[6] B. Gutenberg: On microseisms. Bull. Seism. Soc. Am. **26**, 111—117 (1936).

[7] L. Don Leet: Analysis of New England microseisms. Gerl. Beitr. z. Geophys. **42**, 232—245 (1934).

[8] R. Bungers: Theorie der Schwebungen. Zeitschr. f. Geophys. **12**, 229—245 (1936).

[9] A. W. Lee: Further investigations of the effect of geological structure ... M. N. R. A. S. Geophys. Suppl. **3**, 238—252 (1934).

[10] J. Lacoste: A propos de traveaux récents sur les ondes microséismiques. Ann. Phys. Globe France **4**, 5—10 (1937).

[11] R. Schwinner: Mikroseismische Bodenunruhe und Gebirgsbau. Zeitschr. f. Geophys. **9**, 332—335 (1933).

Göttingen, Geophysikalisches Institut, April 1941.

Das Gleichgewicht der Kräfte im Innern des Erdkerns und die sich daraus ergebenden Folgerungen

Von **H. Haalck***), Potsdam. — (Mit 3 Abbildungen)

Ausgehend von der Vorstellung, daß die Materie im Erdkern im wesentlichen aus freien ionisierten Eisenatomen besteht, welche schnelle thermisch-kinetische Bewegungen ausführen, dabei aber doch so stark komprimiert sind, daß sie einen wesentlich kleineren Raum einnehmen als im Normalzustand des Eisens, wird das Gleichgewicht der auf die einzelnen Atome und freien Elektronen wirkenden Kräfte (die Schwerkraft, die einfachen elektrostatischen Kräfte und die in der Nahzone der Atome wirkenden Abstoßungskräfte) untersucht. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich 1. der Modul der Kompressibilität im Innern des Erdkerns als Funktion des Druckes, 2. eine im wesentlichen gleichmäßige positive Raumladung des Erdkerns. Die auf diese Weise gefundene Volumenelastizität innerhalb des Erdkerns stimmt mit den seismophysikalisch gefundenen Werten recht gut überein. Die positive Ladung des Erdkerns muß, da der Erdkörper als Ganzes elektrisch neutral ist, durch eine gleich große negative Ladung der äußeren Schichten des Erdkörpers kompensiert werden. Infolge dieser Ladungstrennung im Erdinnern entstehen durch die Rotation der Erde Konvektionsströme, deren Folge ein magnetisches Feld ist, welches der Größenordnung nach dem rotationssymmetrischen Teil des beobachteten erdmagnetischen Feldes entspricht. Ebenso ergibt die Anwendung der Theorie auf die Sonne ein sonnenmagnetisches Feld, welches mit dem durch die Beobachtungen von Hale gefundenen Feld in Größe und Richtung übereinstimmt. — Diese vom Verf. bereits in einigen früheren Arbeiten vertretene Theorie ist — nach Beseitigung der anfänglichen Mängel und Schwächen — zu der in der vorliegenden Abhandlung dargestellten Form ausgebaut worden. (Die vorhergehenden diesbezüglichen Arbeiten sind daher als überholt anzusehen.) Um eine kritische Nachprüfung zu erleichtern, sind die Formeln und Berechnungen in vollständiger Ableitung angegeben.

1. Der physikalische Zustand der Materie im Erdkern. Unsere Vorstellung von dem physikalischen Zustand der Materie im Erdkern geht dahin, daß dort eine *Temperatur* in der Größenordnung von 2000 (bis 8000)^0 C herrscht und daß

*) Potsdam, Telegraphenberg, Geodät. Inst.

die *Dichte* von etwa 9—11.5 an der Grenzfläche bis zu 11—14.5 im Erdmittelpunkt ansteigt. Der *Druck* nimmt von rund 1.5 Mill. Atm. an der Grenzfläche bis zu etwa 3.2—4.5 Mill. Atm. im Mittelpunkt zu, während die *Schwerebeschleunigung* in diesem Bereich von über 1000 CGS-Einh. nahezu gleichmäßig bis zu Null abnimmt. Die Materie im Erdkern ist an der Grenzfläche etwa 4- bis 7mal, im Erdmittelpunkt etwa 6- bis 11mal so *inkompressibel wie Stahl.* Als *Material* des Erdkerns müssen wir im wesentlichen *metallisches Eisen* mit einer Beimengung von einigen Prozent Nickel (bzw. Kobalt u. dgl.) annehmen. Unter der Wirkung der hohen Temperaturen und Drucke ist die Bildung chemischer Verbindungen nicht mehr möglich, d. h. die Materie ist im Erdkern *einatomig* (erst außerhalb der Grenzfläche geht sie in den mehrfachatomigen bzw. molekularen und schließlich mehrfachmolekularen Zustand über). Die leichte Verschiebbarkeit der Atome gegeneinander hat zur Folge, daß die Materie im Erdkern sich den elastischen Erdbebenwellen gegenüber *wie eine Flüssigkeit* verhält; d. h. sie ist undurchlässig (oder nahezu undurchlässig) für Transversalwellen. Die Atome müssen ferner als *ionisiert* angenommen werden, da — veranlaßt durch die Nahwirkung und die heftigen Zusammenstöße der Atome — die Valenzelektronen leicht abgespaltet werden.

Kurz zusammengefaßt können wir also annehmen, daß die Materie im Erdkern im wesentlichen aus positiv geladenen freien Eisenatomen und freien Elektronen besteht, welche sehr starke thermisch-kinetische Bewegungen ausführen, dabei aber doch so stark komprimiert sind, daß sie einen beträchtlich kleineren Raum einnehmen als in dem unter gewöhnlichen Umständen festen Eisenmetall.

Ausgehend von dieser Vorstellung soll im folgenden das Gleichgewicht der Kräfte im Erdkern untersucht und daraus die für die Geophysik des festen Erdinnern wichtigen Folgerungen abgeleitet werden.

2. Die auf die Elemente der Kernmaterie wirkenden Kräfte. Denken wir uns die Gesamtheit der Atome eines Massenelements gleichmäßig verteilt, so ist ihr *mittlerer* Abstand eine Funktion von Druck und Temperatur. Bezeichnen wir ihre Anzahl in der Volumeneinheit mit N, den mittleren Abstand mit s, so gilt:

$$N s^3 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zu dem Atomgewicht A, der Dichte σ und der Loschmidtschen Zahl L steht N in der Beziehung:

$$N = L \frac{\sigma}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wird das Volumen v des Massenelements bei gleichbleibender Temperatur komprimiert, so besteht zwischen der Volumenänderung dv, der Dichteänderung $d\sigma$, der Änderung ds des mittleren Atomabstandes, dem Kompressibilitätsfaktor k und der Druckänderung dp die Beziehung:

$$\frac{dp}{k} = -\frac{dv}{v} = \frac{d\sigma}{\sigma} = -3\frac{ds}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Zwischen den positiv geladenen Atomen und den freien Elektronen wirken folgende Kräfte:

1. Die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz wirkende allgemeine Massenanziehung.

2. Die nach dem Coulombschen Gesetz wirkenden elektrostatischen Kräfte, wenn man die Ladungen der einzelnen Atome und freien Elektronen als in ihrem Mittelpunkt vereinigte Punktladungen auffaßt.

3. Die zusätzlich dazu in der Nahzone — d. h. wenn es sich um Abstände bis zu der Größenordnung von 10^{-8} cm handelt — auftretenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte.

Die letzteren, welche in der Atomtheorie eine wichtige Rolle spielen, bedürfen einer kurzen Erklärung: Es sind dies die Kräfte, welche einmal das vollständige Zusammenstürzen zweier verschieden geladener Atome verhindern und Ursache des elastischen Verhaltens einer festen Masse bei der Kompression sind, andererseits auch die chemische Bindung der Atome zu Molekülen bewirken. Nach den Begriffen und Anschauungen der klassischen Physik sind sie nicht zu verstehen, doch kann man sich auf Grund des *wellenmechanischen Atommodells* eine Vorstellung davon machen (siehe Fig. 1):

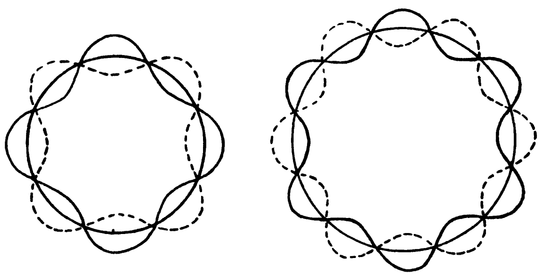

Fig. 1. Abstoßende Kraft in der Nahzone zwischen zwei Elektronenhüllen nach dem wellenmechanischen Atommodell

Die Elektronenschalen werden danach aufgefaßt als räumliche (kugelsymmetrische) stehende Wellen von bestimmten, die Quantenbedingungen erfüllenden Wellenlängen. Dabei hat man sich die Welle als über den ganzen Raum sich ausbreitend zu denken, wobei ihre Stärke nach außen sehr schnell abfällt (d. h. die Elektronen bilden eine Ladungs*wolke*). Ebenso haben wir uns das freie Elektron nicht als Korpuskel, sondern als Wellenpaket bzw. als konzentrierte Ladungswolke vorzustellen. Nach dieser wellenmechanischen Vorstellung wird die abstoßende Kraft in der Nahzone der Atome verständlich*).

*) Ebenso kann man sich vorstellen, daß bei bestimmten symmetrischen Schwingungsvorgängen ein Bindung von Atomen zu Molekülen eintreten kann. Die neue quantenmechanische Behandlung dieser Fragen begann mit den Arbeiten von Heitler und London 1927 (Zeitschr. f. Phys. **44**, 455, 1927), welche, ausgehend von der Schrödingerschen Wellengleichung, die Wirkung zweier Wasserstoffatome aufeinander untersuchten: Bei Annäherung der beiden Atome entstehen durch Überlagerung der Wellen symmetrische und antisymmetrische Wellen. Im antisymmetrischen Falle läßt sich eine Annäherung der beiden Atome nur durch immer größeren Energieaufwand

Rein phänomenologisch setzt man nach Born für das Potential Φ der abstoßenden Kraft in der Nahzone der Atome die Formel an:

$$\Phi = \frac{b}{r^n} \qquad (4)$$

in welcher die Konstante b und der Exponent n von der Natur des Stoffes abhängig sind *).

Der *Abstoßungsexponent* n ist empirisch bestimmt worden: Die von verschiedenen Autoren (Born, Landé, Fajans und Herzfeld, Smekal, Rella u. a.) an Kristallgittern ausgeführten Berechnungen aus der Kompressibilität und dem Gitterabstand haben für n Werte ergeben, welche meistens in der Größenordnung von $n = 9$ liegen. Dieser Wert, den Born als den durchschnittlichen Wert ansieht, werde auch den folgenden numerischen Berechnungen zugrunde gelegt. Die *Abstoßungskonstante* b der Formel (4) ist nicht allgemein bekannt; es scheint aber, daß sie im wesentlichen von den *äußeren* Elektronenschalen, nicht von den inneren Elektronen bzw. dem Atomkern, abhängt, was nach dem wellenmechanischen Atommodell sehr verständlich wird: Denkt man sich die Durchmesser der beiden Elektronenschalen in Fig. 1 sich ändernd bei gleichbleibendem Abstand ihrer Mittelpunkte, so ist es nach der wellenmechanischen Vorstellung ihres Wesens augenscheinlich, daß die abstoßende Kraft mit der Größe des Durchmessers der Elektronenhüllen zunimmt. Machen wir daher den mathematischen Ansatz:

$$b = f \cdot \varrho \cdot \varrho_1,$$

worin f einen Proportionalitätsfaktor, ϱ und ϱ_1 die Radien der beiden Elektronenschalen bedeuten, so kommt darin in erster Annäherung die Eigenschaft der Abstoßungskonstanten zum Ausdruck, welche der Anschaulichkeit des wellenmechanischen Atommodells entspricht. Handelt es sich im besonderen um die abstoßende Kraft zwischen einem Atom und einem freien Elektron, so ist für ϱ_1 der Radius des Elektrons zu setzen.

---

erzwingen; im symmetrischen Falle dagegen nähern sie sich ohne äußeren Energieaufwand bis auf einen bestimmten Abstand und bleiben in ihm, wenn sie nicht von außen gestört werden, d. h. es ist chemische Bindung der beiden Atome zu einem Molekül eingetreten. Die Energie, die man zur Trennung des Moleküls aufwenden muß, wurde in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnet. — Im Mittel erhalten wir in jedem Falle in der Nahzone der Atome und Elektronen eine abstoßende Kraft.

*) Der Ansatz kann natürlich nur in erster Näherung gelten, denn strenggenommen müßten die Abstoßungskräfte exponentiell mit der Entfernung abnehmen.

Literatur über die Abstoßungskräfte: Handbuch der Physik von Geiger und Scheel: Bd. X, Abschnitt von Grüneisen, S. 9 ff.; Bd. XXII, 1. Aufl. Abschnitt von K. F. Herzfeld, S. 453 ff.; Bd. XXIV, 1. Aufl., Abschnitt von M. Born und O. F. Bollnow, S. 420 ff.; M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, Leipzig 1923.

Die abstoßende Kraft zwischen zwei benachbarten Atomen bzw. Elektronen der Masse ist nach Gleichung (4), indem wir jetzt für b den obigen Ausdruck einsetzen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = K = -f\frac{n \cdot \varrho \cdot \varrho_1}{r^{n+1}}.$$

Es ist aber bei der Materie im Erdkern noch der *Einfluß der Temperatur* zu berücksichtigen: Die thermisch-kinetischen Bewegungen der Atome und Elektronen haben Zusammenstöße zur Folge, die so heftig sind, daß sie nicht mehr elastisch vor sich gehen, sondern daß dabei inneratomare Energieumsätze stattfinden; d. h. die Elektronen gehen von einem Atom zum anderen über. Wir können aber annehmen, daß die innere Energie eines Atoms bei den Zusammenstößen ebenso häufig zu- als abnimmt und im Mittel gleich bleibt, so daß von diesen Energieumsätzen abgesehen werden kann. Würden sich alle Teilchen in Ruhe befinden und sich gleichmäßig anordnen (also bei der absoluten Temperatur Null), so wäre für r der mittlere Abstand s der Atome einzusetzen. Infolge ihrer Wärmebewegungen ist aber die abstoßende Kraft zwischen zwei benachbarten Atomen im Mittel nicht gleich dem Ausdruck $f\frac{n \cdot \varrho \cdot \varrho_1}{s^{n+1}}$, sondern der Mittelwert ist wegen der Größe des Exponenten n größer, und zwar um so mehr, je größer die thermisch-kinetische Bewegung, also die absolute Temperatur ist. Setzen wir $r = s\,(1 - t)$, so bedeutet t einen sehr kleinen Zahlenfaktor, der um so größer ist, je größer die absolute Temperatur T ist und für $T = 0$ ebenfalls den Wert Null hat. Für die *mittlere* — d. h. zeitlich und mengenmäßig über alle Atome gemittelt — *abstoßende Kraft zwischen zwei benachbarten Atomen* ist also zu setzen:

$$K = -f\frac{n \cdot \varrho \cdot \varrho_1}{s^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

3. Die Bedingung des Gleichgewichts der auf die freien Atome und Elektronen im Erdkern wirkenden Kräfte. Die Niveauflächen im Innern des Erdkerns sind — mit der für die vorliegende Aufgabe genügenden Annäherung — konzentrische Kugelflächen. Die Resultierende der auf ein Atom wirkenden Kräfte ist stets normal zu den Niveauflächen, also radial gerichtet. Da der Druck p vom Erdmittelpunkt in radialer Richtung abnimmt, so nimmt nach Gleichung (3) die Dichte ebenfalls ab, der mittlere Abstand der Atome — genauer gesagt: der Atomrümpfe — entsprechend zu. Wir betrachten drei im Abstande des Atomgitters aufeinander folgende Niveauflächen F', F und F'' (Fig. 2a bzw. 2b):

In der Niveaufläche F sei der mittlere Atomabstand gleich s, in der auf der inneren Seite benachbarten Fläche F' gleich $s - ds$ und in der auf der äußeren Seite benachbarten Fläche F'' gleich $s + ds$. Die Abstände der Niveauflächen F' bzw. F'' von der mittleren Fläche F sind dann etwa $s - \frac{ds}{2}$ bzw. $s + \frac{ds}{2}$.

Auf ein in der mittleren Niveaufläche F befindliches Atom J wirken folgende Kräfte:

1. Die Schwerkraft $\frac{A}{L}\,g$ in Richtung zum Erdmittelpunkt (worin $\frac{A}{L}$ die Masse des Atoms, g die Schwerebeschleunigung bedeuten).

2. Die **Coulombsche** Kraft $de\mathfrak{E}$ in Richtung zum Erdmittelpunkt, worin d den Überschuß an positiven Ladungseinheiten des Atoms, $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke bedeutet. (Diese Kraft ist die Resultierende aus der Gesamtheit der nach dem **Coulombschen** Gesetz wirkenden elektrostatischen Anziehungs- und Abstoßungskräfte der in den Mittelpunkten der Atome bzw. der freien Elektronen vereinigt gedachten Ladungen.)

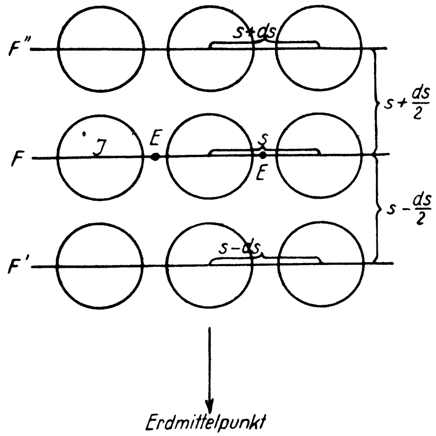

Fig. 2a

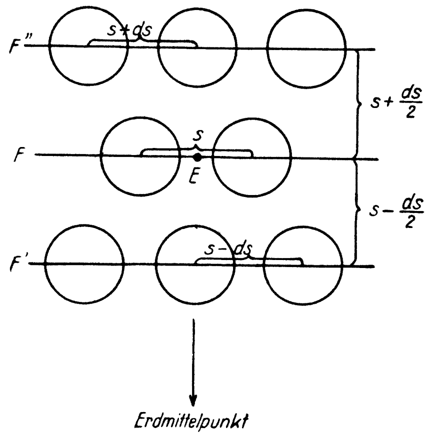

Fig. 2b

Einfache, durchschnittliche Formen des Atomgitters

3. Die Abstoßungskraft, welche von dem in radialer Richtung auf der *Außenseite* befindlichen, benachbarten Atom herrührt, in Richtung nach dem Erdmittelpunkt; nach Gleichung (5) erhalten wir dafür, wenn wir ein Atomgitter wie in Fig. 2a annehmen, den Ausdruck:

$$\frac{f\,n\,\varrho^2}{\left(s+\frac{ds}{2}\right)^{n+1}(1-t)^{n+1}} = \frac{f\,n\,\varrho^2}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}}\left[1-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{ds}{s}\right].$$

4. Die Abstoßungskraft, welche von dem in radialer Richtung auf der *Innenseite* befindlichen, benachbarten Atom herrührt, in Richtung vom Erdmittelpunkt fort gerichtet; Gleichung (5) liefert dafür den Ausdruck:

$$\frac{f\,n\,\varrho^2}{\left(s-\frac{ds}{2}\right)^{n+1}.(1-t)^{n+1}} = \frac{f\,n\,\varrho^2}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{ds}{s}\right].$$

(Bei den letzten beiden Abstoßungskräften sind dazu noch die in die Lotrichtung fallende Komponente der von dem Abstoßungspotential der nicht unmittelbar angrenzenden Atome herrührenden Kräfte zu berücksichtigen; diese sind aber wegen der größeren Abstände und der Größe des Abstoßungsexponenten n relativ zu dem ersten Glied sehr klein. Nehmen wir ein anderes Atomgitter — etwa ein räumlich auf Lücke stehendes Gitter, wie es Fig. 2b zeigt — an, so erhalten wir, wie eine einfache geometrische Überlegung erkennen läßt, als Resultierende der Abstoßungskräfte einen Wert, der nicht wesentlich von dem obigen Ausdruck verschieden ist. Die unter 3 und 4 angegebenen Ausdrücke für die abstoßenden Kräfte können daher — unabhängig von der Form des Atomgitters — als hinreichend genau angesehen werden.)

Das Atom I befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Bedingung besteht:

$$\begin{aligned} &\frac{A}{L} g + d \cdot e \cdot \mathfrak{E} + \frac{f n \varrho^2}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \left\{1 - \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s} - \left(1 + \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s}\right)\right\} = 0, \\ &\frac{A}{L} g + d \cdot e \cdot \mathfrak{E} - \frac{f n (n+1) \varrho^2}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \cdot \frac{ds}{s} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

In der gleichen Weise stellen wir die *Gleichgewichtsbedingung* auf *für* die auf *ein freies Elektron* wirkenden Kräfte. Von den Elektronen, welche sich in den einzelnen Zwischenräumen verteilen, betrachten wir ein Elektron E, welches eine mittlere Lage in der Niveaufläche F (Fig. 2b) einnimmt. Auf dieses wirken folgende Kräfte:

1. Die Schwerkraft μg in Richtung zum Erdmittelpunkt, wobei μ die Masse des Elektrons bedeutet,

2. die Coulombsche Kraft $e\,\mathfrak{E}$ vom Erdmittelpunkt fort gerichtet,

3. die Abstoßungskraft, welche von den auf der *Außenseite* befindlichen, benachbarten Atomen herrührt, zum Erdmittelpunkt hin gerichtet; Gleichung (5) liefert dafür den Ausdruck:

$$\frac{f n \varrho_1 \varrho}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \left[1 - \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s}\right].$$

4. die Abstoßungskraft, welche von den auf der *Innenseite* befindlichen, benachbarten Atomen herrührt, vom Erdmittelpunkt fort gerichtet; für diese erhalten wir nach Gleichung (5) den Ausdruck:

$$\frac{f n \varrho \varrho_1}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s}\right].$$

Als Gleichgewichtsbedingung für das freie Elektron ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} &\mu \cdot g - e\,\mathfrak{E} + \frac{f n \varrho \varrho_1}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \left[1 - \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s} - \left(1 + \frac{n+1}{2} \frac{ds}{s}\right)\right] = 0, \\ &\mu g - e\,\mathfrak{E} - \frac{f n (n+1) \varrho \varrho_1}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}} \frac{ds}{s} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch die Elimination des Ausdrucks $\frac{f\,n\,(n+1)}{s^{n+1}(1-t)^{n+1}}\cdot\frac{d\,s}{s}$ aus (6) und (7) erhalten wir für die Feldstärke im Innern des Erdkerns:

$$\mathfrak{E} = -\frac{g}{e}\cdot\frac{\frac{A}{L}\varrho_1 - \mu\cdot\varrho}{d\cdot\varrho_1+\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

4. Die Anwendung der Theorie. Es sollen jetzt die Folgerungen, welche sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die im Innern des Erdkerns wirkenden Kräfte ergeben, verglichen werden mit den entsprechenden Beobachtungserscheinungen und Forschungsergebnissen, zu welchen die Geophysik auf anderen Wegen gelangt ist.

a) Die Volumenelastizität im Innern des Erdkerns. Dem Druck p, den die auf einer Niveaufläche im Innern des Erdkerns lastenden Massen ausüben, wird das Gleichgewicht gehalten von der Abstoßungskraft der in dieser Niveaufläche befindlichen Atome. Die Zahl der Atome in der Flächeneinheit der Niveaufläche ist $1/s^2$. Es ist also nach Gleichung (5):

$$p = K\frac{1}{s^2} = f\frac{n\,\varrho^2}{s^{n+3}(1-t)^{n+1}}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$d\,p = -(n+3)\frac{f\,n\,\varrho^2}{s^{n+4}(1-t)^{n+1}}\,d\,s = -(n+3)\,p\,\frac{d\,s}{s}.$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (3):

$$k = \frac{n+3}{3}\,p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Damit haben wir eine einfache Beziehung zwischen dem Kompressibilitätsfaktor k, dem Abstoßungsexponenten n und dem Druck p, welche (bis auf Glieder von kleinerer Größenordnung) unabhängig von der Temperatur für ein stark komprimiertes einatomiges Gas gilt. Der Druckverlauf im Innern des Erdkerns hängt von der gesamten Dichteverteilung im Erdinnern ab. Mit den Werten, welche man erhält, wenn man die Berechnung von p für zwei Dichtegesetze durchführt, welche man als Grenzfälle A und B betrachten kann, innerhalb welcher — wahrscheinlich näher dem Grenzfall B — die wirkliche Dichteverteilung im Innern der Erde liegen muß*) und der Größe des Abstoßungsexponenten $n = 9$ (vgl. S. 138) ergibt sich nach Gleichung (9) eine Verteilung des Kompressibilitätsfaktors k im Innern des Erdkerns, wie sie in Fig. 3 punktiert für die beiden Fälle eingetragen ist. Zum Vergleich ist die Verteilung des Kompressibilitätsfaktors k,

*) H. Haalck: Eine Neuberechnung der Dichteverteilung und der damit zusammenhängenden physikalischen Größen im Erdinnern. Zeitschr. f. Geophys. **17**, 1—17, 1941.

wie sie sich nach den Ergebnissen der Erdbebenforschung in Verbindung mit dem gleichen Dichtegesetz ergibt, angegeben. Die Übereinstimmung der beiden auf völlig verschiedenen Wegen gefundenen Ergebnisse ist offenkundig. (Die auf Grund seismischer Beobachtungsergebnisse angenommene Unstetigkeit in etwa 5000 km Tiefe kann noch nicht als gesichert angesehen werden.)

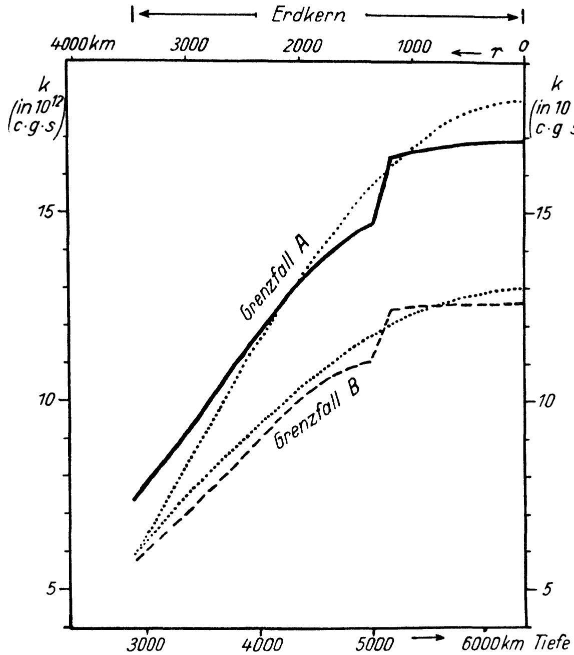

Fig. 3. Der Modul k der Volumenelastizität im Erdkern als Funktion der Tiefe berechnet für die Grenzfälle A und B des Dichtegesetzes [punktierte Kurven berechnet nach Formel (9), ausgezogene bzw. gestrichelte Kurve aus seismischen Größen]

b) Das primäre magnetische Feld des Erdkörpers. Aus der Feldstärke $\mathfrak{E}$, welche sich nach Gleichung (8) aus der Gleichgewichtsbedingung der im Innern des Erdkerns herrschenden Kräfte ergibt, läßt sich die *Ladungsverteilung innerhalb des festen Erdkörpers* berechnen:

An numerischen Werten haben wir in Gleichung (8) einzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} e &= 1.592 \cdot 10^{-20} \text{ el. magn.} &&= \text{Ladung} \\ \mu &= 9.02 \cdot 10^{-28} &&= \text{Masse} \\ \varrho_1 &= 2.82 \cdot 10^{-13} &&= \text{Radius} \end{aligned}\right\} \text{ des Elektrons,}$$

$L = 6.06 \cdot 10^{23}$ = Loschmidtsche Zahl,

$A = 55.84$ = Atomgewicht des Eisens,

$\varrho = 1.24—1.4 \cdot 10^{-8}$ = Radius des Eisenatoms.

Was den Grad der Ionisierung anbelangt, so können wir wohl annehmen, daß — immer im Mittel gerechnet — jedes Atom höchstens einige Elektronen verloren hat. Daraus folgt, daß das Glied $d \cdot \varrho_1$ im Nenner der Gleichung (8) zu vernachlässigen ist. — Nehmen wir den Erdkern als homogen von der Dichte $\sigma = 11$ an — eine Annäherung, welche für den vorliegenden Zweck vollkommen genügt —, so ist

$$g = \varkappa \tfrac{4}{3} r \sigma \pi,$$

worin $\varkappa$ $(= 6{,}65 \cdot 10^{-8})$ die Gravitationskonstante bedeutet. Der Ausdruck für die Feldstärke $\mathfrak{E}$ wird damit:

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\pi\varkappa\sigma}{3e}\left(\frac{A}{L}\cdot\frac{\varrho_1}{\varrho} - \mu\right) r \quad \text{. . . . . (10)}$$

Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ steigt also mit dem Abstande r vom Erdmittelpunkt vom Wert 0 *linear an bis zum Maximum an der Grenze des Erdkerns:*

$$\mathfrak{E}_{max} = -\frac{4\pi\varkappa\sigma}{3e}\left(\frac{A}{L}\,\frac{\varrho_1}{\varrho} - \mu\right) R_1,$$

worin R_1 $(= 3.47 \cdot 10^8\,\mathrm{cm})$ den Radius des Erdkerns bedeutet. In Zahlenwerten:

$$\mathfrak{E}_{max} = -\,7.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{CGS} = -\,6.4 \cdot 10^8\,\mathrm{Volt/cm}.$$

(Das sind für unsere Begriffe ganz außerordentlich hohe elektrische Feldstärken, welche aber innerhalb kosmischer Massen durchaus physikalisch denkbar sind.)

Die *Raumladungsdichte* α als Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt findet man aus der Feldstärke $\mathfrak{E}$. Im Abstande r vom Erdmittelpunkt ist:

$$\mathfrak{E} = -\int_0^r \frac{4x^2\pi}{r^2}\,\alpha\,dx = -\frac{4\varkappa\pi\sigma}{3e}\left(\frac{A}{L}\,\frac{\varrho_1}{\varrho} - \mu\right) r.$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{\varkappa\sigma}{e}\left(\frac{A}{L}\cdot\frac{\varrho_1}{\varrho} - \mu\right) = 4.9 \cdot 10^{-14}\ \text{el. magn. CGS} \quad \text{. . . . . (11)}$$

Der Erdkern besitzt also eine im wesentlichen gleichmäßige positive Raumladung von der Dichte $\alpha = 4.9 \cdot 10^{-14}$ el. magn. CGS-Einh.

Die abgeleiteten Beziehungen gelten nur unter der Voraussetzung des einatomigen Zustandes der Materie, also im Erdkern. Außerhalb des Kerns ist die Substanz eine andere und die Materie geht in den molekularen und kristallinen Zustand über, so daß die aufgestellten Gleichungen hier nicht mehr ohne weiteres anzuwenden sind. (Es wären hier die innermolekularen und die zwischenmolekularen Kräfte zu berücksichtigen.) Da der feste Erdkörper als Ganzes nach außen hin elektrisch neutral ist*), so muß die *positive* Ladung des tiefen Erd-

*) Die durch luftelektrische Messungen festgestellte Tatsache, daß der feste Erdkörper eine schwache negative Oberflächenladung, die Lufthülle eine positive Raumladung besitzt, ist als unwesentlich zu vernachlässigen.

innern durch eine gleich große *negative* Ladung der äußeren Teile des Erdkörpers kompensiert werden. Nehmen wir in erster Näherung eine gleichmäßige Raumladung der Mantelschicht von der Dichte β an*), so ist die Bedingung für die Kompensation:

$$\tfrac{4}{3}\,\pi\,\alpha\,R_1^3 = -\,\tfrac{4}{3}\,\pi\,\beta\,(R^3 - R_1^3);$$

daraus folgt:

$$\beta = -\,\alpha\,\frac{R_1^3}{R^3 - R_1^3} = -\,0.95 \cdot 10^{-14} \text{ el. magn. CGS-Einh.} \quad \ldots \quad (12)$$

Eine Elektrizitätsmenge E, welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstande x von der Rotationsachse rotiert, erzeugt das magnetische Moment:

$$E\,\omega\,\frac{x^2}{2}\,.$$

Daraus erhalten wir als magnetisches Moment einer rotierenden Kugel vom Radius R und der gleichmäßigen Ladungsdichte α:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\,\alpha}{2}\, r^4 \cos^3\varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr = \tfrac{4}{15}\,\pi\,\omega\,\alpha\,R^5.$$

Angewandt auf die Erdkugel mit der positiven Ladungsdichte α des Kerns und der negativen Ladungsdichte β des Mantels erhalten wir als magnetisches Moment $\mathfrak{M}$ der rotierenden Erde:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{15}\,\pi\,\omega\,\{\alpha\,R_1^5 + \beta\,(R^5 - R_1^5)\}.$$

Setzen wir — außer den bereits angegebenen — an Zahlenwerten ein:

$$\omega = 7.25 \cdot 10^{-5},$$
$$R = 6.37 \cdot 10^{8} \text{ cm},$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = -\,4.2 \cdot 10^{25} \text{ CGS-Einh.}$$

Die mathematische Analyse des ausgemessenen erdmagnetischen Feldes hat für das Moment des rotationssymmetrischen Teiles — der in erster Näherung mit dem Primärfeld identifiziert werden kann — den Wert

$$\mathfrak{M} = -\,8 \cdot 10^{25} \text{ CGS-Einh.}$$

ergeben. Theorie und Beobachtung stimmen also auch hier der Größenordnung nach überein. Genauere Übereinstimmungen sind in keinem Falle zu erwarten, da wir es immer nur mit ersten Annäherungen zu tun haben.

c) Das magnetische Feld der Sonne. Die Beobachtungen des Zeeman-Effektes an der Sonne von Hale haben ergeben, daß die Sonne ein magnetisches Feld besitzt,

*) Die Annahme anderer (ungleichmäßiger) Ladungsverteilungen ändert das Ergebnis nicht wesentlich.

welches ebenso wie dasjenige der Erde im wesentlichen rotationssymmetrisch ist und den gleichen Richtungssinn hat. Dieses sonnenmagnetische Feld spielt — wegen der Parallelität der Erscheinungen — eine große Rolle bei den Erklärungsversuchen der Ursache des erdmagnetischen Feldes, und es liegt nahe, die in der vorliegenden Arbeit abgeleiteten theoretischen Beziehungen auch auf die Sonne anzuwenden.

Da die Dichteverteilung im Innern der Sonne nicht bekannt ist, müssen wir uns damit begnügen, die Sonne in erster Näherung als homogen zu betrachten, und für den Abstand R_1 der Trennungsfläche zwischen der positiven und der nagetiven Raumladung vom Sonnenmittelpunkt können wir, da wegen der bedeutend höheren Temperaturen und Drucke im Sonneninnern die gesamte Sonnenmaterie als monatomig anzunehmen ist, einen Wert ansetzen, der nur wenig kleiner als R ist, was praktisch eine positive Raumladung des Sonneninnern und eine gleichgroße negative Oberflächenladung bedeuten würde*). Für diesen Fall ergibt sich nach Gleichung (12) und (13) für das Moment des sonnenmagnetischen Feldes:

$$\mathfrak{M} \cong -\tfrac{8}{45}\,\pi\,\omega\,\alpha\,R^5.$$

Eine genaue Kenntnis des Wertes von R_1 ist also gar nicht erforderlich. — Setzen wir die für die Sonne geltenden Zahlenwerte:

$$\omega = 2.27 \cdot 10^{-6},$$
$$R = 6.95 \cdot 10^{10},$$
$$\sigma = 1.43$$

ein, so erhalten wir nach Gleichung (11) für die positive Raumladungsdichte α im Sonneninnern:

$$\alpha = 0.64 \cdot 10^{-14} \text{ el. magn. CGS}$$

und für das magnetische Moment der Sonne:

$$\mathfrak{M} = -13 \cdot 10^{33}.$$

Der Vergleich mit dem *nach den Messungen von Hale* sich ergebenden Wert:

$$\mathfrak{M} = -8.34 \cdot 10^{33}$$

zeigt, daß auch in diesem Falle Theorie und Beobachtung gut übereinstimmen**).

*) Auf die Möglichkeit der Zurückführung des Sonnenmagnetismus auf eine positive Raumladung und eine gleich große negative Oberflächenladung hat früher schon G. Angenheister — ohne auf die Frage der Ursache der Ladungstrennung einzugehen — hingewiesen (Göttinger Nachrichten 1924; Handbuch der Physik, Bd. XV, S. 298, 1927).

**) Die starke Ionisation der Materie in der Sonne und Anhäufung der Elektronen in den Oberflächenschichten läßt vermuten, daß darin auch die Ursache der starken magnetischen Felder zu suchen ist, welche bei den in den Sonnenflecken in Erscheinung tretenden gewaltigen Massenbewegungen in diesen Oberflächenschichten beobachtet werden können.