

Werk

Jahr: 1953

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:19

Werk Id: PPN101433392X_0019

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN101433392X_0019 | LOG_0024

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Das magnetische Feld einer geradlinigen Wechselstromleitung auf homogen leitendem Untergrund und die Messung der elektrischen Bodenleitfähigkeit durch Induktion

Von W. Buchheim, Freiberg i. Sa.¹⁾

Mit 9 Abbildungen

1. Problemstellung

Zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit in einem homogenen bzw. horizontal geschichteten Boden sind bisher zwei, theoretisch wie praktisch aber nicht gleichwertige Verfahren angegeben worden: 1. Das *Neumann-Wennersche* Vier-Punkt-Verfahren [8, 13] und 2. Das Zentralinduktionsverfahren nach *Koenigsberger* [3 bis 6] und *Nunier* [9, 10]. Im Falle eines homogenen, aber anisotropen Untergrundes, für den zwei gleichwertige Hauptleitfähigkeitsachsen a, b parallel sind, die dritte c aber senkrecht zur Erdoberfläche orientiert ist, wie er bei horizontalen Schicht- bzw. Schieferungsflächen vorliegt (Abb. 1), gibt das Vier-Punkt-Verfahren mit dem scheinbaren spezifischen Widerstand $\varrho_s = \sqrt{\varrho_{\parallel} \cdot \varrho_{\perp}}$ nur das geometrische Mittel der beiden verschiedenen Hauptwerte des spezifischen Widerstandes, nicht aber die Hauptwerte ϱ_{\parallel} bzw. ϱ_{\perp} parallel bzw. senkrecht zur Erdoberfläche selbst [1, 7]. Das Zentralinduktionsverfahren dagegen, bei welchem ein achsensymmetrisches elektrisches Horizontalfeld mittels einer wechselstromgespeisten horizontalen Kreisschleife an der Erdoberfläche im Boden induziert wird, liefert den Hauptwert des spezifischen Widerstandes parallel zur Erdoberfläche, ϱ_{\parallel} . Durch Kombination beider Verfahren lassen sich also beide Hauptwerte ϱ_{\parallel} und ϱ_{\perp} bestimmen. Während sich das Vier-Punkt-Verfahren als Kartierungs- und Tiefensondierungsmethode weitgehend in Hydrogeologie, Lagerstätten- und Baugrundforschung eingebürgert hat, wird das Zentralinduktionsverfahren wegen seiner Umständlichkeit besonders als Sondierungsmethode trotz mancher Vorzüge in theoretischer und auswertungstechnischer Hinsicht nur selten und ungenügend angewandt.

Man kann aber das gleiche Ziel, nämlich die Messung der Horizontalleitfähigkeit $\sigma_{\parallel} = 1 : \varrho_{\parallel}$ allein, auch in technisch sehr einfacher Weise mittels einer geradlinigen, hinreichend langen Wechselstromleitung erreichen, wenn man nur dafür sorgt, daß galvanische, d. h. durch Erdelektroden eingeführte Rückleitungsströme im Boden vernachlässigt werden können. Da nämlich das induzierte elektrische Feld in einem homogenen Untergrunde, dessen eine Hauptleitfähigkeitsrichtung parallel zur Oberfläche gerichtet ist, überall parallel dem Primärstrom verläuft und für jeden Querschnitt senkrecht zu diesem die gleiche Verteilung aufweisen muß, kann das elektromagnetische Sekundärfeld nur von dieser einen Hauptleitfähigkeit abhängen und muß

¹⁾ Prof. Dr. W. Buchheim, Institut für angewandte Geophysik, Bergakademie, Freiberg i. Sa.

unabhängig von Größe und Achsenrichtung der beiden anderen sein. Dieses Vorgehen bietet also gegenüber der Zentralinduktionsmethode den prinzipiellen Vorteil, auch bei schrägem oder sogar senkrechtem Einfall der Schieferung bzw. der Schichtflächen des Gesteins die elektrische Leitfähigkeit parallel zu diesen ermitteln zu können, sofern das Streichen der Schieferung bzw. der Schichtung bekannt ist. Man hat zu diesem Zwecke die Leitung parallel

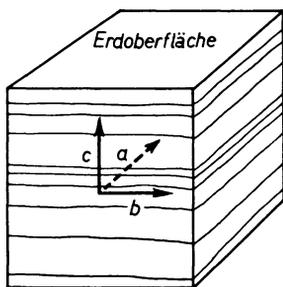


Abb. 1.

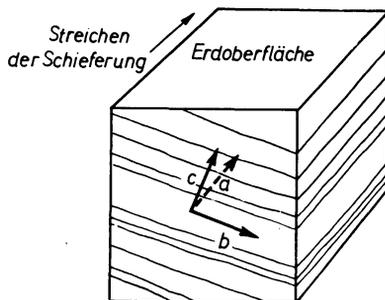


Abb. 2.

der Streichrichtung auszulegen (Abb. 2). Ist der Untergrund nicht homogen, sondern horizontal geschichtet, so läßt sich auch *ohne* Veränderung der Primärstromanordnung, nämlich lediglich aus dem Verlaufe des Sekundärfeldes in Abhängigkeit vom Abstände vom Kabel an der Erdoberfläche die Leitfähigkeit als Funktion der Tiefe erschließen, also eine elektrische Tiefensondierung auf induktiver Basis vornehmen. Da die Verlegung gestreckter Leitungen in einigermaßen ebenem Gelände wesentlich einfacher als die von Kreisschleifen ist, bietet die Erregung von Sekundärfeldern durch geradlinige Ströme auch in praktischer Hinsicht erhebliche Vorteile, wenn der Untergrund als homogen oder eben geschichtet betrachtet werden darf.

Unter dem bei den induktiven geoelektrischen Verfahren in Erscheinung tretenden sog. magnetischen Erdstreufelde versteht man die Abweichung des magnetischen Feldes des primären induzierenden Stromes vom *Biot-Savart*-schen quasistationären Typus (reines Primärfeld) infolge der *mittleren Leitfähigkeit des gesamten Untergrundes*, abgesehen von besonderen eingelagerten, abgeschlossenen, besser oder schlechter leitenden Partien. Da das Eindringen des elektromagnetischen Feldes in den Boden und die Art der Erregung eines darin eingelagerten besseren Leiters sehr wesentlich von Umgebungsleitfähigkeit und Erdstreufeld abhängen kann und die richtige Deutung von elektromagnetischen Indikationen, die auf derartigen Leitern beruhen, die Kenntnis und Berücksichtigung des Erdstreufeldes voraussetzen, sollen die Ergebnisse einer theoretischen Behandlung dieses Problems für das gestreckte Kabel im folgenden dargestellt werden. Vorausgeschickt sei, daß die Bodenleitfähigkeit eine sehr weitgehende *Abweichung* des magnetischen Gesamtfeldes im Boden vom *quasistationären Biot-Savart*-schen Typus bedingen kann, indem es mit zunehmender Entfernung vom Erregerstrom selbst für *Niederfrequenz* mehr und mehr den Charakter eines sich räumlich ausbreitenden *Wellenfeldes* an-

nimmt. Auf diesen Umstand sei besonders hingewiesen, da er in der Praxis kaum die verdiente Beachtung zu finden scheint. Die Trennung in Primärfeld und Streufeld, wobei das letztere nur in *Primärstromnähe* klein gegen das erste ist, scheint daher für die theoretische Behandlung ziemlich künstlich und auch für die Praxis wenig glücklich, da es das *magnetische Gesamtfeld im Untergrunde* und nicht das Primärfeld allein ist, welches Wirbelströme in gut leitenden Einlagerungen erregt. Wir untersuchen daher im folgenden das *magnetische Gesamtfeld des gestreckten Kabels über homogenem und isotrop leitendem Untergrunde* unter Berücksichtigung der induzierten Bodenströme. Das Erdstrefelfeld kann dann durch geometrische Subtraktion des Primärfeldes erhalten werden.

2. Das mathematische Problem

Den Ausgangspunkt bilden die *Maxwellschen* Gleichungen, etwa im *Gaußschen* Maßsystem geschrieben:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{D} &= 4\pi\kappa \end{aligned} \quad (1)$$

Nach dem im ersten Abschnitt Gesagten genügt die Betrachtung des homogen-isotropen Untergrundes: σ sei seine Leitfähigkeit, $\varrho = 1:\sigma$ sein spezifischer Widerstand in el.-stat. Einh., ε seine D.-K., μ seine magnetische Permeabilität. Dann gilt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \quad j = \sigma \mathfrak{E} \quad (2)$$

Da es sich um ein zeitlich periodisches elektromagnetisches Feld der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ handeln soll, werde in die Gleichungen (1) mit dem komplexen Ansatz

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (3)$$

eingegangen. Im oberen Halbraume ist wegen $\sigma = 0$ $j = 0$; μ kann sowohl ober- als auch unterhalb der Erdoberfläche gleich eins, die elektrische Raumladungsdichte κ gleich null gesetzt werden. (1) geht dann wegen (2) und (3) über in

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H}_0 &= \frac{4\pi}{c} \left(\sigma + i \cdot \frac{\varepsilon\nu}{2} \right) \mathfrak{E}_0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E}_0 &= -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H}_0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{H}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Da die Leitfähigkeit σ für einen spezifischen Widerstand des Untergrundes selbst von $\varrho = 10^6$ Ohm cm¹) noch immer $9 \cdot 10^5$ sec⁻¹, also mehr als das

¹) Diese Größenordnung dürfte die obere Grenze für ϱ darstellen, wenn man von Besonderheiten, wie ariden Böden, Salzgesteinen u. dgl., absieht.

Tausendfache etwa von $\nu = 500$ Hz beträgt, so darf in allen praktisch vorkommenden Fällen, insbesondere bei der stets innegehaltenen Beschränkung der Messung auf Kabelnähe, die Dichte des *Verschiebungsstromes* $\frac{i \nu \varepsilon}{2} \mathfrak{E}_0$ gegenüber der des induzierten Leitungsstromes $\sigma \mathfrak{E}$ für den leitenden Untergrund *vernachlässigt* werden. Wir erhalten also aus (4) endgültig für den unteren Halbraum:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H}_0 &= \frac{4 \pi \sigma}{c} \mathfrak{E}_0 \\ \text{rot } \mathfrak{E}_0 &= -\frac{i \omega}{c} \mathfrak{H}_0 \end{aligned} \tag{5a}$$

und für den oberen Halbraum, bei Beschränkung der Berechnung auf Entfernungen, die klein gegen die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$ im Luftraum sind, was praktisch sehr weitgehend der Fall ist,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H}_0 &= 0 \\ \text{rot } \mathfrak{E}_0 &= -\frac{i \omega}{c} \mathfrak{H}_0 \end{aligned} \tag{5b}$$

Die Gleichung $\text{div } \mathfrak{H}_0 = 0$ ist dann für beide Halbräume, die Gleichung $\text{div } \mathfrak{E}_0 = 0$ für den unteren Halbraum stets von selbst erfüllt.

Die Gleichungen (5a) bzw. (5b) werden ganz allgemein gelöst, sofern die Komponenten E_{0x} , E_{0y} , E_{0z} des elektrischen Feldes *einzelnen* der Differentialgleichung

$$\Delta E_0 - i \frac{4 \pi \sigma \omega}{c^2} E_0 = 0 \text{ im unteren Halbraume,} \tag{6a}$$

$$\text{bzw. } \Delta E_0 = 0 \text{ im oberen Halbraume}$$

genügen und die Gleichungen

$$\text{div } \mathfrak{E}_0 = 0 \quad \mathfrak{H}_0 = i \frac{c}{\omega} \text{rot } \mathfrak{E}_0 \tag{6b}$$

erfüllt sind.

Die Lösung unseres Problems muß folgenden Randbedingungen genügen:

1. Das Feld \mathfrak{E}_0 muß auf der als linienförmig gedachten Primärstromleitung eine logarithmische Singularität besitzen, damit $\mathfrak{H}_0 = i \frac{c}{\omega} \text{rot } \mathfrak{E}_0$ in unmittelbarer Umgebung desselben das bekannte magnetische Feld eines stationären linearen Stromes darstelle.

2. Die tangentielle Komponente von \mathfrak{E}_0 bezüglich der Erdoberfläche muß sich überall auf dieser stetig verhalten, die normale Komponente an ihrer unteren Seite verschwinden.

3. Die tangentielle sowie die normale Komponente von \mathfrak{H}_0 müssen sich an der Erdoberfläche überall stetig verhalten.

4. \mathfrak{E} und \mathfrak{H} müssen mit zunehmender Entfernung vom Kabel abnehmen und ein nach außen laufendes elektromagnetisches Wellenfeld darstellen.

Wir legen die x - z -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z in die Erdoberfläche, wobei $y > 0$ den oberen Halbraum bedeute und das erregende Kabel parallel zur z -Achse senkrecht über dieser im Abstände η verlaufe (Abb. 3). Ferner nehmen wir an, daß das Kabel *beiderseits* in das *Unendliche* führe, d. h. praktisch, daß seine geerdeten Enden in einer Entfernung liegen mögen, die *groß* gegen die uns interessierenden *seitlichen Abstände* x vom Kabel sei oder daß diese Abstände sehr klein gegen den Durchmesser einer geschlossenen Kabelschleife seien.

Unter dieser Annahme läßt sich die Lösung ansetzen in der Form:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= 0 & H_{0x} &= i \frac{c}{\omega} \frac{\partial E}{\partial y} \\ E_{0y} &= 0 & H_{0y} &= -i \frac{c}{\omega} \frac{\partial E}{\partial x} \\ E_{0z} &= E(x, y) & H_{0z} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

mit den Bedingungen, daß $E(x, y)$ im Kabelquerschnitt logarithmisch unendlich werde und auf der x -Achse beim Überqueren derselben sich stetig verhalte; der zweiten

Bedingung muß auch $\frac{\partial E}{\partial y}$ genügen. Dazu tritt noch

die genannte Forderung über das Verhalten im Unendlichen der x - y -Ebene. Das ganze Problem beschränkt sich daher auf die Bestimmung des induzierten elektrischen Feldes E , das dem induzierten Strome überall ober- sowie unterhalb der Erdoberfläche parallel gerichtet ist. Den Phasenverhältnissen wird in üblicher Weise dadurch Rechnung getragen, daß die Funktion E komplex angesetzt wird.

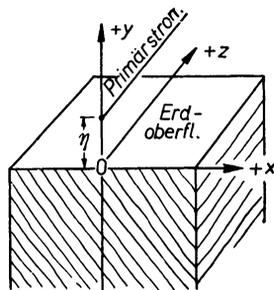


Abb. 3.

Die den genannten Bedingungen genügende Lösung $E(x, y)$ wurde von *F. Pollaczek* [11] für ein in *endlicher Entfernung* $\eta > 0$ über der Erdoberfläche verlaufendes Kabel für den Lufthalbraum ($\eta > 0$) zu nachrichtentechnischen Zwecken angegeben:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= -2i \frac{J\omega}{c^2} \left\{ \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + \eta)^2}{x^2 + (y - \eta)^2}} + \right. \\ &+ \frac{1}{k^2} \cdot \int_{-\infty}^0 ds e^{s(ix + y + \eta)} (-s - \sqrt{s^2 - k^2}) + \\ &\left. + \frac{1}{k^2} \cdot \int_0^{+\infty} ds e^{s(ix - y + \eta)} (s - \sqrt{s^2 - k^2}) \right\} \end{aligned} \quad (8a)$$

Unter Benutzung bekannter Integraldarstellungen für Zylinder- und verwandte Funktionen (2, 12) ergibt sich:

$$E(x, y) = -2i \frac{Jw}{c^2} \left\{ \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + \eta)^2}{x^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{1}{\xi_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{i\pi}{2\xi_1} (H_1^{(1)}(\xi_1) - G_1(\xi_1)) + \frac{i\pi}{2\xi_2} (H_1^{(1)}(\xi_2) - G_1(\xi_2)) \right\} \quad (8b)$$

mit der Bedeutung:

$$k = \frac{\sqrt{4\pi\sigma w}}{c} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\xi_1 = k(x - iy - i\eta)$$

$$\xi_2 = -k(x + iy + i\eta)$$

J bedeutet die Stärke des Primärstromes in abs. elektrost. Einheiten. $H_1^{(1)}$ und G_1 sind bekannte Zylinderfunktionen. Die Lösung (8) gilt im ganzen oberen (nichtleitenden) Halbraume, sofern die Höhe η des Kabels über der Erdoberfläche groß gegenüber dem Kabeldurchmesser ist.

Die uns hier interessierenden magnetischen Feldkomponenten an der Erdoberfläche erhält man nach (7) durch Differentiation von E nach x und y für $y = 0$ und nachträglichen Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$. Auf diese Weise dürften die Schwierigkeiten mathematischer Art, die sich bei der Behandlung eines auf dem leitenden Boden unmittelbar aufliegenden Kabels ergeben, in einer der Praxis sehr weit entsprechenden Weise umgangen sein. Es ergibt sich so das magnetische Gesamtfeld des Kabelstromes für den Fall, daß die Höhe η des Kabels über der Erdoberfläche zwar sehr klein gegenüber dem horizontalen Abstände (x) des Aufpunktes vom Kabel, dagegen noch groß gegenüber dem Durchmesser des Kabels ist, in der Entfernung x nach bekannten Relationen zwischen Zylinderfunktionen [2, 14] zu:

$$H_{0x} = \frac{2J}{c} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot G_2(k|x|) \quad G_2 = J_2 + i\Omega_2$$

$$H_{0y} = \frac{2J}{c} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left\{ -\frac{4}{k^2 x^2} + i\pi H_2^{(1)}(k|x|) \right\} \quad (9)$$

$H_2^{(1)}$ bedeutet hierbei die Hankelsche Funktion 1. Art der Ordnung 2, J_2 die Besselsche Funktion und Ω_2 die Lommel-Webersche Funktion der Ordnung 2.

3. Das magnetische Gesamtfeld der gestreckten Wechselstromleitung auf homogen leitendem Untergrund

Wie aus den Formeln (9) für das resultierende magnetische Gesamtfeld an der Erdoberfläche ($y = 0$) hervorgeht, läßt sich jede der beiden Komponenten H_x und H_y auffassen als die y -Komponente des reinen Primärfeldes vom Betrage $\frac{2J}{c} \cdot \frac{1}{x}$ multipliziert mit einem dimensionslosen komplexen Faktor F_x bzw. $F_y(x)$.

$$H_x = \frac{2J}{c} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot F_x(x) \cdot e^{i\omega t}$$

$$H_y = \frac{2J}{c} \cdot \frac{1}{x} \cdot F_y(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad (10a)$$

wobei $F_x = F_x^{(r)} + i F_x^{(i)} = G_2(k|x|)$

$$F_y = F_y^{(r)} + i F_y^{(i)} = F \frac{4}{k^2 x^2} \cdot \pm i \pi H_2^{(1)}(k|x|), x \geq 0 \quad (10b)$$

nur von der dimensionslosen „numerischen Entfernung“ $k x$ abhängen. Man gewinnt daher einen Überblick über die Abwandlung des reinen Primärfeldes infolge der Leitfähigkeit des Untergrundes an Hand einer graphischen Darstellung der Faktoren F_x und F_y , getrennt nach Real- und Imaginärteil (Abb. 4). Der Absolutbetrag des Faktors k hat die Bedeutung einer reziproken Länge, die bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ mit der elektromagnetischen Eindringtiefe

$$\tau = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma \nu}}$$

übereinstimmt, in welcher die Amplitude einer senkrecht auf die Erdoberfläche auffallenden elektromagnetischen Welle der Frequenz ν auf den e -ten Teil abgesunken sein würde. Die Faktoren F_x und F_y hängen also nur vom Verhältnis des Abstandes x des Meßpunktes vom Kabel zu dieser Eindringtiefe ab, und der Feldverlauf ist für jeden Wert von σ und ν durch diese allgemeinen

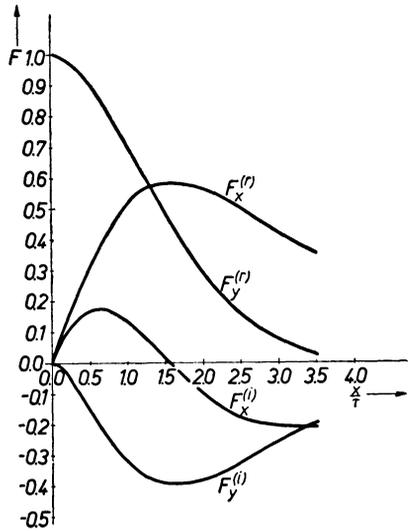


Abb. 4. Realteil $F^{(r)}$ und Imaginärteil $F^{(i)}$ der Faktoren F_x und F_y in Abhängigkeit von $\frac{x}{\tau}$

Funktionen von $\frac{x}{\tau}$ darstellbar. Je höher die Leitfähigkeit oder die Frequenz, in um so geringerer Entfernung treten merkliche Abweichungen vom reinen Primärfelde auf, und auf einen um so engeren Streifen beiderseits des Kabels zieht sich der Abfall der Feldgrößen zusammen. Die vier Funktionen $F_x^{(r)}$, $F_x^{(i)}$, $F_y^{(r)}$ und $F_y^{(i)}$ nähern sich für große Werte von $\frac{x}{\tau}$ sämtlich asymptotisch null, und zwar in oszillierender Weise mit der Periode $2\pi\tau$ (was in Abb. 4 nicht mehr zum Ausdruck kommt).

Eine andere Möglichkeit der Darstellung ergibt sich, wenn man H_{0x} und H_{0y} schreibt in der Form:

$$H_{0x} = \frac{2J}{c} \cdot k \cdot \frac{\pi}{kx} \cdot G_2(kx)$$

$$H_{0y} = \frac{2J}{c} \cdot k \cdot \left\{ -\frac{4}{k^3 x^3} + \frac{i\pi}{kx} H_2^{(1)}(kx) \right\} \quad (11)$$

Dann ist die Abhängigkeit von x ausschließlich eine solche von $kx \sim \frac{x}{\tau}$, und die Komponenten erscheinen proportional k , also dem Produkte $\sqrt{\sigma \nu}$.

Diese Proportionalität ist jedoch nur eine *scheinbare*, die durch den Faktor k in der eigentlichen Veränderlichen kx kompensiert wird. Tatsächlich ist der

Betrag der Feldkomponenten H_{0x} , H_{0y} in einem bestimmten Abstand vom Kabel im allgemeinen um so geringer, je größer das Produkt aus Leitfähigkeit und Frequenz ist. Trägt man die vier Feldkomponenten $H_{0x}^{(r)}$, $H_{0x}^{(i)}$, $H_{0y}^{(r)}$ und $H_{0y}^{(i)}$ selbst bis auf den Faktor $\frac{2J}{c\sigma}$ auf, wobei durch r und i Real-

bzw. Imaginärteil der betr. komplexen Komponente gekennzeichnet werden möge, so erhält man nach Abb. 5 eine Darstellung, die zwar keinen anschaulichen Vergleich mit dem ungestörten Primärfeld ermöglicht, dagegen den Verlauf der Feldkomponenten selbst mit zunehmendem $|x|$ wiedergibt.

Der Vektor $\mathfrak{S}_0^{(r)}$ stellt den mit dem erregenden Strom in Phase (0° — Feld), der Vektor $\mathfrak{S}_0^{(i)}$ den mit 90° Phasenvoreilung schwingenden Anteil (90° — Feld) des magnetischen Gesamtfeldes dar. Beide Vektorfelder sind in Abb. 6 graphisch dargestellt. Die schräg nach oben gerichteten ausgezogenen Pfeile geben das 0° -Feld, die nach unten gerichteten das 90° -Feld an. Das resultierende Feld ist *elliptisch polarisiert*, und zwar sind die beiden Vektoren $\mathfrak{S}_0^{(r)}$ und $\mathfrak{S}_0^{(i)}$

konjugierte Durchmesser der Schwingungsellipse, die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird und deren Achsen kurz gestrichelt eingezeichnet sind. Man entnimmt dieser Darstellung unmittelbar alle geometrischen und

Phaseneigenschaften des Feldes. In Kabelnähe (etwa $\frac{x}{\tau} > 0,5$) ist das Feld

mit guter Annäherung als *Biot-Savartsches* Feld des Primärstromes anzusehen. Mit zunehmender Entfernung nimmt die Elliptizität der Schwingung steigend zu, während die große Achse der Schwingungsellipse von der vertikalen allmählich in die horizontale Lage übergeht, ein Verhalten, das bei der Messung des sog. „Kippwinkels“ bestätigt gefunden wird. Der Vektor des (linear polarisierten) reinen Primärfeldes, welches sich für $\sigma = 0$ ergibt, ist zum Vergleich eingetragen (senkrecht stehende, lang gestrichelt gezeichnete Pfeile). Das Erdstreufeld ergibt sich durch geometrische Differenzbildung, indem man von $\mathfrak{S}_0^{(r)}$ den Primärfeldvektor abzieht und die Differenz mit $\mathfrak{S}_0^{(i)}$ kombiniert (Abb. 7). Man erkennt, daß der *elliptische Charakter* dieses Feldes mit steigender Entfernung vom Kabel zunächst ebenfalls *zunimmt*, für größere numerische

Entfernungen, etwa $\frac{r}{\tau} > 3$, dagegen ein mit wachsender Annäherung *linear*

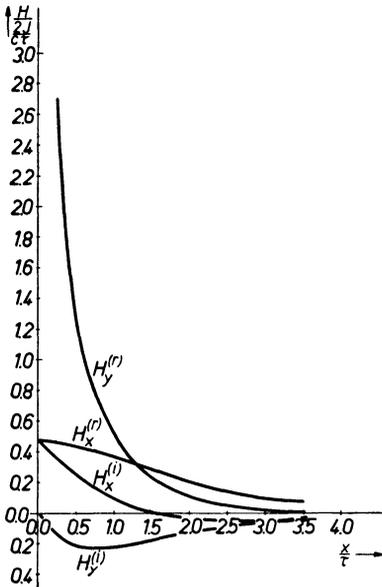


Abb. 5. Realteil $H^{(r)}$ und Imaginärteil $H^{(i)}$ der magnetischen Feldkomponenten H_x und H_y in Abhängigkeit von $\frac{x}{\tau}$ in Einheiten $\frac{2J}{c\tau}$

polarisiertes, dem reinen Primärfelde genau *entgegengesetzt gerichtetes* Feld sich herausbildet. Man hat darin den augenfälligsten Ausdruck für das von *F. Pol-laczek* a. a. O. abgeleitete theoretische Ergebnis zu sehen, daß der induzierte Bodenstrom, der sich hauptsächlich auf die nächste Kabelumgebung kon-

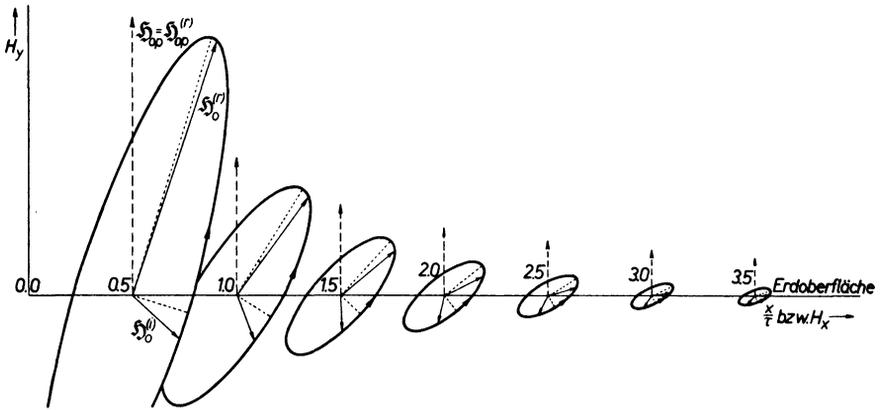


Abb. 6. Die Drehfeldellipse des magnetischen Gesamtfeldes in Abhängigkeit von $\frac{x}{r} \cdot S_{00}^{(r)}$ 0°-Komponente, $S_{00}^{(i)}$ 90°-Komponente (Vorellung). S_{0p} das reine Primärfeld

zentriert, insgesamt, d. h. bei Integration der Sekundärstromdichte über die ganze untere *x-y*-Halbebene, dem erregenden Kabelstrome *gleich* und *entgegengesetzt gerichtet* ist und daher in hinreichender Entfernung dessen magnetisches Feld gerade kompensiert.

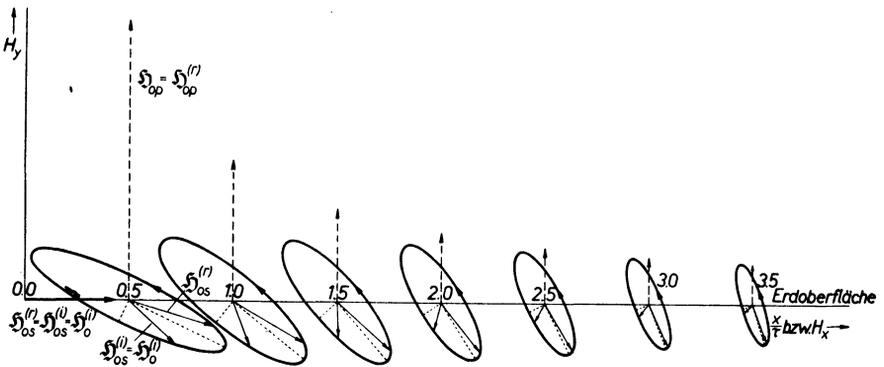


Abb. 7. Die Drehfeldellipse des magnetischen Erdstrefelfeldes in Abhängigkeit von $\frac{x}{r} \cdot S_{00}^{(r)}$ 0°-Komponente $S_{00}^{(i)}$ 90°-Komponente (Vorellung). S_{0p} das reine Primärfeld

4. Die Bestimmung der mittleren Bodenleitfähigkeit parallel zur Erdoberfläche mittels geradliniger Primärleitung nach einigen gebräuchlichen elektromagnetischen Meßverfahren

An sich könnte jede der vier in Abb. 4 bzw. 5 dargestellten Kurven zur Bestimmung von τ bzw. σ benutzt werden. Es wäre nur erforderlich, diese Kurve doppelt-logarithmisch aufzutragen und die gemessene Kurve in gleicher Darstellungsweise mit der theoretischen zur Deckung zu bringen, was bei hinreichend homogenem Untergrund und richtiger Orientierung der Primärstromleitung, nämlich parallel zur horizontalen Hauptleitfähigkeitsrichtung, stets möglich sein muß. Man kann dann aus dem Werte x^* für x der gemessenen Kurve, der $x = \tau$ der theoretischen Kurve entspricht, den gesuchten spezifischen Widerstand $\rho_{||}$ in $\Omega \cdot m$ entnehmen gemäß

$$\rho_{||} = 4 \pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot \nu \cdot x^{*2}, \quad (12)$$

wobei ν in Hz und x^* in m einzusetzen sind.

Die Messung der Komponenten $H_{0x}^{(r)}$, $H_{0x}^{(i)}$, $H_{0y}^{(r)}$ und $H_{0y}^{(i)}$ erfordert jedoch die Übertragung der Primärstromphase an den Meßort, was technisch

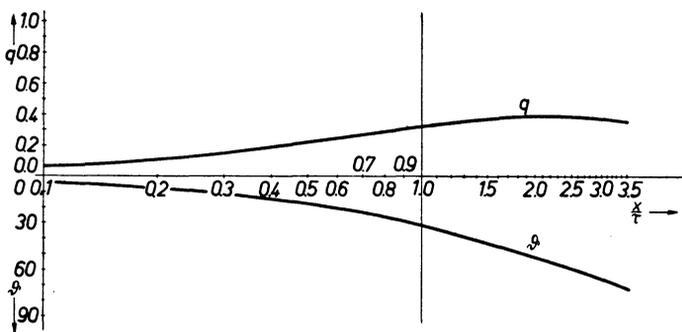


Abb. 8. Achsenverhältnis q und Kippwinkel θ der großen Achse (im Uhrzeigersinne gegen die Lotrichtung gezählt) der Drehfeldellipse des magnetischen Gesamtfeldes in Abhängigkeit von $\frac{x}{\tau}$.

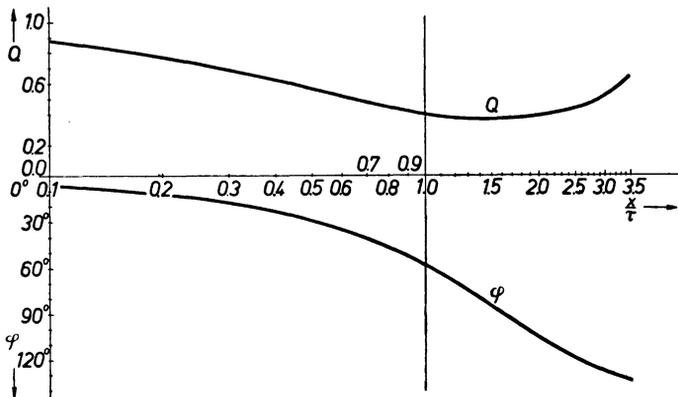


Abb. 9. Amplitudenquotient Q und Phasendifferenz φ für die nach dem Kreuzrahmenverfahren gemessenen Feldkomponenten in Abhängigkeit von $\frac{x}{\tau}$.

einen erheblichen Aufwand erfordert. Bei den gebräuchlichen Meßmethoden wird daher meist nur ein Vergleich verschiedener Komponenten hinsichtlich Amplitude und Phase oder die Bestimmung von Achsenverhältnis oder Neigungswinkel der Drehfeldellipse (sog. „Kippwinkel“) u. ä. vorgenommen. Da die Komponenten von \mathcal{S} den Ausgangspunkt für die Berechnung jeder beliebigen praktisch geeigneten Meßgröße bilden, seien einige nach den Tafeln von *F. Tölke* [12] berechneten Werte für $F_x^{(r)}$, $F_x^{(i)}$, $F_y^{(r)}$ und $F_y^{(i)}$ in Tabelle 1 zusammengestellt. In Abb. 8 sind Kippwinkel und Achsenverhältnis, in Abb. 9 Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis für die beiden um je 45° gegen die Vertikale geneigten Richtungen (sog. „Kreuzrahmenverfahren“) in Abhängigkeit von $\frac{x}{\tau}$, logarithmisch aufgetragen, dargestellt. Tabelle 2 gibt die

numerischen Werte für Kippwinkel ϑ , Achsenverhältnis q , Amplitudenquotient Q und Phasendifferenz φ . Jede dieser Kurven kann zur Ermittlung von $\varrho_{||}$ dienen, indem jeweils die empirische Kurve mit ihr zur Deckung gebracht und wie oben angegeben verfahren wird.

Tabelle 1

$\frac{x}{\tau}$	$F_x^{(r)}$	$F_x^{(i)}$	$F_y^{(r)}$	$F_y^{(i)}$
0.0	0.000	0.000	+ 1.000	0.000
0.2	+ 0.127	+ 0.100	+ 0.987	- 0.037
0.4	+ 0.250	+ 0.155	+ 0.942	- 0.113
0.6	+ 0.353	+ 0.175	+ 0.875	- 0.194
0.8	+ 0.443	+ 0.165	+ 0.796	- 0.264
1.0	+ 0.515	+ 0.132	+ 0.708	- 0.323
1.2	+ 0.561	+ 0.087	+ 0.622	- 0.360
1.4	+ 0.580	+ 0.041	+ 0.530	- 0.384
1.6	+ 0.585	- 0.007	+ 0.445	- 0.392
1.8	+ 0.580	- 0.057	+ 0.363	- 0.392
2.0	+ 0.568	- 0.102	+ 0.281	- 0.384
2.5	+ 0.505	- 0.180	+ 0.156	- 0.330
3.0	+ 0.425	- 0.205	+ 0.074	- 0.260
3.5	+ 0.355	- 0.210	+ 0.025	- 0.200

Tabelle 2

$\frac{x}{\tau}$	ϑ	q	Q	φ
0.0	0°00'	0.000	1.000	0°00'
0.2	8°10'	0.105	0.773	11°45'
0.4	14°40'	0.183	0.619	23°20'
0.6	20°45'	0.245	0.515	35°00'
0.8	26°20'	0.291	0.443	46°35'
1.0	31°35'	0.323	0.397	58°00'
1.2	36°25'	0.341	0.373	69°05'
1.4	40°35'	0.360	0.366	79°35'
1.6	44°40'	0.370	0.367	89°10'
1.8	48°25'	0.383	0.377	97°55'
2.0	51°50'	0.390	0.390	105°10'
2.5	59°00'	0.376	0.436	118°30'
3.0	65°15'	0.365	0.514	127°15'
3.5	71°55'	0.350	0.650	133°00'

Analog zum Vier-Punkt-Verfahren der Tiefensondierung lassen sich auch Zwei- und Mehrschichtdiagramme für geschichteten Untergrund berechnen. Die Zahl der dimensionslosen unabhängigen Parameter, die jedes Individuum der Kurvenschar festlegen, ist aber größer als beim Vier-Punkt-Verfahren. So wird z. B. im Falle einer einzigen homogenen Schicht von der Mächtigkeit h und der Eindringtiefe τ über unbegrenzten Untergrund von der Eindringtiefe τ_0 jede Kippwinkelkurve, etwa gegen $\frac{x}{\tau}$ aufgetragen, sowohl von $\frac{\tau}{h}$ als auch von $\frac{\tau_0}{h}$

abhängen. Dieser Umstand würde zwar für eine elektromagnetische Tiefensondierung horizontal geschichteter anisotroper Böden mittels gestreckter Primärleitung in auswertungstechnischer Hinsicht eine Erschwerung bedeuten. Diesem Nachteil stehen aber als praktische Vorteile gegenüber, 1. daß eine Hauptleitfähigkeit für sich allein gemessen werden kann und 2. daß die Primärstromleitung keinerlei Veränderung, wie bei der Vierpunkt- und der Zentralinduktionsmethode, erfahren muß, um die Eindringtiefe zu variieren. Andererseits werden Lateraleffekte bei Abweichungen von der ungestörten Horizontallagerung stärker als bei den beiden anderen Sondierungsverfahren in Erscheinung treten, so daß man das Verfahren zweckmäßig nur bei ausgedehnter ungestörter Horizontallagerung anwenden wird.

Die endliche gestreckte Wechselstromleitung mit Erdrückleitung kann hinsichtlich ihres Magnetfeldes mit um so besserer Annäherung als unbegrenzt betrachtet werden, je geringer der Abstand des Aufpunktes im Verhältnis zur Länge der Leitung ist. Theoretisch sollten also die Voraussetzungen für die vorangehende Betrachtung in unmittelbarer Nähe des Primärstromes am besten erfüllt sein. Praktisch gesehen ist dieses jedoch bei der Messung des spezifischen Widerstandes eines homogenen Bodens aus zweierlei Gründen nicht der Fall:

1. Je geringer der Abstand der Meßanordnung vom Primärstrom wird, um so stärker wird sich ihre Ausdehnung, z. B. die des Induktionsrahmens zur Bestimmung des Kippwinkels sowie der Höhenunterschied seines Mittelpunktes gegenüber dem Primärstromkabel, ferner eine geringe Geländeunebenheit, störend bemerkbar machen.
2. Das magnetische Feld in unmittelbarer Kabelumgebung wird hauptsächlich durch die Induktionsströme der obersten Bodenschicht mitbestimmt. Diese stellt aber als Ackerkrume, Verwitterungsschicht oder sonstige bedeckende Lockermasse in elektrischer Hinsicht im allgemeinen ein Material von wesentlich anderer Leitfähigkeit als das darunterliegende feste homogene Gestein dar, dessen spezifischer Widerstand eigentlich bestimmt werden soll.

Hieraus resultieren sechs Regeln, die in der Praxis zu beachten sind:

1. Der geometrische Mittelpunkt der Induktionsrahmen soll in einer Höhe über dem Boden liegen, die als klein gegen seinen horizontalen Abstand $|x|$ vom Primärstrom zu betrachten ist.
2. Geländehöhenunterschiede innerhalb eines Umkreises um den Fußpunkt des Meßprofils auf dem Primärkabel, der ein Mehrfaches von $|x|$ beträgt, müssen klein gegen diesen Abstand sein.

3. Die Mächtigkeit der stets vorhandenen inhomogenen Lockerschichten oder dergleichen über dem als homogen zu betrachtenden Untergrund muß klein gegen $|x|$ sein.
4. Die elektromagnetische Eindringtiefe τ des Untergrundes muß groß gegen die Mächtigkeit der Bedeckung sein.
5. Die Länge der Primärleitung muß groß gegen $|x|$ sein.
6. Das x -Intervall, innerhalb dessen z. B. der Kippwinkel, die Phasendifferenz zweier Komponenten oder dergleichen aufgenommen werden, darf nicht zu kurz sein. Sonst besteht die Gefahr, daß eine kleine Störung des Normalverlaufs, etwa durch eine gut leitende Spalte oder dergleichen die Kurve unauswertbar macht, weil der normale Verlauf nicht deutlich erkennbar ist.

Ist das Gelände geneigt, aber in genügender Ausdehnung als eben aufzufassen, so übernimmt naturgemäß die Geländeoberflächennormale die Rolle der Lotrichtung.

Literatur

- [1] *Buchheim, W.*: Die Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstandes von anisotrop leitenden homogenen Medien nach der Vier-Punkt-Methode. *Geofisica pura e applicata* **10**, Heft 3/4 (1947).
- [2] *Jahnke, E. u. Emde, F.*: Funktionentafeln. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1938.
- [3] *Koenigsberger, J. G.*: Zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde durch Induktion. *Phys. Z.* **31** (1930), S. 487—498; *Phys. Z.* **35** (1935), S. 6—8.
- [4] *Koenigsberger, J. G.*: Induktionsmessung im Zentrum einer Kreisschleife zur Leitfähigkeitsbestimmung der Erde. *Gerl. Beitr. Erg.-Heft* **3** (1933), S. 392—407.
- [5] *Koenigsberger, J. G.*: Ergänzungen zur Bestimmung des wahren Widerstandes im Erdboden nach dem Zentralinduktionsverfahren und dem Vier-Punkte-Verfahren. *Beitr. z. angew. Geophysik* **4** (1934), S. 201—216.
- [6] *Koenigsberger, J. G.*: Elektrische Vertikalsondierung von der Erdoberfläche aus mit der Zentralinduktionsmethode. *Beitr. z. angew. Geophysik* **7** (1938), S. 112—161.
- [7] *Maillet, R. u. Doll, H. G.*: Sur un théorème relatif aux milieux électriquement anisotropes et ses applications a la prospection électrique en courant continu. *Erg.-Hefte z. angew. Geophysik* **3** (1933) S. 109—124.
- [8] *Neumann, F.*: Vorlesungen über elektrische Ströme, § 90. Leipzig, 1884.
- [9] *Nunier, W.*: Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde in verschiedenen Tiefen durch die von einem Kreisstrom induzierten Ströme (mit Vermeidung merkl. Skineffektes). *Beitr. z. angew. Geophysik (Erg.-H.)* **3**, (1933) S. 370—391.
- [10] *Nunier, W.*: Die Berechnung der vertikalen Komponente des Magnetfeldes in der Nähe eines vertikalen magnetischen Dipoles, der auf der Grenzfläche zweier verschiedener Medien liegt. *Ann. d. Phys. (V)* **20** (1934), S. 513—528.
- [11] *Pollaczek, F.*: Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung. *Elektr. Nachr. Techn.* **3** (1926), S. 339.
- [12] *Tölke, F.*: Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen. K. Wittwer, Stuttgart 1936.
- [13] *Wenner, F.*: A method of measuring earth-resistivity. *U. S. Bull. Bur. of Stand.* **12** (1916), S. 469—478.
- [14] *Weyrich, R.*: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1937.