

Werk

Jahr: 1943

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 GEOGR PHYS 203:18

Werk Id: PPN101433392X_0018

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0018 | LOG_0043

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Eintauchtiefe von Rayleigh-Wellen

Von Erwin Hardtwig

Es wird untersucht, in welcher Weise sich die Ausdrücke für die Amplituden der Rayleigh-Wellen mit der Tiefe ändern. Es ergibt sich: 1. Die Amplitudenabnahme mit der Tiefe erfolgt nicht gleichmäßig, sondern es kommt zur Ausbildung von Extremstellen, 2. die Horizontalkomponente wird von einer bestimmten Tiefe an negativ, 3. die Bewegung des Bodenteilchens ist von dieser Tiefe ab nicht mehr retrograd, sondern progressiv, 4. die Eintauchtiefe ist proportional der Periode, 5. das Achsenverhältnis Z/H strebt einem Grenzwert zu, nachdem es eine Unstetigkeitsstelle durchschritten hat. — Da die Amplitudenabnahme mit der Tiefe langsam erfolgt, wird das Auftreten von Querschwingungen als Begleiter der Rayleigh-Schwingungen wahrscheinlich gemacht.

In der Theorie der Oberflächenwellen erhebt sich die Frage, wie tief ins Erdinnere die Wellen eigentlich eintauchen, mit anderen Worten, bis zu welcher Tiefe noch eine merkliche Erschütterung des Bodens vorhanden ist. Es ist dabei Sache der Übereinkunft, was man unter „merklich“ verstehen will. Man könnte sich etwa fragen, bis zu welcher Tiefe man vordringen müßte, um ein Absinken der Amplituden auf den zehnten oder hundertsten Teil eines vorher bestimmten Anfangswertes beobachten zu können *). Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als ob dieser Frage nur theoretisches Interesse zukäme. Doch ergeben sich sofort praktische Gesichtspunkte, wenn man bedenkt, daß von der Eintauchtiefe z. B. einer Rayleigh-Welle auch das Mitschwingen von mehr oder minder dicken Bodenschichten abhängt. Es ist ganz gut denkbar, daß tiefer eintauchende Rayleigh-Schwingungen auch entsprechend dickere Bodenschichten zur Ausführung von Querschwingungen (Love-Wellen) anregen oder aber, daß ein verhältnismäßig langsames Abklingen der Rayleigh-Wellen mit der Tiefe überhaupt erst das Auftreten von Querschwingungen wahrscheinlich macht. In diesem Falle müßte man mit großer Wahrscheinlichkeit das Auftreten von Love-Wellen als Begleiter der Rayleigh-Wellen erwarten. Dabei brauchen erstere durchaus nicht am Entstehungsherd der Rayleigh-Wellen entstanden zu sein, sondern sie können unterwegs durch die eben tief genug eindringenden Bodenbewegungen hervorgerufen worden sein.

Da die Amplituden der Rayleigh-Wellen von der Tiefe über e -Potenzen abhängen, begnügt man sich in der Praxis häufig mit der Feststellung, daß die Abnahme mit der Tiefe sehr rasch erfolgt und daß die Größenordnung der Eintauchtiefe ungefähr mit jener der Wellenlänge übereinstimmt.

Abgesehen davon, daß der Begriff der Eintauchtiefe bei dieser Auffassung nicht genau umschrieben wird, zeigt die Untersuchung, daß die Verhältnisse doch nicht so einfach liegen. Da die hierzu nötigen Rechnungen völlig elementar verlaufen, andererseits einige bemerkenswerte Ergebnisse zutage treten, mögen

*) Da es sich um abklingende e -Potenzen handelt, könnte man auch das Absinken auf den „Halbwert“ als Maß für die Eintauchtiefe einführen.

sie in den folgenden Zeilen kurz angeführt werden. In der Literatur scheint, soweit sich dies gegenwärtig überblicken läßt, die ganze Frage bisher nicht angeschnitten worden zu sein, auch fehlt in Gutenbergs „Handbuch der Geophysik“ jeglicher Hinweis darauf.

1. *Die Ausgangsgleichungen.* Unter einer Rayleigh-Welle versteht man bekanntlich jede partikuläre Lösung des Systems

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \left(\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \right. \\ \nabla &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \left. \right\} \dots (1)$$

von Differentialgleichungen, die außerdem den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda \Theta + 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{an der Stelle} \\ &z = 0 \end{aligned} \dots (2)$$

genügt und die von einer der Variablen (der „Tiefe“) über eine e -Potenz abhängt. Wie üblich, verwenden wir rechtwinklige Koordinaten x, y, z und setzen voraus, daß der unter der x - y -Ebene liegende Halbraum von einem elastischen Medium erfüllt ist, dessen Lamésche Konstanten mit λ, μ und dessen Dichte mit ϱ bezeichnet werden mögen. Die z -Richtung werde nach unten hin als positiv gerechnet. Es mögen ferner bedeuten:

c eine willkürliche, reelle Konstante,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Radius vector,

s die radiale Komponente der elastischen Verrückung,

V die Wellengeschwindigkeit,

L die Wellenlänge,

T die Periode,

A_1, A_2, C_1, C_2 reelle Konstanten.

Die allgemeine Theorie*) liefert dann als einzige Partikularlösungen des Problems (1) mit den Nebenbedingungen (2)

$$\left. \begin{aligned} s &= c \cos(\vartheta - \vartheta_0) [A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}] \cos m[r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt], \\ w &= c [C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}] \sin m[r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt] \end{aligned} \right\} \text{oder} \left. \begin{aligned} s &= -c \cos(\vartheta - \vartheta_0) [A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}] \sin m[r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt], \\ w &= c [C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}] \cos m[r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt]. \end{aligned} \right\} (3)$$

*) Lord Rayleigh: On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid (Scientif. Pap. vol. II, 1881—1887). Vgl. auch die Darstellung in Gutenbergs „Handbuch der Geophysik“.

Hier bedeuten $m = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{VT}$, ferner ϑ_0 die Richtung der Anfangsverschiebung, ϑ und r die Polar- bzw. Zylinderkoordinaten des Feldpunktes.

Die Konstanten A_1, A_2, C_1, C_2 lassen sich leicht bestimmen, wenn man die kleinste der drei reellen Wurzeln, k , der Gleichung dritten Grades

$$3k^3 - 12k^2 + 14k - 4 = 0$$

kennt. Es ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= m, & A_2 &= -m(1-k), \\ C_1 &= -\frac{m(1-k)^2}{\sqrt{1-2k}}, & C_2 &= m\frac{1-k}{\sqrt{1-2k}}, \\ & & V &= \sqrt{2k} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Da die fragliche Wurzel mit hinreichender Genauigkeit

$$k = 0,422650 \dots \dots \dots (5)$$

ist, liegen die Zahlenwerte für die Konstanten fest. Die Partikularlösungen werden, wenn man sich auf die erste Gruppe in (3) beschränkt:

$$\left. \begin{aligned} s &= c \frac{2\pi}{VT} \cos(\vartheta - \vartheta_0) [e^{-q_1 z} - (1-k)e^{-q_2 z}] \cos \frac{2\pi}{VT} [r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt], \\ w &= c \frac{2\pi}{VT} \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} [- (1-k)e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}] \sin \frac{2\pi}{VT} [r \cos(\vartheta - \vartheta_0) - Vt]. \end{aligned} \right\} (6)$$

Entscheidend ist nun — und dies wurde bisher offenbar stets übersehen —, daß auch die Konstanten q_1 und q_2 , die im Exponenten der e -Potenzen auftreten und dadurch das Tempo des Abklingens der Amplituden mit der Tiefe regeln, zahlenmäßig festliegen, abgesehen natürlich von ihrer Abhängigkeit von der Periode. Man findet

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= m \sqrt{1 - \frac{2k}{3}} = \frac{2\pi}{V} \sqrt{1 - \frac{2k}{3}} \cdot \frac{1}{T}, \\ q_2 &= m \sqrt{1 - 2k} = \frac{2\pi}{V} \sqrt{1 - 2k} \cdot \frac{1}{T} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

oder, wegen (5)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{2\pi \cdot 0,847486}{V} \cdot \frac{1}{T}, & q_2 &= \frac{2\pi \cdot 0,393319}{V} \cdot \frac{1}{T}, \\ & & q_2 &= 0,464101 \cdot q_1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Es ist daher stets $q_1 > q_2$ und $e^{-q_1 z} < e^{-q_2 z}$.

Wir machen nun hinsichtlich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen eine Annahme, von der wir von vornherein wissen, daß sie in der Natur nur angenähert gilt, durch die wir aber für die folgenden Rechnungen und Tabellen einen sicheren Ausgangspunkt erhalten.

$$V = 3,2 \text{ km/sec} \dots \dots \dots (9)$$

Bekanntlich hängt die Wellengeschwindigkeit nicht nur von der Beschaffenheit des Gesteins in der obersten Erdschicht ab, sondern auch von der Tiefe, in der der Ausbreitungsvorgang stattfindet. Unmittelbar an der Erdoberfläche wird ein kleinerer Wert richtig sein, mit zunehmender Tiefe wird man V größer annehmen müssen. Unsere Wahl stellt einen mittleren Wert dar und hat nur den Zweck, ein zahlenmäßiges Bild der Verhältnisse zu ermöglichen, ohne Rücksicht darauf, ob es im einzelnen jedesmal mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Durch (9) wird

$$\frac{2\pi}{V} = 1,963\ 50$$

und

$$q_1 = 1,664\ 03 \cdot \frac{1}{T}, \quad q_2 = 0,772\ 28 \cdot \frac{1}{T} \quad \dots \dots (10)$$

Damit ist der Ausgangspunkt für die Bestimmung der Amplituden gewonnen. Wir treffen nun die Festsetzung, daß wir nur solche Feldpunkte untersuchen, die in Richtung des Anfangsstoßes liegen, d. h. solche Punkte, für die das Azimut ϑ gleich ist dem Winkel ϑ_0 , unter dem die Anfangsbewegung erfolgt. Dann ist $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = 1$ und in den Ausdrücken für die Horizontalamplitude H und die Vertikalamplitude Z

$$H = c \frac{2\pi}{VT} [e^{-q_1 z} - (1 - k) e^{-q_2 z}],$$

$$Z = c \frac{2\pi}{VT} \cdot \frac{1 - k}{\sqrt{1 - 2k}} [- (1 - k) e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}]$$

sind, wenn man die Periode T als gegeben ansieht, alle auftretenden Konstanten bekannt, mit Ausnahme von c , das wir so normieren wollen, daß die Amplitude der Horizontalkomponente auf der Erdoberfläche (und in Richtung des Anfangsstoßes) den Wert 1 annimmt. Dann muß

$$c = \frac{VT}{2\pi k}$$

ausfallen. Bei dieser Festsetzung ist

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{k} \cdot [e^{-q_1 z} - (1 - k) e^{-q_2 z}], \\ Z &= \frac{1 - k}{k \sqrt{1 - 2k}} [- (1 - k) e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}], \\ q_1 &= 1,664\ 03 \cdot \frac{1}{T}, \quad q_2 = 0,772\ 28 \cdot \frac{1}{T}, \quad k = 0,422\ 650. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Auf diese Formeln hat man sich zu stützen, wenn man das Verhalten der Rayleigh-Wellen in der Tiefe untersuchen will. Die Vertikalamplitude hat an der Erdoberfläche den Wert

$$\frac{1 - k}{\sqrt{1 - 2k}} = \frac{0,577\ 350}{0,393\ 319} = 1,467\ 89.$$

Dies ist der bekannte Zahlenwert für das Verhältnis von Vertikal- zu Horizontalamplitude*).

Es ergibt sich somit folgendes Bild: die durch (6) gegebenen Rayleigh-Wellen sind, wenn man die Periode als vorgegeben betrachtet, vollständig bestimmt. Man kann sie entstanden denken durch Überlagerung zweier einzelner Wellenzüge, deren Horizontalkomponenten (immer in Richtung der Anfangsbewegung)

$$+ \frac{1}{k} e^{-q_1 z} \cos \frac{2\pi}{Vt} (r - Vt) \quad \text{und} \quad - \frac{1-k}{k} e^{-q_2 z} \cos \frac{2\pi}{Vt} (r - Vt)$$

und deren Vertikalkomponenten

$$- \frac{(1-k)^2}{k\sqrt{1-2k}} e^{-q_1 z} \sin \frac{2\pi}{Vt} (r - Vt) \quad \text{und} \quad + \frac{1-k}{k\sqrt{1-2k}} e^{-q_2 z} \sin \frac{2\pi}{Vt} (r - Vt)$$

sind. Der Umstand, daß die Einzelkomponenten verschiedene Vorzeichen besitzen sowie die zahlenmäßige Verschiedenheit von q_1 und q_2 haben zur Folge, daß das Abklingen der Rayleigh-Wellen mit der Tiefe nicht gleichmäßig erfolgt. Die verschieden starke Abnahme der e -Potenzen sorgt für das Auftreten von Extremstellen in den Funktionen H und Z .

Auch das Achsenverhältnis

$$\frac{Z}{H} = \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \cdot \frac{e^{-q_2 z} - (1-k) e^{-q_1 z}}{e^{-q_1 z} - (1-k) e^{-q_2 z}} \dots \dots \dots (12)$$

der Bahnellipse eines Bodenteilchens, das, wie unmittelbar ersichtlich, außer von der Tiefe auch noch von der Periode abhängig ist, wird dadurch in Mitleidenschaft gezogen und bewegt sich in einem Variabilitätsbereich, der sowohl positive als auch negative Werte umfaßt.

*) Will man im folgenden die horizontale Bodenverrückung an einer anderen Stelle als in der Richtung des Anfangsstoßes, so hat man den Wert von H aus der Formel (11) mit dem Cosinus jenes Winkels ω zu multiplizieren, den die Richtung des Anfangsstoßes mit der Richtung des Radiusvektors zum Aufpunkt miteinander einschließen.

Dementsprechend ist auch das Verhältnis H/Z kein konstantes, sondern ist jeweils mit $\cos \omega$ zu multiplizieren, variiert also mit der Lage des Feldpunktes relativ zur Richtung des Anfangsstoßes.

Lediglich im Falle vollkommener Zylindersymmetrie um die z -Achse ist H/Z azimutunabhängig. Dann bildet aber nicht (6) das Ausgangssystem, sondern

$$s = -C e^{-imVt} [e^{-q_1 z} - (1-k) e^{-q_2 z}] \cdot J_1(mr),$$

$$w = C \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} e^{-imVt} [-(1-k) e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}] \cdot J_0(mr)$$

und die Amplituden sind infolge des Auftretens der Besselschen Funktionen auch noch von r abhängig (die Besselschen Funktionen oszillieren zwar ähnlich wie die trigonometrischen, aber die Amplituden werden mit wachsendem Argument immer kleiner). Diesen Fall lassen wir hier außer Betracht.

2. Verhalten der Vertikalkomponente in der Tiefe. Die Amplitude der Vertikalkomponente ist nach (11)

$$Z = \frac{1-k}{k\sqrt{1-2k}} \left[e^{-0,772\,28\frac{z}{T}} - (1-k)e^{-1,664\,03\frac{z}{T}} \right].$$

Da für jede Wahl des z (T wird festgehalten)

$$e^{-0,772\,28\frac{z}{T}} > (1-k)e^{-1,664\,03\frac{z}{T}}$$

bleibt, muß Z in jeder Tiefe positiv bleiben.

In der 1. bis 4. Spalte der folgenden Tabelle sind die Werte von Z für verschiedene Tiefen zusammengestellt. Aus ihr sind zu entnehmen:

1. Die Amplituden der ersten Teilwelle

$$W_1 = \frac{(1-k)^2}{k\sqrt{1-2k}} e^{-1,664\,03\frac{z}{T}}.$$

2. Die Amplituden der zweiten Teilwelle

$$W_2 = \frac{(1-k)}{k\sqrt{1-2k}} e^{-0,772\,28\frac{z}{T}}.$$

3. Die durch Überlagerung beider Teilwellen entstandenen Gesamtamplituden der Vertikalkomponente $Z = W_2 - W_1$.

Als Periode wurde, wie im folgenden stets, $T = 10$ sec angenommen. Die Tabelle ist so angelegt, daß die Tiefenstufen

zunächst 100 m betragen und mit zunehmender Tiefe größer werden. Ab 50 km wurden 10-km-Stufen verwendet.

Zunächst bestätigt man, daß die Amplituden des Wellenzuges W_1 stets kleiner bleiben als jene des Wellenzuges W_2 , so daß Z stets positiv bleibt.

Aus der vierten Spalte ist ersichtlich, daß es ein ausgeprägtes Maximum in etwa

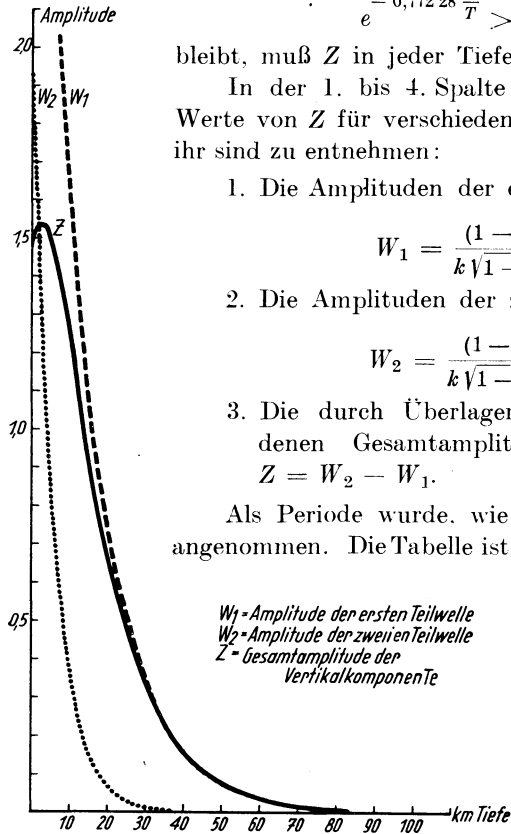


Fig. 1. Graphische Darstellung der Änderungen von Z mit der Tiefe

2,4 km Tiefe besitzt. Während an der Erdoberfläche die Bodenverschiebung einen Wert von 1,468 hat, erreicht sie in dieser Tiefe ihren größten Betrag, nämlich 1,541. Von da an nimmt Z wieder ab, erst rasch und dann immer langsamer, um zwischen 70 und 80 km Tiefe unter ein Hundertstel (der gewählten Einheit, nicht des Oberflächenwertes von Z) zu sinken.

Im obenstehenden Diagramm sind die Änderungen von Z mit der Tiefe graphisch dargestellt.

Tabelle.

Die Abnahme der Vertikalkomponente Z und der Horizontalkomponente H mit der Tiefe z und das Achsenverhältnis Z/H für die Periode 10 sec

Tiefe z in km	Vertikale Komponente			Horizontale Komponente			$\frac{Z}{H}$
	W_1	W_2	Z	W_1	W_2	H	
000.0	2.005	3.473	1.468	2.366	1.366	1.000	1.468
0.1	1.972	3.446	1.474	2.327	1.356	0.971	1.518
0.2	1.940	3.420	1.480	2.289	1.345	0.943	1.569
0.3	1.908	3.394	1.486	2.251	1.335	0.916	1.622
0.4	1.876	3.367	1.491	2.214	1.324	0.889	1.677
0.5	1.845	3.342	1.496	2.177	1.317	0.870	1.720
0.6	1.815	3.316	1.501	2.141	1.304	0.837	1.793
0.7	1.785	3.290	1.506	2.106	1.294	0.812	1.855
0.8	1.755	3.265	1.510	2.071	1.284	0.787	1.918
0.9	1.726	3.240	1.514	2.037	1.269	0.768	1.972
1.0	1.698	3.215	1.517	2.008	1.265	0.743	2.041
1.2	1.642	3.166	1.524	1.938	1.245	0.693	2.206
1.4	1.588	3.117	1.529	1.874	1.226	0.648	2.358
1.6	1.536	3.069	1.533	1.813	1.207	0.606	2.525
1.8	1.486	3.022	1.536	1.754	1.189	0.565	2.719
2.0	1.438	2.976	1.538	1.696	1.171	0.526	2.927
2.2	1.390	2.930	1.540	1.641	1.155	0.485	3.172
2.4	1.345	2.885	1.541	1.587	1.135	0.453	3.400
2.6	1.301	2.841	1.540	1.535	1.117	0.418	3.688
2.8	1.258	2.798	1.539	1.485	1.100	0.384	4.004
3.0	1.217	2.755	1.538	1.436	1.084	0.353	4.360
3.2	1.177	2.713	1.535	1.389	1.067	0.322	4.764
3.4	1.139	2.671	1.532	1.344	1.051	0.293	5.227
3.6	1.102	2.631	1.529	1.303	1.034	0.268	5.698
3.8	1.065	2.590	1.524	1.257	1.019	0.239	6.389
4.0	1.030	2.550	1.520	1.216	1.003	0.213	7.132
4.2	0.997	2.511	1.514	1.179	0.988	0.191	7.913
4.4	0.964	2.473	1.508	1.138	0.972	0.165	9.128
4.6	0.933	2.435	1.502	1.100	0.958	0.143	10.510
4.8	0.902	2.397	1.495	1.064	0.943	0.122	12.300
5.0	0.873	2.361	1.488	1.030	0.929	0.101	14.707
5.2	0.844	2.324	1.480	0.996	0.914	0.082	18.120
5.4	0.816	2.289	1.472	0.963	0.904	0.059	24.971
5.6	0.790	2.254	1.464	0.932	0.886	0.045	32.261
5.8	0.764	2.219	1.455	0.901	0.873	0.028	51.135
6.0	0.739	2.185	1.446	0.872	0.859	0.012	117.204
6.2	0.715	2.152	1.437	0.843	0.846	— 0.003	— 475.199
6.4	0.691	2.119	1.427	0.816	0.833	— 0.018	— 80.845
6.6	0.669	2.086	1.417	0.789	0.821	— 0.032	— 44.883
6.8	0.647	2.054	1.407	0.763	0.808	— 0.045	— 31.395
7.0	0.626	2.023	1.397	0.738	0.796	— 0.057	— 24.329
7.4	0.585	1.961	1.376	0.691	0.771	— 0.081	— 17.037
7.8	0.548	1.902	1.354	0.646	0.748	— 0.102	— 13.302
8.2	0.512	1.844	1.331	0.605	0.725	— 0.121	— 11.038
8.6	0.479	1.788	1.308	0.566	0.703	— 0.137	— 9.516

Tiefe z in km	Vertikale Komponente			Horizontale Komponente			$\frac{Z}{H}$
	W_1	W_2	Z	W_1	W_2	H	
9.0	0.448	1.733	1.285	0.529	0.682	— 0.153	— 8.423
10.0	0.380	1.604	1.225	0.448	0.631	— 0.183	— 6.693
11.0	0.322	1.485	1.164	0.379	0.584	— 0.205	— 5.683
12.0	0.272	1.375	1.103	0.321	0.541	— 0.219	— 5.012
13.0	0.231	1.273	1.042	0.272	0.499	— 0.227	— 4.582
14.0	0.195	1.178	0.983	0.230	0.463	— 0.233	— 4.217
15.0	0.166	1.090	0.924	0.195	0.429	— 0.234	— 3.912
16.0	0.140	1.009	0.870	0.165	0.397	— 0.232	— 3.749
17.0	0.118	0.934	0.816	0.140	0.367	— 0.228	— 3.582
18.0	0.100	0.865	0.765	0.118	0.340	— 0.222	— 3.447
19.0	0.085	0.801	0.716	0.100	0.315	— 0.215	— 3.334
20.0	0.072	0.741	0.669	0.085	0.292	— 0.207	— 3.238
22.0	0.052	0.635	0.583	0.068	0.250	— 0.181	— 3.100
24.0	0.037	0.544	0.507	0.044	0.214	— 0.170	— 2.983
26.0	0.026	0.466	0.440	0.031	0.183	— 0.152	— 2.891
28.0	0.019	0.400	0.381	0.022	0.157	— 0.135	— 2.824
30.0	0.014	0.342	0.329	0.016	0.136	— 0.119	— 2.772
34.0	0.007	0.251	0.244	0.008	0.099	— 0.091	— 2.697
38.0	0.004	0.185	0.181	0.004	0.073	— 0.068	— 2.648
42.0	0.002	0.139	0.137	0.002	0.053	— 0.051	— 2.611
46.0	0.001	0.099	0.098	0.001	0.039	— 0.038	— 2.588
50.0	0.000	0.073	0.073	0.001	0.029	— 0.028	— 2.577
60.0	0.000	0.034	0.034	0.000	0.013	— 0.013	— 2.557
70.0	0.000	0.016	0.016	0.000	0.006	— 0.006	— 2.55 .
80.0	0.000	0.007	0.007	0.000	0.003	— 0.003	— 2.54 .
90.0	0.000	0.003	0.003	0.000	0.001	— 0.001	— 2.54 .
100.0	0.000	0.002	0.001	0.000	0.001	— 0.001	— 2.54 .

Die Tiefe, in der Z seinen Maximalwert erreicht, legt man wie folgt fest:
In der Bedingung für das Eintreten des Maximums

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1-k}{k\sqrt{1-2k}} \left[0,577\,350\,e^{-1,664\,03\frac{z}{T}} - 0,464\,101 \left(e^{-1,664\,03\frac{z}{T}} \right)^{0,484\,101} \right] = 0$$

führt man statt z eine neue Unbekannte φ ein vermöge

$$e^{-1,664\,03\frac{z}{T}} = \varphi \dots\dots\dots (13)$$

und hat dann die transzendente Gleichung

$$\varphi - 0,803\,846\,3\,\varphi^{0,484\,101} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

zu lösen. Mit einer Genauigkeit, die für den vorliegenden Zweck ausreicht, ist

$$\varphi = 0,665\,35 \dots\dots\dots (15)$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung. Durch Logarithmieren folgt aus (13)

$$z = -T \frac{\log 0,665\,35}{1,664\,03 \log e} = T \frac{0,177\,949\,8}{1,664\,03 \cdot 0,434\,295},$$

also

$$z = 0,2462 T \text{ km} \dots\dots\dots (16)$$

Die Tiefe, in der z seinen größten Wert erreicht, ergibt sich also proportional der Periode. Für $T = 10$ sec ist dies 2,462 km.

Wie schon eingangs erwähnt, ist es Definitionssache, was man unter „Eintauchtiefe“ einer Rayleigh-Welle verstehen will. Wir setzen hier fest:

Als Eintauchtiefe wollen wir jenen Wert von z verstehen, für den die Schwingungsamplitude bis auf ein Hundertstel der festgelegten Einheit abgesunken ist.

Um danach die Eintauchtiefe, die im vorliegenden Falle zwischen 70 und 80 km liegen wird, zu bestimmen, hat man die Gleichung

$$\frac{1-k}{k\sqrt{1-2k}} [e^{-q_2 z} - (1-k)e^{-q_1 z}] = \frac{1}{100}$$

nach z zu lösen. Man vollführt wieder die Substitution (13) und findet wegen

$$\frac{1-k}{k\sqrt{1-2k}} = 3,473\,063, \quad \frac{(1-k)^2}{k\sqrt{1-2k}} = 2,005\,174$$

als Bestimmungsgleichung für φ

$$-200,5174 \varphi + 347,063 \varphi^{0,464\,101} - 1 = 0$$

oder

$$\varphi - 1,732\,05 \varphi^{0,464\,101} + 0,004\,987\,1 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

Die Gleichung hat eine einzige reelle Wurzel φ_0 , mit deren Hilfe sich vermöge (13) der gesuchte Wert von z berechnen läßt:

$$z = -T \frac{\log \varphi_0}{1,664\,03 \cdot 0,434\,295}.$$

Da $\log \varphi_0$ negativ ausfällt, bleibt z positiv. Auch die Eintauchtiefe ergibt sich als proportional der Periode. Für $T = 10$ sec ergibt sich der o. a. Wert zwischen 70 und 80 km und daher für Perioden von 20, 30, . . . Sekunden eine doppelt, dreifach, . . . so große Tiefe. Es sind dies unerwartet große Zahlen, und man kann aus ihnen nur schließen, daß die Anregung zum Mitschwingen, die von Rayleigh-Wellen auf die oberflächennahen Erdschichten ausgeübt wird, ebenfalls sehr groß ist.

3. Verhalten der Horizontalkomponente in der Tiefe. Die Amplitude der Horizontalkomponente nimmt mit der Tiefe in anderer Weise ab als jene der Vertikalkomponente. Aus

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{k} [e^{-q_1 z} - (1-k)e^{-q_2 z}] \\ &= \frac{1}{k} \left[e^{-1,664\,03 \frac{z}{T}} - (1-k)e^{-0,772\,28 \frac{z}{T}} \right] \end{aligned}$$

geht hervor, daß zwar für $z = 0$, also an der Erdoberfläche, H den Wert $+1$ besitzt (die Konstante c wurde so gewählt, daß dies eintritt), daß aber mit wachsendem z das negative Glied in der eckigen Klammer immer mehr überwiegt. Es muß also ein Wert des z existieren, für den H verschwindet und bei noch weiter wachsendem z muß H negativ werden. Die 5., 6. und 7. Spalte der Tabelle zeigt dies wieder im einzelnen. Es sind angeführt:

1. Die Amplituden der ersten Teilwelle

$$W_1 = \frac{1}{k} e^{-1,664\,03 \frac{z}{T}}$$

2. Die Amplituden der zweiten Teilwelle

$$W_2 = \frac{1-k}{k} e^{-0,772\,28 \frac{z}{T}}$$

3. Die durch Überlagerung beider Teilwellen entstandene Gesamtamplitude der Horizontalkomponente $H = W_1 - W_2$.

Die Periode sei wieder $T = 10$ sec.

Aus den angeführten Zahlenwerten ist zunächst zu erkennen, daß die Beträge der einzelnen Summanden erst rasch,

später langsamer abnehmen, doch so, daß ihre algebraische Summe stets kleiner wird und zwischen 6 und 6,2 km Tiefe verschwindet. Von da ab hat H negative Werte, die zunächst dem Betrage nach bis etwa 15 km Tiefe wachsen, um dann endgültig gegen Null zu konvergieren.

Im übrigen ist der Verlauf der Funktion H ebenfalls aus der graphischen Darstellung zu ersehen.

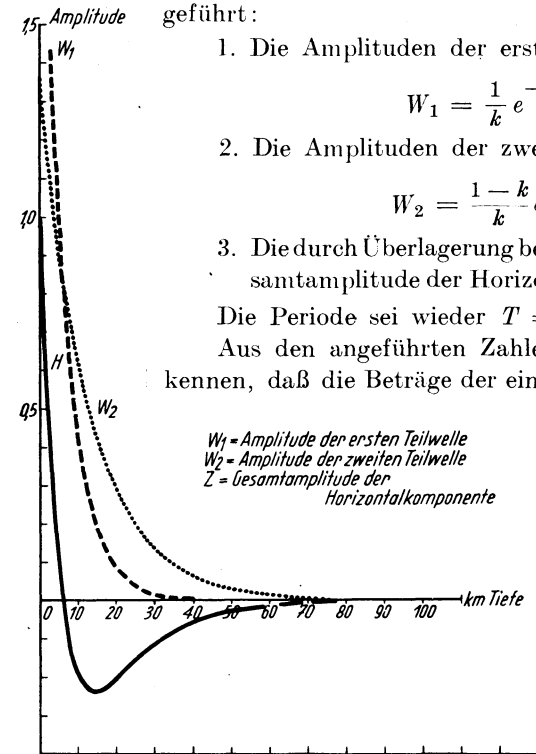


Fig. 2. Graphische Darstellung der Änderung von H mit der Tiefe

Auch hier kann man die kritischen Stellen mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Um beispielsweise die Stelle zu finden, an der die Horizontalkomponente ganz ausgelöscht ist, hat man

$$e^{-1,664\,03 \frac{z}{T}} - (1-k) e^{-0,772\,28 \frac{z}{T}} = 0$$

nach z aufzulösen. Durch die Substitution (13) ergibt sich zunächst für φ die Bestimmungsgleichung

$$\varphi - 0,577\,350 \varphi^{-0,464\,101} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

deren fragliche Wurzel mit hinreichender Genauigkeit

$$\varphi = 0,358\ 80$$

ist, so daß aus (13) folgt

$$z = -T \frac{\log 0,358\ 80}{1,664\ 03 \log e} = T \frac{0,445\ 148}{1,664\ 03 \cdot 0,434\ 295}.$$

Führt man die Rechnung aus, so findet man

$$z = 0,6160\ T\ \text{km} \quad \dots \dots \dots (19)$$

für jene Tiefe, in der das Bodenteilchen keine Horizontalbewegung mehr ausführt. Für $T = 10\ \text{sec}$ ist dies

$$z = 6,160\ \text{km},$$

für die doppelte, dreifache, ... Periode die doppelte, dreifache, ... Tiefe. Von da ab setzt wieder Horizontalbewegung ein, jedoch mit entgegengesetztem Zeichen, d. h. die Bahnellipse wird in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. Die *maximale* Horizontalbewegung wird dabei erreicht für eine Tiefe z , für die

$$\varphi - 0,267\ 949\ \varphi^{-0,464\ 101} = 0$$

erfüllt ist. Die einzige Wurzel dieser Gleichung,

$$\varphi = 1,085\ 650$$

liefert dann auf die nun schon bekannte Art und Weise

$$z = 1,4768\ T\ \text{km}.$$

In Übereinstimmung mit der Tabelle bekommt man für $T = 10\ \text{sec}$ als fraglichen Wert

$$z = 14,768\ \text{km},$$

also ebenfalls eine verhältnismäßig hohe Zahl. Dabei sind die Amplituden in dieser Tiefe dem Betrage nach immer noch größer als 0,23 des Wertes an der Oberfläche.

Die weitere Frage, wie weit ins Erdinnere man eindringen muß, um Horizontalbewegungen von weniger als ein Hundertstel des Oberflächenwertes zu bekommen, soll nur gestreift werden. Ihre Behandlung kann genau so durchgeführt werden, wie im Falle der Vertikalkomponente. Wegen der verschiedenen Möglichkeiten für das Vorzeichen wird man die zwei Gleichungen

$$\varphi - 0,577\ 350\ \varphi^{0,464\ 101} - 0,0422\ 650 = 0$$

und

$$\varphi - 0,577\ 350\ \varphi^{0,464\ 101} + 0,0422\ 650 = 0$$

zu lösen haben, von denen die erste *eine* Wurzel, die zweite deren *zwei* besitzt. Die zugehörigen z -Werte liegen einerseits in unmittelbarer Nähe der Nullstelle von H , also bei $z = 6\ \text{km}$, andererseits (für $T = 10$) zwischen 60 und 70 km.

4. *Das Verhältnis Z/H.* Das Verhältnis der Vertikal- zur Horizontalachse der Bewegungsellipse, das an der Erdoberfläche den Wert 1,46789 besitzt, ändert sich gemäß (12) mit der Tiefe und der Periode. Hält man wie bisher T fest, so wird der Wert dieses Verhältnisses zunächst wachsen, entsprechend der raschen Abnahme des Nenners gegenüber dem Zähler und an der Nullstelle des Zählers, in unserem Falle bei $z = 6,160$ km, von $+\infty$ auf $-\infty$ springen. Entsprechend dem negativen Wert des Nenners für Tiefen, die größer sind als dieses z wird dort das Vorzeichen des Verhältnisses negativ werden, während der Betrag beständig abnimmt. Die letzte Spalte der Tabelle gibt einen Überblick über den Verlauf des Achsenverhältnisses.

Die Zahlen der letzten Spalte wurden aus den Zahlen der 4. und 7. Spalte durch Division gefunden. Aus Gründen der logarithmischen Rechnung werden im Intervall zwischen 50 und 100 km die letzten Dezimalen unsicher. Doch macht dies insofern nichts aus, als man den Grenzwert, dem das Achsenverhältnis zustrebt, direkt berechnen kann.

In der Tat ist

$$\frac{Z}{H} = \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \cdot \frac{e^{-q_2 z} - (1-k)e^{-q_1 z}}{e^{-q_1 z} - (1-k)e^{-q_2 z}} = \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \cdot \frac{e^{(q_1-q_2)z} - (1-k)}{1 - (1-k)e^{(q_1-q_2)z}},$$

$$q_1 - q_2 > 0.$$

Ersetzt man hier $e^{(q_1-q_2)z}$ durch die Reihenentwicklung

$$1 + \frac{1}{1!}(q_1 - q_2)z + \frac{1}{2!}(q_1 - q_2)^2 z^2 + \frac{1}{3!}(q_1 - q_2)^3 z^3 + \dots + \frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n z^n$$

$$= z^n \left[\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n + \frac{1}{(n-1)!}(q_1 - q_2)^{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{1!}(q_1 - q_2) \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^n} \right],$$

so erhält man

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{Z}{H} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \times$$

$$\frac{z^n \left[\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n + \frac{1}{(n-1)!}(q_1 - q_2)^{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} \right] - (1-k)}{1 - (1-k) z^n \left[\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n + \frac{1}{(n-1)!}(q_1 - q_2)^{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} \right]}$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \frac{\left[\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n + \frac{1}{(n-1)!}(q_1 - q_2)^{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} \right] - \frac{1-k}{z^n}}{\frac{1}{z^n} - (1-k) \left[\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n + \frac{1}{(n-1)!}(q_1 - q_2)^{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} \right]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-k}{\sqrt{1-2k}} \frac{\frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n}{- (1-k) \frac{1}{n!}(q_1 - q_2)^n} = - \frac{1}{\sqrt{1-2k}} = - 2,542\,466.$$

Wenn also auch mit zunehmender Tiefe die Bewegungsellipsen eines Bodenteilchens immer kleiner werden, d. h. die Längen der Achsen mehr und mehr abnehmen, so geschieht dies doch in der Weise, daß das Verhältnis der größeren zur kleineren Achse dem eben gefundenen Grenzwert zustrebt.

Der Verlauf von Z/H ist im folgenden Diagramm dargestellt.

Der Vorzeichenwechsel ist durch den Nenner bedingt, der bei $z = 6,160$ km sein Zeichen wechselt. Für die Bodenbewegung des Teilchens bedeutet dies: während das Teilchen an der Erdoberfläche und der ihr benachbarten Schicht die Bahnellipse retrograd durchläuft, d. h. so, daß Fortpflanzungsrichtung der Welle und Bewegungsrichtung an der tiefsten Stelle der Bahnellipse übereinstimmen, schlägt diese Bewegung für $z = 6,160$ km in die entgegengesetzte um. Die Bewegung des Teilchens wird dann progressiv, d. h. den höchsten Punkt der Bewegungsellipse durchläuft es im Sinne der Fortpflanzungsrichtung der Welle.

Dieser Umstand ist letzten Endes dadurch bedingt, daß die unteren Schichten gewissermaßen gegenüber den oberen nachhinken und so eine bestimmte Phasenverschiebung bekommen, die sich auf diese Art bemerkbar macht.

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Verhältnisse für verschiedene Tiefen.

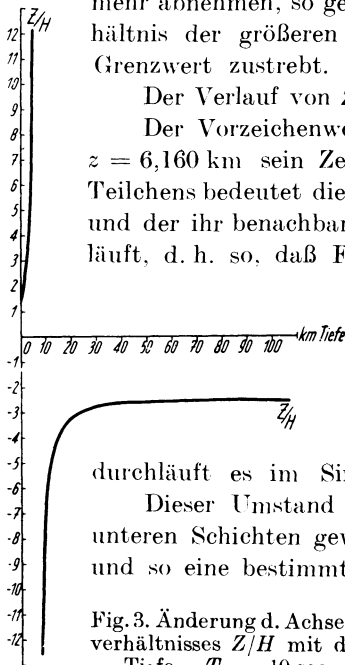


Fig. 3. Änderung d. Achsenverhältnisses Z/H mit der Tiefe. $T = 10$ sec

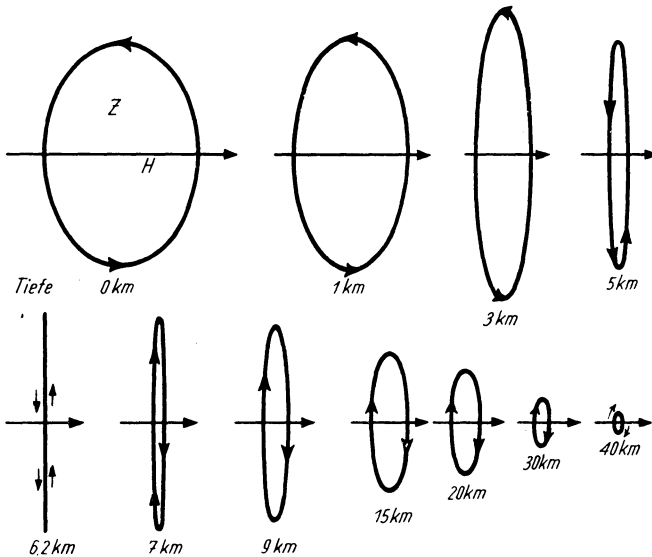


Fig. 4

Zusammenfassung. Der Umstand, daß man Rayleigh-Wellen als Doppelwellen auffassen kann, die durch Überlagerung zweier einzelner Wellenzüge mit entgegengesetztem Vorzeichen entstehen, hat zur Folge, daß das Abklingen der Amplituden mit der Tiefe nicht monoton erfolgt. Es treten sowohl bei der Horizontal- wie auch bei der Vertikalkomponente Extremwerte auf, bei ersterer im negativen Bereich. Da die in den e -Potenzen auftretenden Exponenten q_1 und q_2 verhältnismäßig kleine Werte haben, erfolgt das Abklingen langsam. Man muß in Tiefen von 60 bis 100 km gehen, um eine Abnahme der Amplituden auf weniger als ein Hundertstel des Oberflächenwertes zu erreichen. Für andere Perioden als $T = 10$ sec lassen sich die entsprechenden Zahlen leicht finden.

Das *langsame* Abklingen der Amplituden könnte in der Praxis zur Folge haben, daß oberflächennahe Bodenschichten durch Rayleigh-Wellen zum Mitschwingen angeregt werden. Es wäre denkbar, daß das Auftreten von Love-Wellen gerade durch diesen Umstand gefördert wird, denn langsames Abklingen bedeutet starke Anregung in den oberen Schichten. Wenn schon am Erregerherd der Rayleigh-Wellen nicht zugleich auch Love-Wellen entstanden sind, so kann dies doch unterwegs, also auch im Bereich der Station, der Fall sein.

Die Tatsache, daß sehr häufig zugleich mit den Rayleigh-Wellen auch Querwellen auftreten, würde sich auf diese Weise recht gut deuten lassen.

Die Verhältnisse werden dadurch verwickelter, daß die oberflächennahe Schicht in verschiedener Tiefe in verschiedenem Sinne angeregt wird; bis zur Tiefe $z = 6,160$ km in retrogradem Sinn, von da ab progressiv. In welcher Weise sich dies auf die Entstehung von Querwellen auswirkt, läßt sich von vornherein nicht übersehen.

Was das Verhältnis Z/H anlangt, so ist aus der seismischen Praxis bekannt, daß sein Wert an einer Station sowohl wie auch von Station zu Station stark schwankt. Dieses Schwanken geht wohl in erster Linie, soweit es nicht untergrundbedingt ist, auf das Vorhandensein von Querwellen zurück, die sich nicht immer einwandfrei von den Rayleigh-Wellen trennen lassen. Nach unseren Ausführungen tritt nun noch eine Abhängigkeit von der Tiefe hinzu, die, wenn sie auch nur geringe Änderungen am theoretischen Wert hervorbringt, doch nicht zu vernachlässigen ist. Die Erdoberfläche ist nicht, wie die Theorie stets voraussetzt, eine ebene Fläche, sondern weist zahlreiche Erhebungen und Senken auf, so daß von einer Station von vornherein gar nicht feststeht, wie ihre Tiefe hinsichtlich der Ausbreitung von Rayleigh-Wellen zu veranschlagen ist. Selbst wenn man imstande wäre, die entsprechenden Korrekturen zu berücksichtigen, würden die dadurch notwendig werdenden Änderungen am Verhältnis Z/H wesentlich zurückbleiben hinter jenen Änderungen, die durch andere Ursachen, insbesondere den Untergrund und seine Schichtung, hervorgerufen werden.

Stuttgart, im Mai 1943.