Wesentlich wichtiger sind die beschriebenen Schwingschaltungen für die Widerstandsverfahren. Da bei der Vierpunktsmethode keine großen Ausgangsleistungen erforderlich sind, genügt als Ausgangsverstärker ein einziges kräftiges Rohr. Die große Bedeutung der unter dem Hörbarkeitsbereich liegenden Stromfrequenzen für die Erzielung großer Tiefenwirkungen zeigt die vorstehende Tabelle, in welcher die Eindringungstiefe der Ströme als Funktion der Leitfähigkeit und der Frequenz eingetragen ist.

Literatur

[1] M. Müller: Gerlands Beiträge zur Geophysik **30**, 142—195 (1931).
[2] M. Müller: Zeitschr. f. Geophys., Heft 5 (1928).
[3] M. Müller: Ebenda Heft 5/6 u. Heft 8 (1929).
[4] M. Müller: Ebenda Heft 5/6 (1930).
[5] Hudec: Arch. f. Elektrotechnik 1929.
[6] M. Müller: Zeitschr. f. Geophys. Heft 3/4 (1939).
[7] M. Müller: Ebenda Heft 7/8 (1940).
[8] M. Müller: Rapporten van de Mijnbouw Mij Redjang Lebong, Batavia 1936.

Über die Ausrechnung der zweiten partiellen Ableitungen des Schwerepotentials aus den Drehwaagebeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von **Boris Apsen**, Agram

Nach einer kurzen Kritik des Anselschen Rechenverfahrens bei der Auflösung des Gleichungssystems der Drehwaage, wird ein System von Formeln aufgestellt, welches die Möglichkeit bietet, das Ausrechnen der partiellen Ableitungen des Schwerepotentials nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht und schnell durchzuführen und die mittleren Fehler aller berechneten Größen zu ermitteln.

Wird auf einem Beobachtungspunkt mit einer doppelten Drehwaage gemessen, so sind drei Doppelmessungen erforderlich, um alle sechs Unbekannten, d. h. die zweiten Differentialquotienten der Potentialfunktion der Schwerkraft

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = W_{xy}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = W_{yz}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_{\Delta}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = W_{xz}$$

und die Nullpunktlagen n_0 und n_0' der beiden Waagen (die unbekannten Skalenablesungen bei ungedrilltem Draht) zu ermitteln. Das geschieht auf die Weise, daß man die abgelesenen Skalenwerte n in die Gleichungen des Instrumentes einsetzt und den Wert der Unbekannten ausrechnet. Um die Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu steigern, werden die Messungen wiederholt, so daß man überschüssige Ablesungen erhält, die es gestatten, wie die Unbekannten selbst, so auch die aus ihnen berechneten Schwerkraftgradienten und Krümmungsgrößen in Bezug auf den Einfluß der Messungsfehler zu prüfen.

Das Rechenverfahren von Eötvös [1], das den Wert der Unbekannten dreifach bestimmt, ist vom theoretischen, so auch vom praktischen Standpunkt aus nicht zu rechtfertigen. Einzelne Ablesungen werden in die Rechnung ungleichmäßig eingesetzt und erhalten deshalb ganz unbegründet verschiedene Gewichte; die Gleichungen zur Ausrechnung der Unbekannten W_{xy} und W_Δ werden zweifach genommen; auch gibt das Eötvössche Verfahren keine Prüfungsmöglichkeit der errechneten Ergebnisse.

Der einzig theoretisch richtige Weg zur Ermittlung der Unbekannten ist der, daß man die Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate ausrechnet.

Diese Ansicht wird im Schrifttum von vielen vertreten, insbesondere von Ansel in seinem Werk „Geophysikalische Aufschließungsmethoden" (Lehrbuch für Geophysik von B. Gutenberg, Berlin 1929, S. 500—552).

Den erwähnten Gedanken aussprechend, fügt Ansel sofort hinzu, daß man die ersten vier Unbekannten aus den sechs Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll}
 & & \text{Waage I} \\
\alpha = 0^0 & 1. & n_0 - n_1 = 2\,a\,W_{xy} + b\,W_{yz} \\
\alpha = 120^0 & 2. & n_0 - n_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a\,W_\Delta - a\,W_{xy} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,b\,W_{xz} - \dfrac{b}{2}\,W_{yz} \\
\alpha = 240^0 & 3. & n_0 - n_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a\,W_\Delta - a\,W_{xy} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,b\,W_{xz} - \dfrac{b}{2}\,W_{yz} \\
 & & \text{Waage II} \\
\alpha' = 180^0 & 4. & n'_0 - n'_1 = 2\,a'\,W_{xy} - b'\,W_{yz} \\
\alpha' = 300^0 & 5. & n'_0 - n'_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a'\,W_\Delta - a'\,W_{xy} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,b'\,W_{xz} + \dfrac{b'}{2}\,W_{yz} \\
\alpha' = 60^0 & 6. & n'_0 - n'_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a'\,W_\Delta - a'\,W_{xy} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,b'\,W_{xz} + \dfrac{b'}{2}\,W_{yz}
\end{array}\right\} \quad (1)$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen kann, da ja nach den Gleichungen

$$n_0 = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3} \quad \text{und} \quad n'_0 = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3}{3} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

„die beiden Nullpunktlagen n_0 und n'_0 bereits bekannt sind". Aus diesen Worten ersieht man schon, daß nach Ansel drei Doppelmessungen genügen, um die Ausrechnung der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate ausführen zu können.

Auf Grund der Annahme, daß die Nullpunktlagen „bereits bekannt sind", obgleich ihre Werte, wie die Werte der anderen Unbekannten nach den Gleichungen (2) aus Beobachtungsangaben berechnet werden, stellt Ansel aus sechs Gleichungen des Systems (1), also aus Beobachtungen eines Kreises, vier Normalgleichungen auf, um die partiellen Ableitungen des Schwerepotentials zu ermitteln. In dem Umstande, daß die Nullpunktlagen aus den Normalgleichungen verschwunden sind, ersieht Ansel die Bestätigung seiner Ansicht, daß die Berechnung der Nullpunktlagen nicht nötig ist, „da sie überhaupt nicht gebraucht werden". Im weiteren löst Ansel die vier Normalgleichungen auf, erhält vier Gleichungen zur Berechnung der vier Differentialquotienten des Schwerepotentials und stellt schließlich noch Formeln auf wie für die genäherten Gewichtskoeffizienten, so auch für die mittleren Fehler der vier berechneten Ableitungen, stets auf der Grundlage seiner Annahme stehend, daß die vier Differentialquotienten des Schwerepotentials die einz'gen Unbekannten seien.

Es ist klar, daß die Gleichungen, die Ansel zur Auswertung der Unbekannten erhält, keinesfalls im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate aufgestellt sind, da die sechs Gleichungen des Systems (1) sechs Unbekannte W_{xy}, W_{yz}, W_{Δ}, W_{xz}, n_0 und n'_0 enthalten und daher jede Möglichkeit der Ausgleichung ausgeschlossen ist. Wenn man annimmt, daß dieses System nur vier Unbekannte enthält und die Nullpunktlagen n_0 und n'_0 als bekannte Größen ansieht, so ist doch keine Ausgleichungsmöglichkeit vorhanden, weil dann von sechs Gleichungen des Systems (1) nur vier Gleichungen voneinander unabhängig sind. Addiert man nämlich die 2. und 3., und danach die 5. und 6. Gleichung des Systems (1), so erhält man mit Hilfe der Gleichungen (2) die 1. und die 4. Gleichung desselben Systems (1). Es bestehen also nur vier unabhängige Gleichungen mit vier Unbekannten oder sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten — jede Ausgleichungsmöglichkeit ist ausgeschlossen. Stellt man aber doch Normalgleichungen auf, wie es Ansel getan hat, so erhält man ein System von Gleichungen, die man leicht in die vier Gleichungen des Eötvösschen Systems transformieren kann. Diese vier Gleichungen werden gewöhnlich bei rein praktischen Messungen gebraucht, bei welchen die Frage von der Ausgleichung überhaupt nicht gestellt wird. Was die Formeln anbetrifft, die Ansel für die mittleren Fehler der Unbekannten aufstellt, so haben sie keine Bedeutung, da ja $[vv]$ gleich Null ist, wenn keine überschüssigen Beobachtungen vorliegen. Denselben Wert Null sollte auch Ansel für seine mittleren Fehler erhalten.

Es gibt also nur einen Weg, die mittleren Fehler der Unbekannten und der aus ihnen abgeleiteten Größen zu erhalten, und dieser Weg führt über die Einführung von überschüssigen Beobachtungen in die Rechnung und die Bearbeitung der gesamten Messungsergebnisse nach der Methode der kleinsten Quadrate. Da die Messungen auf einem Beobachtungspunkt gewöhnlich in zwei Kreisen ausgeführt werden, stehen vier bzw. sechs überschüssige Skalenablesungen zur Verfügung (das letztere in dem Falle, wenn man annimmt, daß die beiden Nullpunktlagen n_0 und n'_0 während der Messungen in zwei Kreisen unverändert bleiben). Auf diese Weise erhält man zwei Gleichungssysteme (1), d. h. zwölf Gleichungen mit acht Unbekannten W_{xy}, W_{yz}, W_{Δ}, W_{xz}, n_0, $\bar{n}_0$, n'_0 und $\bar{n}'_0$, wobei mit n_0 und n'_0 bzw. mit $\bar{n}_0$ und $\bar{n}'_0$ die beiden Nullpunktlagen für den ersten bzw. für den zweiten Beobachtungskreis bezeichnet sind.

Tabelle 1

Nummer der Gleichung	Nummer der Waage	Nummer des Beobachtungskreises	Azimut α, α'	Gleichungen									
1	I	I	0	$2a\,W_{xy}$	$+b\,W_{yz}$			$-n_0$				$+n_1$	$=v_1$
2	I	II	0	$2a\,W_{xy}$	$+b\,W_{yz}$				$-\bar{n}_0$			$+\bar{n}_1$	$=v_1'$
3	II	I	180^0	$2a'\,W_{xy}$	$-b'\,W_{yz}$					$-n_0'$		$+n_1'$	$=v_2$
4	II	II	180^0	$2a'\,W_{xy}$	$-b'\,W_{yz}$						$-\bar{n}_0'$	$+\bar{n}_1'$	$=v_2'$
5	I	I	120^0	$-a\,W_{xy}$	$-\frac{b}{2}\,W_{yz}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,W_{\Delta}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b\,W_{xz}$	$-n_0$				$+n_2$	$=v_3$
6	I	II	120^0	$-a\,W_{xy}$	$-\frac{b}{2}\,W_{yz}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,W_{\Delta}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b\,W_{xz}$		$-\bar{n}_0$			$+\bar{n}_2$	$=v_3'$
7	II	I	300^0	$-a'\,W_{xy}$	$+\frac{b'}{2}\,W_{yz}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a'\,W_{\Delta}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b'\,W_{xz}$			$-n_0'$		$+n_2'$	$=v_4$
8	II	II	300^0	$-a'\,W_{xy}$	$+\frac{b'}{2}\,W_{yz}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a'\,W_{\Delta}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b'\,W_{xz}$				$-\bar{n}_0'$	$+\bar{n}_2'$	$=v_4'$
9	I	I	240^0	$-a\,W_{xy}$	$-\frac{b}{2}\,W_{yz}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a\,W_{\Delta}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b\,W_{xz}$	$-n_0$				$+n_3$	$=v_5$
10	I	II	240^0	$-a\,W_{xy}$	$-\frac{b}{2}\,W_{yz}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a\,W_{\Delta}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b\,W_{xz}$		$-\bar{n}_0$			$+\bar{n}_3$	$=v_5'$
11	II	I	60^0	$-a'\,W_{xy}$	$+\frac{b'}{2}\,W_{yz}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a'\,W_{\Delta}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b'\,W_{xz}$			$-n_0'$		$+n_3'$	$=v_6$
12	II	II	60^0	$-a'\,W_{xy}$	$+\frac{b'}{2}\,W_{yz}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a'\,W_{\Delta}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b'\,W_{xz}$				$\bar{n}_0'$	$+\bar{n}_3'$	$=v_6'$

Das Einsetzen der Skalenablesungen n_i in dieses Gleichungssystem gibt folgende Fehlergleichungen (siehe Tabelle 1, S. 191):

Das Auflösen dieses Gleichungssystems unter der Bedingung, daß $[vv]$ = Min. sei, führt über die Normalgleichungen. Dieselben lauten:

$$\left.\begin{aligned}
12 A W_{xy} + 6 C W_{yz} &= M a + M' a' \\
6 C W_{xy} + 3 B W_{yz} &= \frac{1}{2}(M b - M' b') \\
3 A W_{\Delta} + 3 C W_{xz} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{M} a + \overline{M}' a') \\
3 C W_{\Delta} + 3 B W_{xz} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{M} b - \overline{M}' b') \\
3 n_0 &= n_1 + n_2 + n_3 \\
3 n_0' &= n_1' + n_2' + n_3' \\
3 \bar{n}_0 &= \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 \\
3 \bar{n}_0' &= \bar{n}_1' + \bar{n}_2' + \bar{n}_3'
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Hier ist:

$$\begin{aligned}
A &= a^2 + a'^2; \qquad B = b^2 + b'^2, \qquad C = a b - a' b', \\
M &= n_2 + \bar{n}_2 + n_3 + \bar{n}_3 - 2 n_1 - 2 \bar{n}_1, \\
M' &= n_2' + \bar{n}_2' + n_3' + \bar{n}_3' - 2 n_1' - 2 \bar{n}_1', \\
\overline{M} &= n_2 + \bar{n}_2 - n_3 - \bar{n}_3, \\
\overline{M}' &= n_2' + \bar{n}_2' - n_3' - \bar{n}_3'.
\end{aligned}$$

Tabelle 2

Unbekannte	Ihre Werte	Ihre Gewichte P genaue	Ihre Gewichte P genäherte
W_{xy}	$\frac{1}{12 D}(M' b + M b')$	$P_{xy} = 12\left(A - \frac{C^2}{B}\right) = 12 \frac{D^2}{B}$	$12 A$
W_{yz}	$\frac{1}{6 D}(M a' - M' a)$	$P_{yz} = 3\left(B - \frac{C^2}{A}\right) = 3 \frac{D^2}{A}$	$3 B$
W_{Δ}	$\frac{\sqrt{3}}{6 D}(\overline{M}' b + \overline{M} b')$	$P_{\Delta} = 3\left(A - \frac{C^2}{B}\right) = 3 \frac{D^2}{B}$	$3 A$
W_{xz}	$\frac{\sqrt{3}}{6 D}(\overline{M} a' - \overline{M}' a)$	$P_{xz} = 3\left(B - \frac{C^2}{A}\right) = 3 \frac{D^2}{A}$	$3 B$
n_0	$\frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$	3	
n_0'	$\frac{n_1' + n_2' + n_3'}{3}$	3	
$\bar{n}_0$	$\frac{\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3}{3}$	3	
$\bar{n}_0'$	$\frac{\bar{n}_1' + \bar{n}_2' + \bar{n}_3'}{3}$	3	

$A = a^2 + a'^2 \qquad C = a b - a' b'$

$B = b^2 + b'^2 \qquad D = a' b + a b'$

Hieraus folgt:

$$D^2 = A B - C^2$$

Reduziert man die Normalgleichungen nach der Gaußschen Methode, so erhält man nach dreimaliger Umkehrung der Elimination, d. h. nach dreimaliger Änderung der Ordnung der Unbekannten, folgende Ausdrücke für die Unbekannten und ihre Gewichte (vgl. Tabelle 2).

Da die Produkte ab und $a'b'$ gewöhnlich genähert gleich sind, kann $C^2 = (ab - a'b')^2$ vernachlässigt werden. Die Gewichte erhalten dann viel einfachere Ausdrücke, die in der letzten Kolonne angeführt sind. Aus diesen Ausdrücken ersieht man, daß die Gewichte der partiellen Ableitungen des Schwerepotentials proportional zu Quadratsummen der Koeffizienten a, b, a' und b', d. h. der Konstanten der Waagen, anwachsen. Zum selben Ergebnis führten die von Eötvös [2] angestellten Versuche die Abmessungen der Drehwaage zu verringern. Außerdem ersieht man aus der Tabelle 2, daß W_{yz} und W_{xz} gleiche Gewichte haben und daß das Gewicht von W_{xy} das Vierfache des Gewichtes von W_Δ beträgt.

Zur Aufstellung der Formeln für die mittleren Fehler der Unbekannten ist die Ermittlung der Größe $[vv]$ erforderlich. Da sich die Unbekannten in den Normalgleichungen (3) so verteilt haben, daß sich jede einzelne Unbekannte in zwei bzw. in einer Gleichung befindet, ist es unmöglich, die Größe $[vv]$ durch das Fortsetzen der Reduktion der Normalgleichungen zu erhalten, und man ist genötigt, die Verbesserungen v_i und v_i' im einzelnen zu berechnen. Setzt man also die in der Tabelle 2 angegebenen Werte der Unbekannten in die Fehlergleichungen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= -v_1' = \tfrac{1}{2}(\Delta_1 - \overline{\Delta}_1)\\
v_2 &= -v_2' = \tfrac{1}{2}(\Delta_1' - \overline{\Delta}_1')\\
v_3 &= -v_3' = \tfrac{1}{2}(\Delta_2 - \overline{\Delta}_2)\\
v_4 &= -v_4' = \tfrac{1}{2}(\Delta_2' - \overline{\Delta}_2')\\
v_5 &= -v_5' = \tfrac{1}{2}(\Delta_3 - \overline{\Delta}_3)\\
v_6 &= -v_6' = \tfrac{1}{2}(\Delta_3' - \overline{\Delta}_3')
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hier ist gesetzt:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= n_1 - n_0,\\
\overline{\Delta}_1 &= \overline{n}_1 - \overline{n}_0,\\
\Delta_1' &= n_1' - n_0',\\
\overline{\Delta}_1' &= \overline{n}_1' - \overline{n}_0' \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Es folgt hieraus:

$$[v] = 0; \qquad [v\,v] = \sum_{i=1}^{3} \{(\Delta_i - \overline{\Delta}_i)^2 + (\Delta_i' - \overline{\Delta}_i')^2\}.$$

Bezeichnet man mit $m_0 = \sqrt{\dfrac{[v\,v]}{s-u}}$ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit der berechneten Unbekannten und setzt man für die Zahl der Gleichungen $s = 12$ und für die Zahl der Unbekannten $u = 8$ ein, so erhält man nach $m = \frac{m_0}{\sqrt{P}}$:

Tabelle 3

Unbekannte	Ihre mittleren Fehler
W_{xy}	$m_{xy} = m_0 \frac{1}{2D} \sqrt{\frac{B}{3}} \doteq \frac{m_0}{2\sqrt{3A}}$
W_{yz}	$m_{yz} = m_0 \frac{1}{D} \sqrt{\frac{A}{3}} \doteq \frac{m_0}{\sqrt{3B}}$
W_Δ	$m_\Delta = m_0 \frac{1}{D} \sqrt{\frac{B}{3}} \doteq \frac{m_0}{\sqrt{3A}}$
W_{xz}	$m_{xz} = m_0 \frac{1}{D} \sqrt{\frac{A}{3}} \doteq \frac{m_0}{\sqrt{3B}}$
$n_0, n_0', \bar{n}_0, \bar{n}_0'$	$m_{n_0} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m_0}{\sqrt{3}}$

$$m_0 = \frac{1}{2} \sqrt{[v\,v]}$$

Folglich ist:

$$m_\Delta = 2\, m_{xy},$$
$$m_{yz} = m_{xz}.$$

Als Rechenproben können dienen:

$$[\Delta] = 0; \quad [\Delta'] = 0; \quad [\bar{\Delta}] = 0; \quad [\bar{\Delta}'] = 0$$

und

$$[\Delta_2] - [\Delta_1] = \tfrac{1}{2}[M],$$

hier ist:

$$[\Delta_2] = \Delta_2 + \Delta_2' + \bar{\Delta}_2 + \bar{\Delta}_2',$$
$$[\Delta_1] = \Delta_1 + \Delta_1' + \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_1',$$
$$[M] = M + M' + \bar{M} + \bar{M}'.$$

Nach den obigen Formeln werden für jede Beobachtungsfolge, die aus zwei Beobachtungskreisen besteht, die Werte der Unbekannten und ihrer mittleren Fehler ausgerechnet. Um die dazu nötige Zeit bis zu etwa einer halben Stunde zu verringern, bedient man sich folgenden Formulars, in dem als Beispiel eine Beobachtungsfolge ausgerechnet ist (siehe das Formular auf der S. 196/197).

Wie man es aus dem im Formular angeführten Beispiel ersieht, wurden für die Differentialquotienten und ihre mittleren Fehler folgende Werte erhalten:

$$W_{xy} = + \quad 8.97\,E, \qquad m_{xy} = \pm\, 0{,}312\,E,$$
$$W_{yz} = + \quad 23.40\,E, \qquad \Delta_{yz} = \pm\, 0.203\,E,$$
$$W_\Delta = - \; 111.50\,E, \qquad m_\Delta = \pm\, 0.624\,E,$$
$$W_{xz} = - \quad 41.00\,E, \qquad m_{xz} = \pm\, 0.203\,E.$$

Sind auf einem Beobachtungspunkt mehrere Beobachtungsfolgen ausgeführt worden, so wird jede Folge einzeln berechnet und für den endgültigen Wert der Unbekannten das arithmetische Mittel aus allen Folgen genommen. Die mittleren Fehler der arithmetischen Mittel berechnet man nach der Formel

$$M = \frac{1}{r}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2},$$

worin mit r die Zahl der Beobachtungsfolgen bezeichnet ist.

Da die mittleren Fehler der Unbekannten berechnet sind, kann man jetzt leicht auch die mittleren Fehler jener Größen ermitteln, die aus den zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials abgeleitet werden. Man gebraucht zu diesem Zwecke die bekannte Formel für den mittleren Fehler M der Funktion f der beobachteten Größen $l_1, l_2, l_3, \ldots$, die mit mittleren Fehlern $n_1, m_2, m_3, \ldots$ behaftet sind:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot m_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3} \cdot m_3\right)^3 + \cdots}.$$

Auf diese Weise erhält man folgende Ausdrücke für die mittleren Fehler des Schwerkraftgradienten und der Krümmungsgröße, so auch ihrer Richtungen:

Tabelle 4

Größen	Ihre mittleren Fehler
Schwerkraftgradient:	
$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}$	$M_G = m_{xz} = m_{yz}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{W_{yz}}{W_{xz}}$	$M_\alpha = \dfrac{M_G}{G} \cdot \varrho^0$
Krümmungsgröße:	
$R = \sqrt{W_\Delta^2 + 4\,W_{xy}^2}$	$M_R = m_\Delta$
$\operatorname{tg} 2\lambda = \dfrac{-2\,W_{xy}}{W_\Delta}$	$M_\lambda = \dfrac{m_{xy}}{R} \cdot \varrho^0$

Setzt man in diese Formeln die aus dem obigen Zahlenbeispiel entnommenen Werte der partiellen Ableitungen und ihrer mittleren Fehler ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} G &= 47{,}21\,E, & M_G &= \pm\,0.203\,E,\\ \alpha &= 150.29^0, & M_\alpha &= \pm\,0.246^0,\\ R &= 112.93\,E, & M_R &= \pm\,0.624\,E,\\ \lambda &= 4.57^0, & M_\lambda &= \pm\,0.159^0. \end{aligned}$$

Überblickt man zum Schluß alles Erwähnte, so ersieht man, wie leicht und mit welchem kleinen Aufwand an Zeit und Mühe die Auswertung der Drehwaage-

Formular

„′" Bezeichnung für die Waage II. „‾" Bezeichnung für den Kreis II.

$$a = 0.077\,40 \cdot 10^9;\quad b = 0.238\,59 \cdot 10^9;\quad \frac{1}{12\,D} = 2.271\,53_5 \cdot 10^{-18};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6\,D} = 7.868\,83 \cdot 10^{-18};\quad \frac{1}{\sqrt{P_{yz}}} = 1.717\,92 \cdot 10^{-9};$$

$$a' = 0.076\,98 \cdot 10^9;\quad b' = 0.236\,70 \cdot 10^9;\quad \frac{1}{6\,D} = 4.543\,07 \cdot 10^{-18};$$

$$\frac{1}{\sqrt{P_{xy}}} = 2.644\,59 \cdot 10^{-9};\quad \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\,35$$

1.	2.	Folge I 1.	Folge I 2.	Folge II 1.	Folge II 2.
n_1	$2\,\Delta_2$	161.7	− 24.86		
n_2 } +	$2\,\bar{\Delta}_2$ } + } −	156.2	− 25.00		
n_3	$-M/3$	188.0	− 13.93		
$3\,n_0$	$\bar{M}$	505.9	− 63.79		
n_0	$4\,v_3$	168.63	+ 0.14		
$\Delta_1 = n_1 - n_0$	v_3	− 6.93	+ 0.035		
$\Delta_2 = n_2 - n_0$		− 12.43			
$\Delta_3 = n_3 - n_0$	$2\,\Delta_2'$	+ 19.37	− 2.26		
Probe: $[\Delta] = 0$	$2\,\bar{\Delta}_2'$ } + } −	+ 0.01	− 2.14		
	$-M'/3$		+ 8.30		
n_1'	$\bar{M}'$	449.8	+ 3.90		
n_2' } +	$4\,v_4$	444.6	− 0.12		
n_3'	v_4	442.8	− 0.030		
$3\,n_0'$		1337.2			
n_0'	Δ_3 } −	445.73	+ 19.37		
$\Delta_1' = n_1' - n_0'$	$\bar{\Delta}_3$	+ 4.07	+ 19.50		
$\Delta_2' = n_2' - n_0'$	$2\,v_5$	− 1.13	− 0.13		
$\Delta_3' = n_3' - n_0'$	v_5	− 2.93	− 0.065		
Probe: $[\Delta'] = 0$		+ 0.01			
	Δ_3' } −		− 2.93		
$\bar{n}_1$	$\bar{\Delta}_3'$	161.7	− 3.17		
$\bar{n}_2$ } +	$2\,v_6$	156.2	+ 0.24		
$\bar{n}_3$	v_6	188.2	+ 0.120		
$3\,\bar{n}_0$		506.1			
$\bar{n}_0$	$[\Delta_2]$ } −	168.70	− 27.13		
$\bar{\Delta}_1 = \bar{n}_1 - \bar{n}_0$	$[\Delta_1]$	− 7.00	− 5.63		
$\bar{\Delta}_2 = \bar{n}_2 - \bar{n}_0$	Probe: $[\Delta_2] - [\Delta_1] = \frac{1}{2}[M]$	− 12.50	− 21.50		
$\bar{\Delta}_3 = \bar{n}_3 - \bar{n}_0$		+ 19.50			
Probe: $[\bar{\Delta}] = 0$	$M\,b'$ } +	0.00	+ 9.89		
	$M'\,b$		− 5.94		
$\bar{n}_1'$	$W_{xy} \cdot 12\,D$	450.3	+ 3.95		
$\bar{n}_2'$ } +	W_{xy}	445.0	+ 8.973		
$\bar{n}_3'$	$M \cdot a'$ } −	442.9	+ 3.22		
$3\,\bar{n}_0'$	$M' \cdot a$	1338.2	− 1.93		
$\bar{n}_0'$	$W_{yz} \cdot 6\,D$	446.07	+ 5.15		
$\bar{\Delta}_1' = \bar{n}_1' - \bar{n}_0'$	W_{yz}	+ 4.23	+ 23.397		
$\bar{\Delta}_2' = \bar{n}_2' - \bar{n}_0'$	$\bar{M}\,b'$ } +	− 1.07	− 15.10		
$\bar{\Delta}_3' = \bar{n}_3' - \bar{n}_0'$	$\bar{M}'\,b$	− 3.17	+ 0.93		

1.	2.	Folge I 1.	Folge I 2.	Folge II 1.	Folge II 2.
Probe: $[\bar{\varDelta}'] = 0$	$W_\varDelta \cdot \frac{6D}{\sqrt{3}}$	$-$ 0.01	$-$ 14.17		
	$W_\varDelta$		$-$ 111.501		
$\left.\begin{array}{l}\varDelta_1 \\ \bar{\varDelta}_1\end{array}\right\} \pm$	$\left.\begin{array}{l}\bar{M} \cdot a' \\ \bar{M}' \cdot a\end{array}\right\} -$	$-$ 6.93 $-$ 7.00	$-$ 4.91 $+$ 0.30		
$-M/3$	$W_{xz} \cdot \frac{6D}{\sqrt{3}}$	$-$ 13.93	$-$ 5.21		
M	W_{xz}	$+$ 41.79	$-$ 40.997		
$2v_1$		$+$ 0.07			
v_1	$2v_1^2$	$+$ 0.035	0.002		
	$2v_2^2$		0.013		
$\varDelta_1'$	$2v_3^2$	$+$ 4.07	0.002		
$\bar{\varDelta}_1'$	$2v_4^2$	$+$ 4.23	0.002		
$-M'/3$	$2v_5^2$	$+$ 8.30	0.008		
M'	$2v_6^2$ (Summe +)	$-$ 24.90	0.029		
$2v_2$	$[v\,v]$	$-$ 0.16	0.056		
v_2	$m_0 = \frac{1}{2}\sqrt{[v\,v]}$	$-$ 0.080	0.118		
	$m_{xy} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{P_{xy}}}$		0.312		
	$m_\varDelta = 2\,m_{xy}$		0.624		
	$m_{yz} = m_{xz} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{P_{yz}}}$		0.203		
	$m_{n_0} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$		0.068		

beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt werden kann. Die erhaltenen mittleren Fehler aller berechneten Größen geben die einzig zuverlässige Grundlage zur Beurteilung ihrer Genauigkeit.

Schrifttum

[1] R. Eötvös: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage. Verh. d. XV. allg. Konf. d. internat. Erdmessung in Budapest 1906, Berlin-Leiden 1908.

[2] R. Eötvös: Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn, besonders über Beobachtungen mit der Drehwaage. Verh. d. XVI. allg. Konf. d. internat. Erdmessung in London und Cambridge 1909. Berlin-Leiden 1910.