Zur Bestimmung der Bodendichte nach dem Nettleton-Verfahren

Von **Karl Jung**, Clausthal-Zellerfeld[1])

Zur Bestimmung der Bodendichte aus Schweremessungen führt man nach *Nettleton* die *Bouguer*sche Reduktion mehrmals mit verschieden angenommenen Gesteinsdichten aus und trägt die *Bouguer*schen Anomalien mit dem Relief der Erdoberfläche als Profilkurven auf. Man sieht nach, welche der Schwerekurven die geringste Beziehung zum Oberflächenrelief aufweist, und nimmt die Dichte, mit der sie berechnet wurde, als richtig an.

Man kann dieses Verfahren in eine rechnerische Form bringen, wenn man davon ausgeht, daß der Korrelationskoeffizient der *Bouguer*schen Anomalien und der Geländehöhen gleich Null sein muß [1]. Man erhält verhältnismäßig einfache Formelsysteme, die auch zu einer Fehlerabschätzung führen. Der damaligen Meßgenauigkeit entsprechend, wurde bei der Entwicklung des Formelsystems die Geländereduktion vernachlässigt. Bei Messungen mit modernen, hochempfindlichen Gravimetern dürfte jedoch die Berücksichtigung der Geländewirkung zu empfehlen sein. Wie sich im folgenden zeigt, ist dies ohne großen Arbeitsaufwand möglich.

Es sei

g die an mehreren Stationen in verschiedener Meereshöhe gemessene Schwere,
h die Höhe der Meßpunkte über dem Bezugsniveau,
σ die Bodendichte, die im ganzen Meßgebiet konstant angenommen wird,
Top die durch σ dividierte Geländewirkung,
γ_0 die Normalschwere im Bezugsniveau,
$\Delta g''$ die *Bouguer*sche Schwereanomalie.

Mehrfach kommen arithmetische Mittel vor, sie werden mit $M\ (\Delta g'')$, $M\ (h)$ usw. bezeichnet. Eckige Klammern zeigen, wie in der Ausgleichsrechnung üblich, Summierungen über alle Messungen an.

Werden g, γ_0, $\Delta g''$ in Milligal und h in Metern ausgedrückt, so ist die *Bouguer*sche Anomalie

$$\Delta g'' = g - \sigma \cdot \mathrm{Top} + 0.3085\, h - 0.04193\, \sigma h - \gamma_0.$$

Zur Erleichterung der Zahlenrechnung empfiehlt es sich, einen Näherungswert σ_1 für σ einzuführen. σ_1 kann beliebig, auch gleich Null, angesetzt werden. Meist wird man eine runde Zahl, z. B. 2.0 wie im Beispiel am Schluß, wählen. Dann ist $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ und

$$\Delta g'' = g - \sigma_1 \cdot \mathrm{Top} + 0.3085\, h - 0.04193\, \sigma_1 h - \gamma_0 - \sigma_2 \cdot \mathrm{Top} - 0.04193\, \sigma_2 h,$$

und es ist σ_2 als die zu bestimmende Unbekannte anzusehen. Bezeichnet man die mit σ_1 berechnete *Bouguer*sche Anomalie als $\Delta g_1''$,

$$\Delta g_1'' = g - \sigma_1 \cdot \mathrm{Top} + 0.3085\, h - 0.04193\, \sigma_1\, h - \gamma_0,$$

so ist

$$\Delta g'' = \Delta g_1'' - \sigma_2 \cdot \mathrm{Top} - 0.04193\, \sigma_2\, h.$$

---

[1]) Prof. *Karl Jung*, Clausthal-Zellerfeld, Geophysikalisches Institut der Bergakademie.

Nun ist der Korrelationskoeffizient $k(\Delta g'', h)$ von $\Delta g''$ und h gleich Null zu setzen:

$$k(\Delta g'', h) = \frac{[(\Delta g'' - M(\Delta g''))(h - M(h))]}{\sqrt{[(\Delta g'' - M(\Delta g''))^2]\,[(h - M(h))^2]}} = 0.$$

Die Wurzel hat immer positive endliche Werte, somit stellt

$$[(\Delta g'' - M(\Delta g''))(h - M(h))] = 0 \tag{1}$$

die Bedingung dar, aus der σ_2 zu berechnen ist.

Setzt man zur Vereinfachung

$$\begin{aligned} \Delta g_1'' - M(\Delta g_1'') &= G, \\ \text{Top} - M(\text{Top}) &= T, \\ 0.04193\,(h - M(h)) &= H, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta g'' - M(\Delta g'') &= G - \sigma_2 (H + T), \\ h - M(h) &= \frac{1}{0.04193} H. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich

$$[(G - \sigma_2 (H + T))\,H] = 0,$$

$$\sigma_2 = \frac{[G\,H]}{[(H + T)\,H]} \tag{2}$$

Die Theorie des Korrelationskoeffizienten liefert einen mathematischen Ausdruck für den mittleren Fehler F eines Korrelationskoeffizienten, dessen wahrer Wert gleich Null ist:

$$F = \pm \sqrt{\frac{[(\Delta g'' - M(\Delta g''))^2 (h - M(h))^2]}{[(\Delta g'' - M(\Delta g''))^2]\,[(h - M(h))^2]}},$$

$$F^2 = \frac{[(G - \sigma_2 (H + T))^2 H^2]}{[(G - \sigma_2 (H + T))^2]\,[H^2]}\,. \tag{3}$$

Nun seien $\sigma_F^{(1)}$ und $\sigma_F^{(2)}$ so definiert, daß $k(\Delta g'', h) = \pm |F|$, wenn man σ_2 durch $\sigma_F^{(1)}$ und $\sigma_F^{(2)}$ ersetzt:

$$\frac{[(G - \sigma_F^{(1)} (H + T))\,H]}{\sqrt{[(G - \sigma_F^{(1)} (H + T))^2]\,[H^2]}} = + |F|,$$

$$\frac{[(G - \sigma_F^{(2)} (H + T))\,H]}{\sqrt{[(G - \sigma_F^{(2)} (H + T))^2]\,[H^2]}} = - |F|.$$

Durch Quadrieren dieser Ausdrücke kommt man auf eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $\sigma_F^{(1)}$ und $\sigma_F^{(2)}$:

$$A\,\sigma_F^2 - 2\,B\sigma_F + C = 0,\quad \sigma_F = \begin{cases} \sigma_F^{(1)} \\ \sigma_F^{(2)} \end{cases}, \tag{4}$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= [(H + T)\,H]^2 - F^2\,[H^2]\,[(H + T)^2], \\ B &= [GH]\,[(H + T)\,H] - F^2\,[H^2]\,[G\,(H + T)], \\ C &= [GH]^2 - F^2\,[H^2]\,[G^2]. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\sigma_F^{(1)} + \sigma_F^{(2)} = 2\frac{B}{A},$$

$$\sigma_F^{(1)} \cdot \sigma_F^{(2)} = \frac{C}{A},$$

$$(\sigma_F^{(2)} - \sigma_F^{(1)})^2 = 4\left(\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A}\right).$$

Ein gutes Maß für die Genauigkeit der Dichtebestimmung — wenn auch nicht ein mittlerer Fehler im strengen Sinn der Fehlertheorie — ist der Ausdruck

$$\delta\sigma = \frac{1}{2}\,|\,\sigma_F^{(2)} - \sigma_F^{(1)}\,|,$$

$$\delta\sigma = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A}}. \tag{5}$$

Vor kurzem hat *D. S. Parasnis* ein ähnliches Verfahren entwickelt [2], das aber auf einem anderen Grundgedanken beruht. *Parasnis* sieht die *Bouguer*schen Anomalien $\Delta g''$ als zufällige Fehler an, bestimmt die Bodendichte durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate und wird dabei auf einen einfachen Ausdruck für den mittleren Fehler der Dichtebestimmung geführt. Man kann zeigen, daß sein Verfahren mit dem oben beschriebenen nicht ganz identisch ist, daß die Unterschiede aber vom Standpunkt des Praktikers aus gering sind und seine Fehlerabschätzung sich daher wegen ihrer Einfachheit empfiehlt.

Schreibt man seine Entwicklungen in die hier gebrauchte Symbolik um, so findet man für jeden Meßpunkt eine „Fehlergleichung"

$$\Delta g'' = \Delta g_1'' - (\mathrm{Top} + 0.04193\,h)\,\sigma_2,$$

die mit

$$\Delta g'' = v,$$
$$\Delta g_1'' = -l$$
$$-(\mathrm{Top} + 0.04193\,h) = a$$

in die in der Ausgleichsrechnung übliche Form

$$v = -l + a \cdot \sigma_2$$

übergeht. Subtrahiert man die mittlere Fehlergleichung

$$M(v) = -M(l) + M(a) \cdot \sigma_2,$$

so erhält man reduzierte Fehlergleichungen

$$v - M(v) = -(l - M(l)) + (a - M(a))\,\sigma_2$$

und aus ihnen eine Normalgleichung

$$[(a - M(a))^2]\,\sigma_2 - [(a - M(a))\,(l - M(l))] = 0,$$

die mit

$$a - M(a) = -((\mathrm{Top} - M(\mathrm{Top})) + 0.04193\,(h - M(h))) = -(H + T),$$
$$l - M(l) = -(\Delta g_1'' - M(\Delta g_1'')) = -G$$

unmittelbar zur Bestimmung von σ_2 führt:

$$\sigma_2 = \frac{[G\,(H + T)]}{[(H + T)^2]}. \tag{6}$$

Zur Fehlerabschätzung wird in üblicher Weise die Summe der „Fehlerquadrate" gebildet,

$$[(v - M(v))^2] = [(l - M(l))^2] - [(a - M(a))(l - M(l))]\,\sigma_2,$$

und der Gewichtskoeffizient Q berechnet.

$$[(a - M(a))^2]\,Q - 1 = 0.$$

Ist n die Anzahl der Meßpunkte, so ist der mittlere Fehler

$$m_\sigma = \pm \sqrt{\frac{[(v - M(v))^2]}{n-2} \cdot Q},$$

$$m_\sigma = \pm \sqrt{\frac{[G^2]\,[(H+T)^2] - [G(H+T)]^2}{(n-2)\,[(H+T)^2]^2}}. \qquad (7)$$

Die Ausdrücke (2) und (6) für σ_2 unterscheiden sich nur in der Behandlung der Geländewirkung und sind für $T = 0$, d. h. bei Vernachlässigung der Geländereduktion, sogar identisch. Da T in den meisten Fällen kleiner als H ausfällt, sind sie nicht wesentlich voneinander verschieden. Ein Zahlenbeispiel, das der Veröffentlichung von *Parasnis* entnommen ist, soll die Gleichwertigkeit beider Berechnungsarten zeigen.

Stationsnummer	Abweichungen von der Basisstation			Geländereduktion $= -\sigma_1 \cdot$ Top[3]) mgal
	g mgal	γ_0 mgal	h m[2])	
2307	− 10.62	− 0,5[1])	+ 49,38	+ 0.35
2301	− 18.62	− 0.8[1])	+ 83.52	0.48
2302	− 20.42	− 0.9	+ 90.34	0.35
2303	− 26.24	− 1.4	+ 122.59	0.40
2304	− 37.38	− 1.5	+ 164.29	0.48
2305	− 28.54	− 3.4	+ 121.46	0.23
2306	− 32.26	− 3.1	+ 138.59	0.38
2300 (Basis)	0	0	0	0.22
Mittel	− 21.76	− 1.45	+ 96.27	+ 0.36

$g - M(g)$	$-(\gamma_0 - M(\gamma_0))$	$h - M(h)$	$-\sigma_1$ (Top − M (Top))
+ 11.14	− 0.95	− 46.89	− 0.01
+ 3.14	− 0.65	− 12.75	+ 0.12
+ 1.34	− 0.55	− 5.93	− 0.01
− 4.48	− 0.05	+ 26.32	+ 0.04
− 15.62	+ 0.05	+ 68.02	+ 0.12
− 6.78	+ 1.95	+ 25.19	− 0.13
− 10.50	+ 1.65	+ 42.32	+ 0.02
+ 21.76	− 1.45	− 96.27	− 0.14

[1]) Im Original steht hier −1.5 und −1.8. Wie man aus der Kartenskizze des Originals sieht, sind diese Zahlen offenbar falsch.

[2]) Im Original in Fuß angegeben. 1 ft = 0.3048 m.

[3]) $\sigma_1 = 2.0$.

G	T	H[4])
-0.34	$+0.005$	-1.963
-0.25	-0.060	-0.534
-0.55	$+0.005$	-0.248
$+1.42$	-0.020	$+1.101$
-0.18	-0.060	$+2.852$
$+0.70$	$+0.065$	$+1.055$
$+0.67$	-0.010	$+1.773$
-1.45	$+0.070$	-4.035

$$[G^2] = 5.57 \qquad [(H+T)\,H] = +33.66$$
$$[H^2] = 34.01 \qquad [(H+T)^2] = 33.24$$
$$[GH] = 9.77 \qquad [G^2H^2] = 39.1$$
$$[G\,(H+T)] = +9.69 \qquad [(H+T)^2\,H^2] = 347.1$$

$$\sigma_2 \text{ nach } (2) = +\,0.290_2$$
$$\sigma_2 \text{ nach } (6) = +\,0.291_2$$
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 2.29$$
$$\delta\sigma \text{ nach } (3),\ (4),\ (5) = 0.10_6$$
$$m_\sigma \text{ nach } (7) = \pm\,0.11_7.$$

Literatur

[1] *Jung, K.*: Über die Bestimmung der Bodendichte aus den Schweremessungen. Beitr. z. angewandten Geophysik **10** (1943), S. 154—164.

[2] *Parasnis, D. S.*: A study of rock density in the English Midlands. Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Supplement **6** (1952), S. 252—271.

---

[4]) $G = (g - M\,(g)) - (\gamma_0 - M\,(\gamma_0)) - \sigma_1\,(\mathrm{Top} - M\,(\mathrm{Top})) + 0.2246\,(h - M\,(h))$, $0.2246 = 0.3085 - 0.04193 \cdot \sigma_1$, $H = 0.04193\,(h - M\,(h))$, $T = \mathrm{Top} - M\,(\mathrm{Top})$.