

Werk

Jahr: 1957

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:23

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0023

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0023

LOG Id: LOG_0023

LOG Titel: Zur Frage der "scheinbaren" und "wirklichen Neigung"

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Frage der "scheinbaren" und "wirklichen Neigung" ¹⁾

Von W. Ullmann und R. Maaz, Jena ²⁾

Zusammenfassung: Für Planstörungen, speziell für durch Fourierpolynome dargestellte Planwellen, werden "scheinbare" und "wirkliche Neigung" der seismisch bewegten Erdoberfläche exakt interpretiert. Vorgenommene Abschätzungen dieser Neigungseffekte hängen wesentlich vom Grad des Fourierpolynoms ab. Die *Wiechertsche* "mittlere horizontale Drehung" wird mit der tangential gemittelten lokalen horizontalen Drehung des Bodens verglichen.

Abstract: For plane disturbances, specially for plane waves, representable by Fourier polynomials, the expressions of "apparent" and "real slope" of seismically moved earth-surface are interpreted exactly. Executed computations of these slope effects are depending on the degree of the Fourier polynomial. *Wiecherts* "middle horizontal rotation" is compared with the tangentially midedded horizontal rotation of ground.

I.

Das starre Fundament eines Stationsseismographen ist in praxi stets so dimensioniert, daß die durch seismische Störungen verursachten Bewegungen des angrenzenden nichtstaren Bodens mit hinreichender Genauigkeit durch die Gestellbewegungen wiedergegeben werden. Die Drehung eines starren Körpers läßt sich durch seine drei Eulerschen Winkel beschreiben. Ein Maß für die Eulerschen Winkel des Fundaments bzw. Gestells sieht *Wiechert* in der sog. *wirklichen Neigung* und der *mittleren horizontalen Drehung* eines Elementes der anliegenden Bodenoberfläche. Diese Dreheffekte dürfen in hinreichend großer Epizentralentfernung (Fernbeben), aber nicht prinzipiell vernachlässigt werden.

Der für die Beschreibung einer Bodenbewegung angesetzte raumzeitlich veränderliche Verschiebungsvektor führt i. a. zu einer Deformation der Bodenoberfläche und damit wenigstens formal zu den beiden *Wiechertschen* Dreheffekten. Bei Fernbeben sind, wie schon *Wiechert* in seiner "Theorie der automatischen Seismographen" [1] feststellte, i. a. beide Effekte von der gleichen Größenordnung und erreichen höchstens Bruchteile einer Winkelsekunde.

¹⁾ Vorgetragen von R. Maaz auf der Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft in Hamburg 1956.

²⁾ Dr. W. Ullmann und Dipl.-Math. R. Maaz, Institut für Bodendynamik und Erdbebenforschung in Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Eine erweiterte Theorie der Seismographen (s. z.B. [2]) muß sich aber schon deswegen mit allgemeineren Gestellbewegungen befassen, um über die kinematische Struktur des Gehänges im Hinblick auf die Empfindlichkeit des Instruments gegenüber solchen Gestellbewegungen Aufschluß zu gewinnen. Es ist daher im Rahmen der erweiterten Theorie von Interesse, die *Wiechertschen* Definitionen der wirklichen Neigung und der mittleren horizontalen Drehung mathematisch exakt zu interpretieren. Im folgenden werden diese Ausdrücke hergeleitet und mit den *Wiechertschen* Näherungen verglichen.

Neben der wirklichen Neigung hat *Wiechert* in [1] den Begriff der *scheinbaren Neigung* eingeführt. Er weist darauf hin, daß bei Epizentralentfernungen von mehr als 1000 km nur selten im Jahr scheinbare Neigungen in der Größenordnung einer Winkelsekunde auftreten. Durch Fernbeben verursachte Bodenverrückungen um einige Millimeter können jedoch die scheinbare Neigung bis auf mehrere Winkelsekunden anwachsen lassen.

Aus der allgemeinen Bewegungsgleichung eines Seismographen, Schwingungs- oder Erschütterungsmessers ist ersichtlich, daß sich kein derartiges Instrument konstruieren läßt, das nur gegen eine der beiden Neigungsarten empfindlich ist. Um einen Vergleich dieser beiden Neigungseffekte in jedem konkreten Falle zu ermöglichen, soll auch der mathematische Ausdruck für die scheinbare Neigung entwickelt werden. Hier wie bei der wirklichen Neigung zeigt es sich, daß die exakte Interpretation ohne wesentlichen mathematischen Aufwand möglich und daher den entsprechenden *Wiechertschen* Näherungsausdrücken vorzuziehen ist.

Zur Abrundung der formalen Betrachtungen werden verschiedenartige zweckmäßige Abschätzungen vorgenommen.

Mit den vorliegenden Bemerkungen wird nicht zuletzt angestrebt, zur Klärung des genannten Begriffskomplexes beizutragen.

II.

Scheinbare Neigung, wirkliche Neigung sowie horizontale Drehung sollen an einem Punkte R der Oberfläche betrachtet werden. In seiner Ruhelage falle R mit dem Ursprung eines weiterhin zugrundegelegten kartesischen Koordinatensystems mit vertikaler 3-Achse zusammen. Die zeitlich veränderlichen Koordinaten von R sind r_1 , r_2 , t_3 , kurz $r_i = r_i(t)$.

Die *scheinbare Neigung* ν ist definiert als Winkel zwischen dem Vektor der Schwerebeschleu-

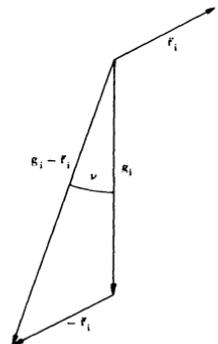


Abb. 1

nigung g_i und der scheinbaren Schwerebeschleunigung $g_i - \ddot{r}_i$ (Abb. 1). Letztere stellt die in einem mit der Beschleunigung r_i translatorisch bewegten Bezugssystem wirksame Schwerebeschleunigung dar. Man errechnet für die scheinbare Neigung

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\sqrt{\ddot{r}_1^2 + \ddot{r}_2^2}}{g + \ddot{r}_3}.$$

g ist der Betrag der Schwerebeschleunigung, \ddot{r}_3 die vertikale Maßzahl von \ddot{r}_i ; der Zähler gibt den Betrag der horizontalen Komponente von \ddot{r}_i an.

Die *wirkliche Neigung* ψ ist der zeitlich veränderliche Winkel zwischen der Horizontalebene und der Tangentialebene im Punkte R an die momentane Bodenoberfläche, bzw. der Winkel zwischen den Normalen dieser beiden Ebenen (Abb. 2).

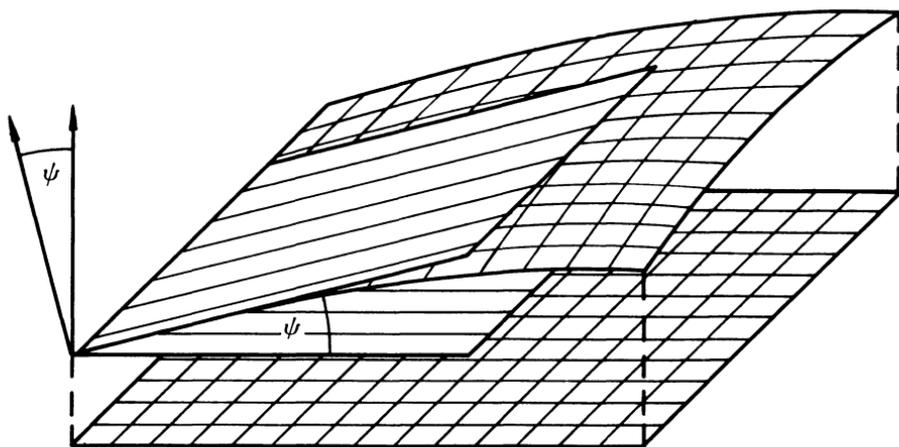


Abb. 2

Eine gewisse Umgebung von R möge von einer Planstörung erfaßt werden. Bei einer solchen Störung führen diejenigen Bodenteilchen, die auf derselben zur konstanten Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene liegen, gleiche Bewegungen aus. Die Bewegung eines Bodenteilchens mit den Koordinaten x_i wird durch den Verschiebungsvektor u_i dargestellt. Die Formel für die wirkliche Neigung wird besonders übersichtlich, wenn die Fortpflanzungsrichtung in eine Koordinatenebene, z.B. die vertikale 1,3-Ebene gelegt wird. Sie lautet dann

$$(1) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}.$$

Neben der wirklichen Neigung betrachtet *Wiechert* die lokale Horizontaldrehung der Bodenoberfläche in R.

Ein in R angeheftetes horizontales Richtelement wird bei einer seismischen Störung i. a. nicht horizontal bleiben. Für die horizontale Drehung ist aber nur die horizontale Komponente des Richtelementes maßgebend. Der zeitlich veränderliche Winkel zwischen dieser Komponente und der Ausgangsrichtung hängt auch von der Ausgangsrichtung ab. Die *mittlere horizontale Drehung* im Punkte R ergibt sich aus dem Mittelwert des Integrals über alle diese Winkel.

Da der Integrand nicht geschlossen integrierbar ist, erweist es sich als zweckmäßig, stattdessen über den Tangens dieses Winkels zu mitteln. Im Falle der vorhin eingeführten Planstörung ergibt sich dann für den mittleren Tangens der Horizontaldrehung

$$(2) \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2}}$$

III.

Den exakten Ausdrücken für ν , ψ und χ sollen nun die *Wiechertschen* Näherungen gegenübergestellt werden.

Da *Wiechert* die vertikale Beschleunigungskomponente f_3 unberücksichtigt läßt, gelangt er zu

$$\nu_{\mathbb{W}} = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{g},$$

wobei der Tangens durch das im Bogenmaß gemessene Argument ersetzt ist.

Die wirklich Neigung gibt *Wiechert* zu

$$\psi_{\mathbb{W}} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

an. Diese Gleichung entsteht aus (1), indem einerseits der Tangens durch sein Argument ersetzt und andererseits der nicht immer gegen eine kleine Term $\partial u_1 / \partial x_1$ vernachlässigt wird.

Durch Streichen der Größen $\partial u_1 / \partial x_1$ und $\frac{1}{4} [\partial u_2 / \partial x_1]^2$ in (2) gelangt man zum *Wiechertschen* Ausdruck

$$\chi_w = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

für die mittlere horizontale Drehung, wenn man zugleich χ anstelle von $\text{tg } \chi$ setzt.

IV.

Das raumzeitliche Verschiebungsfeld der u_i ist meist nicht bekannt, doch lassen sich leicht Schranken für die Größen u_i , f_i und $\partial u_i / \partial x_j$ angeben, die zu einer Abschätzung der Winkel ν , ψ und χ verhelfen.

Unterliegen die Maßzahlen des Beschleunigungsvektors in R der Beschränkung

$$|f_i| \leq m_i < g \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

so gilt

$$|\text{tg } \nu| \leq \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{g - m_3} ,$$

d. h. der Tangens der scheinbaren Neigung und damit auch ν können den rechts stehenden Betrag nicht überschreiten.

Eine ähnliche Abschätzung ergibt sich für den Tangens der wirklichen Neigung aus der Beschränkung der Ableitungen der Verschiebungsmaßzahlen nach den Raumkoordinaten (Körperkoordinaten), nämlich

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right| \leq n_i \quad \longrightarrow \quad |\text{tg } \psi| \leq \frac{n_3}{1 - n_1} .$$

Damit der Nenner nicht verschwindet, muß $n_1 < 1$ sein.

Unter der gleichen Voraussetzung findet man für die mittlere horizontale Drehung

$$|\text{tg } \chi| \leq \frac{\frac{1}{2} n_2}{\sqrt{1 - n_1 - \frac{1}{4} n_2^2}} .$$

Der Radikand muß positiv sein. Das trifft gewiß zu, wenn n_1 und n_2 den Wert 0,828 nicht überschreiten.

V.

In die angegebenen Abschätzungen gehen Schranken für die Beschleunigung \ddot{r}_i bzw. für die partiellen Ableitungen von u_i nach x_j ein. Es liegt nahe, diese Schranken durch die Komponenten der Maximalelongation zu ersetzen. Hierzu denke man sich die Planstörung durch den Spezialfall einer streng periodischen Planwelle angenähert. Diese stets durch eine Fourierreihe darstellbare Störungsform möge bereits durch ein Fourierpolynom k -ten Grades hinreichend gut beschrieben werden:

$$u_i = u_i(l, t) = \sum_{\kappa=0}^k \left\{ a_i^\kappa \cos 2\pi\kappa \left(\frac{t}{r} - \frac{l}{\lambda} \right) + b_i^\kappa \sin 2\pi\kappa \left(\frac{t}{r} - \frac{l}{\lambda} \right) \right\} .$$

Hier sind die drei Gleichungen für die Maßzahlen u_1, u_2, u_3 des Verschiebungsvektors zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt. k ist der Grad des Polynoms, t die Zeit, r die Grundperiode, λ die Wellenlänge und l der Abstand der Phasenebenen oder Ebenen gleichen Verschiebungsvektors vom Ursprung.

Zweimalige Differentiation nach t bzw. einmalige nach l ergibt die Fourierpolynome für $\ddot{r}_i = \ddot{u}_i(0, t)$ und $\partial u_i / \partial l$. Fällt die Fortpflanzungsrichtung wieder in die 1,3-Ebene, dann sind die Größen $\partial u_i / \partial x_j$ aus $\partial u_i / \partial l$ und dem Emergenzwinkel η einfach zu berechnen.

Es liege nun die explizite Fourierdarstellung *nicht* vor; es soll jedoch ein bestimmter Grad dieses Polynoms angenommen werden. Aus der Grundperiode und der Ausbreitungsgeschwindigkeit sei die Wellenlänge ermittelt. Weiter mögen aus den Aufzeichnungen geeigneter Seismographen die Maximalelongationen R_1, R_2, R_3 bekannt sein. Aus

$$|r_i| < R_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

läßt sich nun eine Abschätzung der Fourierkoeffizienten gewinnen, die zu der Beschränkung

$$|tg \nu| < \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2} \sin \eta}{\frac{r^2 \sqrt{2} g}{8\pi \binom{2k+2}{3}} - R_3 \sin \eta}$$

für die scheinbare Neigung einerseits und

$$|tg \psi| < \frac{R_3 \sin \eta}{\frac{\lambda \sqrt{2} g}{8\pi k(k+1)} - R_1 \sin \eta}$$

für die wirkliche Neigung andererseits verhilft. Ebenso kann man bei der mittleren horizontalen Drehung vorgehen.

Diese Abschätzungen zeigen den starken Einfluß des Fouriergrades k , denn für $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ besitzt $\binom{2k+2}{3}$ die Werte 4, 20, 56, 120, ... Für hohes k kann schon ein kleines R_3 bzw. R_1 die Differenz im Nenner recht klein und damit die Schranke erheblich groß werden lassen.

VI.

Zur Berechnung der scheinbaren Neigung benötigt man die Zerlegung des Beschleunigungsvektors in die horizontale und vertikale Komponente. Falls lediglich der Beschleunigungsbetrag b vorliegt, die genannte Zerlegung also nicht angegeben werden kann, gelangt man folgendermaßen zu einer Größenabschätzung der scheinbaren Neigung: Bei bestimmtem Beschleunigungswert b nimmt sie ihren größten Wert an, wenn der resultierende scheinbare Schwerebeschleunigungsvektor den um die Spitze von g_i mit dem Radius b geschlagenen Kreis (das ist der geometrische Ort aller Trägheitsbeschleunigungsvektoren der Länge b um den Endpunkt von g_i) berührt (Abb. 3). Danach findet man

$$\text{Maximum } \left| \nu \right| = \text{arc tg } \frac{b}{\sqrt{g^2 - b^2}} .$$

Diese Gleichung wird durch die obere Kurve der Abb. 4 dargestellt.

Die beigefügte Tabelle demonstriert diese Gleichung unter der vereinfachenden Annahme $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$.

b [cm/sec ²]	Maximum $ \nu $
0,25	52''
0,5	1' 44''
1	3' 28''
2,5	8' 36''
5	17' 12''
10	34' 24''
25	1° 26'
50	2° 52'
100	5° 44'
250	14° 28'
500	29° 58'
1000	90°

Es ist zu bemerken, daß die hier zugrundegelegten b -Werte den Stärkegraden der *Mercalli-Cancani-Sieberg*-Skala zugeordnet sind.

Unterdrückt man im *Wiechertschen* Sinne die vertikale Komponente des Beschleunigungsvektors und nimmt für die horizontale Komponente den Betrag b an, so findet man

$$|\nu| = \arctg \frac{b}{g},$$

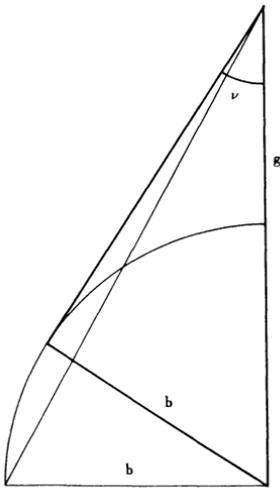


Abb. 3

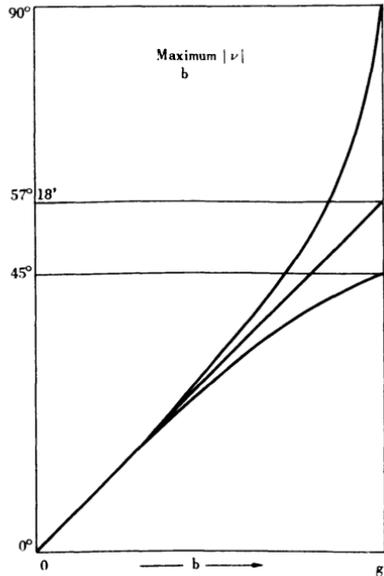


Abb. 4

dargestellt durch die untere Kurve der Abb. 4, und weiter nach der üblichen Ersetzung der Tangens-Funktion durch das Argument

$$|\nu| = \frac{b}{g}$$

Das ist die Gleichung der Tangente obiger Kurven im Koordinatenursprung. Die lineare Funktion stellt eine bedeutend bessere Näherung für das Maximum von $|\nu|$ als die Arcus-Tangens-Funktion dar.

Literatur

- [1] *Wiechert, E.*: Theorie der automatischen Seismographen. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung 1903.
- [2] *Ullmann, W.*: Zur Entwicklung der allgemeinen Bewegungsgleichung von Seismographen mit einem Freiheitsgrad. Jena, Math.-naturw. F., Diss. v. 27.5. 1955 (Maschinenschr. photokop.)