IV, keilförmige Schneide mit unten abgeschnittener Spitze). Die Verkürzung war um so größer, je kleiner die Amplitude gewählt wurde.

2. Die ermittelten Restfunktionen $\tau(\varphi)$ hatten keinen quadratischen Charakter, sie konnten durch die Formel $\tau(\varphi) = A_1 \varphi - A_2 \varphi^2$ angenähert werden. $A_1, A_2 = \text{Konstante}$.

3. Im allgemeinen sind die T_0 -Verkürzungen ($T_0 = \text{Schwingungszeit für unendlich kleine Winkel}$) bei den elastischen Fällen für alle Schneidenformen von derselben Größenordnung. Die Werte für die Restfunktionen sind bei den einzelnen Versuchen sehr verschieden, sie sind für die spitze Schneide eine Zehnerpotenz kleiner als bei den anderen Schneidenformen.

Folgerung aus den Versuchsergebnissen. Aus den Versuchsergebnissen muß gefolgert werden, daß die bei der Rechnung angenommene Wirkungsweise der elastischen Teile bei weitem übertroffen wurde durch solche Verzerrungen der Schneide und Unterlage, die ein zusätzliches Rückführmoment zur Folge hatten.

Als Ursache des Störungsmomentes wurde festgestellt:

1. Die Ausbildung einer Berührungsfläche zwischen Schneide und Unterlage.
2. Unsymmetrische Spannungsverteilung in den beiden Schneidenhälften.
3. Wangenwirkung der einen Schneidenseite. (Als Auswirkung von 1 und 2.)

Die bei den Versuchen gemessenen Abweichungen konnten erklärt werden durch ein Störungsmoment von der Form:

$$M = - (k_1 \alpha + k_2 \alpha^2 + k_3 \alpha^3)$$

(im ersten Quadranten). α jeweiliger Ausschlagswinkel, $k_1, k_2, k_3 = \text{Konstanten}$ ($k_1 = \text{positiv}, k_3 = \text{positiv}, k_2 = \text{negativ}$). k_1 ergab sich bei allen Messungen von derselben Größenordnung, k_2 und k_3 zeigten starke Abhängigkeit von der Schneidenform. k_1, k_2 und k_3 waren nicht proportional veränderlich mit dem Pendelgewicht.

Diese Arbeit wurde im Institut für angewandte Mechanik in Göttingen auf Anregung von Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Schuler durchgeführt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Schuler, danke ich an dieser Stelle für wertvolle Anregungen und für die steten Förderungen, die er den Untersuchungen hat zuteil werden lassen.

Ferner danke ich Herrn Dr. Stellmacher für gute Ratschläge und für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat. Auch dem Mechanikermeister des Instituts, Herrn K. Hoffmann, bin ich für die gute Ausführung der Apparate sowie für seine dauernde Hilfe bei der Durchführung der Versuche zu Dank verpflichtet.

Literatur

- [1] H. Gebelein: Das abrollende physikalische Pendel. Ingenieur-Archiv 1935.
- [2] F. W. Bessel: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandlungen der „Akademie der Wissenschaften“ zu Berlin 1826.
- [3] F. R. Helmert: Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Veröffentlichung des Kgl. Pr. Geodätischen Instituts zu Potsdam 1898.