

Werk

Jahr: 1957

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:23

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0023

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0023

LOG Id: LOG_0025

LOG Titel: Heft 3

LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant**, Innsbruck — **W. Dieminger**, Lindau b. Northeim
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung**, Kiel — **O. Meyer**, Hamburg
F. Möller, Mainz — **H. Reich**, München.

Jahrgang 23

1957

Heft 3



PHYSICA-VERLAG · WÜRZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Ehmert, A., und K. Revellio: Solare Ultrastrahlung und ionosphärische D-Schicht am 23. Februar 1956</i>	113
<i>Belluigi, A.: Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials . . .</i>	135

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 28,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden, und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu nummerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorenkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Münster (Westfalen), Pferdegasse 3

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayr. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Rotlöwengasse 2. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing u. Hildgund Holler, sämtl. Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg. Verantwortl. f. d. Anzeigentell: Arnulf Liebing. Druck: fotokop, Darmstadt.



Solare Ultrastrahlung und ionosphärische D - Schicht am 23. Februar 1956¹⁾

von A. Ehmert und K. Revellio, Weissenau²⁾

Zusammenfassung: Eigene Messungen einer auffallenden Dämpfung von Längswellen-Atmospherics beim Ausbruch solarer Ultrastrahlung am 23.2.1956 werden im Zusammenhang mit anderen Messungen diskutiert. Die Verteilung der Einsatzzeiten über die Nachtseite der Erde stimmt mit der für die solare Ultrastrahlung überein. — Die von der letzteren hervorgerufene Elektronendichte wird abgeschätzt und die damit zu erwartende Dämpfung berechnet. Sie ist für die Zeit der maximalen Einstrahlung ausreichend. Die Dämpfung hielt jedoch länger an. Dies kann verstanden werden, wenn man annimmt, daß im Bereich um 70 bis 80 km Höhe die Anlagerung der Elektronen eine große Rolle spielt, die so gebildeten Ionen in der geringen Konzentration sehr langlebig sind und eine ständige geringe Elektronendichte liefern, weil Elektronen befreit und nach kurzer Zeit wieder angelagert werden.

Abstract: The outburst of solar cosmic rays at 23rd February 1956 caused a hard attenuation of longwave-atmospherics on the night-side of the earth. A discussion of our own and other records shows that the beginning follows immediately the first arrival of this solar radiation. The electron density caused by the ionization of these cosmic rays is in the maximum phase sufficient to cause the observed attenuation. But this attenuation continued after the decrease of cosmic ray intensity for several hours. It is suggested that negative ions formed by attachment of electrons to O₂ have in night-time at low concentration a long life and that at every time a small fraction of them is liberated for a short time. These electrons continue attenuation.

Messungen

Am 23. Februar 1956 beobachteten wir kurz vor 4 Uhr GMT gleichzeitig mit einem starken Einfall solarer Ultrastrahlung (A. Ehmert und G. Pfozner) [1] eine Abnahme der in Weissenau ($\lambda = 9^\circ 35'$ $\phi = 47^\circ 46'$) registrierten Atmospherics. Abb. 1 zeigt den Verlauf der Zahl der Atmospherics bei auf 27 kHz abgestimmtem Empfänger. Daneben ist der als normal anzusehende Tagesgang am folgenden Tag eingezeichnet. Man hätte also am 23. Februar den gestrichelten Verlauf erwarten können. Abb. 2 zeigt noch einmal

¹⁾ In gekürzter Form auf der Geophysikertagung in Hamburg am 27. September 1956 vorge-tragen.

²⁾ A. Ehmert und K. Revellio, Weissenau, Max-Planck-Institut für Physik der Stratosphäre.

die Atmosphericzahl vom 23. 2. 56 in etwas anderem Maßstab für zwei verschiedene Mindestfeldstärken. Man erkennt, daß eine plötzliche Abnahme der Zahl der Atmospheric großer Amplitude auf 56% und derjenigen kleiner Amplitude auf 35% auftrat. Diese Abnahme muß zwischen unseren Re-

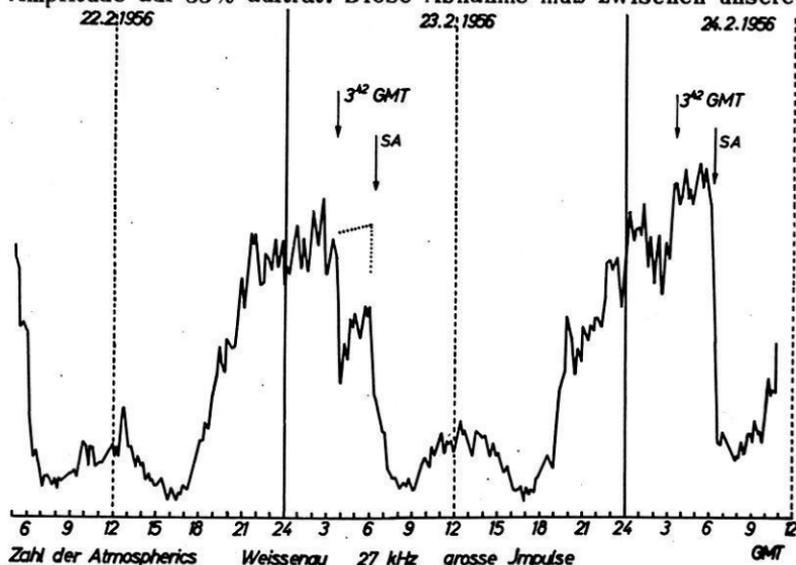


Abb. 1: Zahl der in Weissenau bei 27 KHz gemessenen Atmospheric vom 22. 2. 56-24. 2. 56

gistrierungen der Zählwerkstände um 3⁴⁰ und 3⁵⁰ GMT eingetreten sein. Nach der ebenfalls auf Abb. 2 wiedergegebenen Registrierung des Atmoriographen [2] der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt in Zürich läßt sich der Übergang auf die Zeit zwischen 3⁴² und 3⁴⁸ einengen. Die regelmäßige Abnahme der Atmosphericzahlen bei Sonnenaufgang setzt etwa 6⁰⁰ Uhr GMT ein. Sie ist auf allen drei Kurven deutlich zu erkennen. Die Sonnenaufgangslinie lag 3⁴² Uhr am Erdboden noch 3000 km und in 85 km Höhe noch 1000 km weiter östlich von Weissenau. Über Weissenau stand die Erdschattengrenze 3⁴² Uhr in etwa 750 km Höhe. Die Radiogoniographen in Zürich und Payerne zeigten zu derselben Zeit eine Herdgruppe zwischen Südwesten und Nordwesten mit dem Schwerpunkt im Nordwesten und einen schwächeren Herd im Südosten an. Die Atmospheric kleiner Amplitude gehen zum größeren Teil auf Gewitterherde in Zentralamerika zurück, diejenigen großer Amplitude lassen sich vorzugsweise europäischen Gewitterzentren zuordnen. Weiter zeigt Abb. 2 den Verlauf der nuklearen Komponente der Kosmischen Ultrastrahlung nach der Registrierung durch sekundäre Neutronen in Weissenau [1] nach Meyer und Simpson [3] in Chicago und nach Brown [4] in Albuquerque. Der Beginn der Strahlungsanstiege war nach der kontinuierlichen Ionisationsregistrierung

von *Sittkus, Kühn und Andrich* [5] in Freiburg 3⁴² GMT in Cheltenham in den USA nach *Forbush* [6] 3⁴⁸ GMT. Eine Untersuchung über die Zeiten des ersten Ultrastrahlungsanstieges im europäisch-amerikanischen Raum

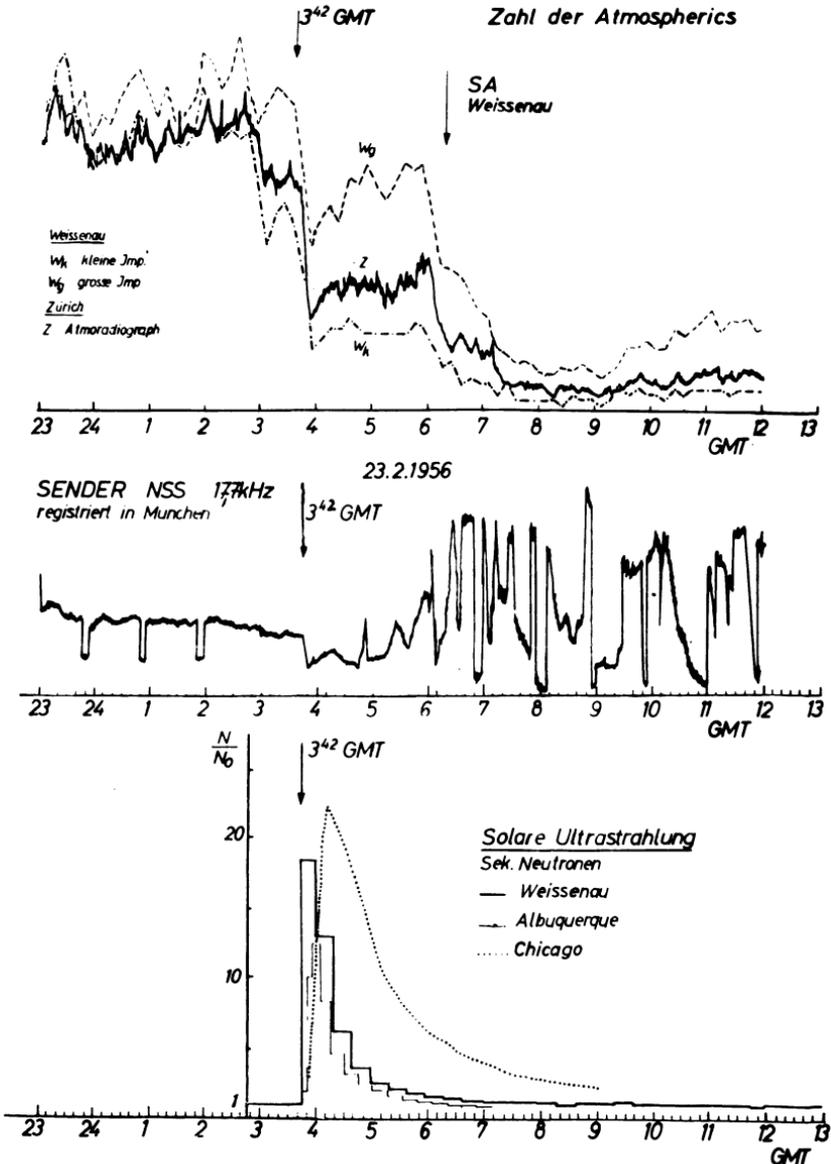


Abb. 2: 23.2.56 Zahl der Atmospherics, Feldstärke des Senders NSS und solare Ultrastrahlung

am 23.2.56 [7] ergab eine Abhängigkeit von der geomagnetischen Länge mit zunehmender Verspätung nach Westen um 1 Minute pro 20° Länge und mit zunehmender Verspätung nach Norden um 1 Minute pro 4° geomagnetischer Breite. Auch die Zeiten des Strahlungsmaximums sind entsprechend verschoben. *Lauter, Bartels, Sprenger* und *Skeib* [8] beobachteten in Kühlungsborn ein um 3^{43} Uhr GMT beginnendes Absinken des atmosphärischen Störpegels bei 40 kHz auf 14%, bei 35 kHz auf 35%, bei 25 kHz auf 42%. Bemerkenswert ist, daß bei 40 kHz und besonders bei 35 kHz eine schon 3^{42} einsetzende und 3^{44} ihr Maximum erreichende Zunahme des Pegels um 50% vor der erwähnten Abnahme auftrat. Sie war bei 25 kHz kaum noch angedeutet. Bei niedrigeren Frequenzen trat sofort eine Abnahme auf. Auch die Registrierung eines Senders auf 185 kHz ergab in Kühlungsborn 3^{49} GMT eine plötzliche Abnahme auf weniger als 15%. Die Autoren [8] weisen darauf hin, daß hier eine Dämpfung auf einem völlig im Nachtbereich verlaufenden Ausbreitungsweg vorliegt, welche deshalb Korpuskeln zugeschrieben werden. Sie vermuten, daß es sich um eine weiche Komponente gehandelt habe, welche nur unterhalb 90 km Höhe stark ionisierte, jedoch oberhalb nur schwacher Wechselwirkung fähig gewesen sei. *Aarons* und *Barron* [9] registrierten in Fourth Cliff in Scituate Massachusetts USA auf 49 kHz den atmosphärischen Störpegel mit 1 kHz Bandbreite. Es wurde ein Maß für die mittlere Zeit aufgeschrieben, während welcher der Störpegel eine vorgegebene Schwelle überschritt. Sie fanden eine 3^{44} einsetzende Abnahme dieser Störzeit. Die Werte fielen weiter bis 3^{48} GMT (22^{48} Ortszeit) und blieben dann auf diesem niederen Niveau konstant. Sie bringen das Ereignis ebenfalls mit dem Einbruch solarer Ultrastrahlung in Verbindung und betonen, daß die Dämpfung bereits einige Minuten vor Beginn des Einfalls solarer Ultrastrahlung auftrat, welche in Cheltenham (USA) erst 3^{48} GMT einsetzte. Dieselben Autoren erwähnen, daß *Pierce* und *Moritz* [10] in Cambridge (USA) um 3^{43} GMT eine Zunahme der Phasenänderungsgeschwindigkeit der Signale des auf 16 kHz arbeitenden Senders Rugby (GBR) in England festgestellt haben. Tatsächlich ist nach unserer erwähnten Analyse der erste Einfall solarer Ultrastrahlung in England 3^{43} GMT erfolgt. In den USA ist in 40° nördlicher Breite ebenfalls schon 3^{44} solare Ultrastrahlung eingefallen. Ein Teil der in Fourth Cliff registrierten Atmospherics kam zu dieser Tageszeit sicher aus südlicheren Gebieten, nämlich Zentralamerika und den nördlichen Teilen Südamerikas, so daß ionosphärische Reflexionsstellen in 40° Breite lagen und damit zeitliche Übereinstimmung zwischen dem Beginn der Dämpfung und dem Einfall der solaren Ultrastrahlung besteht. *Mc Kerrow* [11] registrierte in der Polarlichtzone in Churchill ($58,8^\circ$ N $94,2^\circ$ W) den atmosphärischen Störpegel auf der Frequenz 100 kHz und fand um 3^{45} GMT beginnend eine rasche Abnahme um 6 db (auf 51%) in weniger als 10 Minuten und anschließend eine weitere Abnahme um 2 db bis auf den bei Tag üblichen Wert, der dann während der ganzen weiteren Nacht also 8 Stunden

lang erhalten blieb. Die Hauptquelle der registrierten Störungen lag auch in diesem Fall nach *Mc Kerrow* in Zentralamerika. Die Grenzfrequenz der F_2 -Schicht stieg in Churchill nach *Mc Kerrow* von 4^{45} ab bis 5^{30} an, von da an konnten wegen vollständiger Absorption keine Reflexionen mehr beobachtet werden. Auch von den anschließenden 65 Stunden waren 53 Stunden ohne jede Reflexion. Ein Vergleich mit anderen Stationen zeigt, daß dieser Effekt auf die Polarlichtzone beschränkt war.

Station		Beginn des Sturmes	Absorptionszeit
Baker Lake	64,3°N 96,0°W	5.00	6.00 Vollst. Absorption
Churchill	58,8°N 94,2°W	5.00	5.30 Vollst. Absorption
Winnipeg	49,9°N 97,4°W		Hohe Absorption
Ottawa	45,4°N 75,9°W		Hohe Absorption
Kjeller	(Breite wie Win- nipeg)	5.00	7.00- 8.00 vollst. Absorption
Upsala			7.00 vollst. Absorption den ganzen Tag
Lindau			Kein Effekt
Cambridge			Kein Effekt

Eine weitere Registrierung des 16 kHz-Senders Rugby (GBR) nach Amplitude und Phase in Cambridge in 92 km Entfernung vom Sender ergab nach *Belrose, Devenport* und *Weekes* [12] etwa 3^{45} h ein Absinken der scheinbaren Reflexionshöhe von 87 km auf 80 km ohne merkliche Amplitudenabnahme. Dieser Wert blieb bis Sonnenaufgang erhalten, dann sank sie auf 68 km ab am Mittag, also 5 km niedriger als normal. In Newcastle 293 km von Rugby begann auch 3^{45} GMT die anomale Ausbreitung. In Upsala 1350 km vom Sender entfernt verschwand nach *Stoffregen* die dort die Bodenwelle weit überwiegende Raumwelle gänzlich. Auch bei Frequenzen zwischen 700 und 300 kHz wurden um 3^{45} h einsetzende starke Dämpfungen beobachtet. Auch die bei 22 kHz registrierten Atmosphericzahlen nahmen 3^{45} GMT auf die Hälfte ab. *Gold* und *Palmer* [13] beobachteten in Herstmonceux 3^{45} h ebenfalls eine sehr schnell verlaufende Abnahme der auf 27 kHz registrierten Atmospheric, sie vermuten als Ursache die mit dem Ultrastrahlungseinbruch gekoppelte Partikelstrahlung. *Ellison* und *Reid* [14] berichten von einer starken Abnahme der Atmosphericzahlen bei 24 kHz um 3^{45} h, die mit dem Partikelstrom der solaren Ultrastrahlung auf der nicht sonnenbeschienenen Hemisphäre zusammenfiel. Schließlich findet sich auf einer Münchner Registrierung der Empfangsamplitude des nordamerikanischen Senders NSS (17,7 kHz) die uns Herr Prof. *Schumann* freundlichst zur Verfügung stellte, der in Fig. 2 auch gezeichnete Verlauf mit einer kontinuierlichen Abnahme der Amplitude von 3^{44} h bis 3^{50} h.

Bei Registrierung von Sendern liegt ein geographisch eindeutiger Ausbreitungsweg vor, bei dem man sicher entscheiden kann, ob er im Tag- oder völlig im Nachtbereich liegt. Das letztere war bei allen oben angeführten Senderausbreitungswegen der Fall. Dagegen ist man nicht sicher, wie weit bei Amplitudenänderungen tatsächliche Dämpfung und Interferenz mitspielen. Verschwindet aber die Raumwelle völlig, wird auch dieser Fall eindeutig. Bei den Atmosphericics entfällt die Phaseninterferenz. Dafür ist wegen der räumlichen Verteilung der Herde der Ausbreitungsweg nicht eindeutig. Wir waren daher zunächst nicht sicher, ob der Abfall nicht doch mit dem Ausfall der Strahlung aus Dämmerungsgebieten zusammenhängen könnte.

Die im Tagbereich wirksame UV-Strahlung bewirkt aber bei der Frequenz von 27 kHz eine Verbesserung der Ausbreitungsbedingungen durch Reflexion an der D-Schicht, also eine Zunahme der registrierten Atmosphericics, während bei höheren Frequenzen über etwa 150 kHz die D-Schicht dämpft und bei Kurzwellen der als Mögel-Dellinger-Effekt bekannte Ausfall der Funkverbindungen einsetzt. Das Maximum der Verbesserung der Ausbreitung liegt bei 27 kHz. Noch tiefere Frequenzen werden wieder weniger beeinflußt. Bei 16 kHz ist nur noch schwache Veränderung der Ausbreitung beobachtbar. Es liegen also im Tagbereich stark frequenzabhängige Einflüsse auf die Ausbreitung vor, das war am 23. Februar nicht der Fall. Auch nach dem gesamten Verlauf der Kurve ist eine Ausbreitung in Dämmerungsgebieten unwahrscheinlich, da die spätere Abnahme bei Sonnenaufgang spontan einsetzt. Dies ist nur bei westlich liegenden Herden möglich (*Lugeon* [15], *Revellio* [16]) und für diese bestand somit offensichtlich die beschriebene Abnahme der Atmosphericicszahl. Völlig klar liegt jedoch der Fall bei den tief im Nachtbereich liegenden amerikanischen Stationen.

Die auffallendste Erscheinung ist der genau gleichzeitig mit dem ersten Einfall der solaren Ultrastrahlung beginnende Aufbau einer dämpfenden Schicht und daß selbst die geographische Verteilung des Beginns des Ultrastrahlungseinfalls ebenso auch für den Beginn der Dämpfung gilt. Im Gegensatz zum parallelen Verlauf des Dämpfungsbegins mit dem Ultrastrahlungseinsatz blieb die Dämpfung später viele Stunden ungefähr gleich stark bis zum jeweiligen Sonnenaufgang erhalten, während die Ultrastrahlung nach Erreichung des Maximums rasch abfiel.

Die zweite ungewöhnliche Erscheinung ist der in der nächtlichen Polarlichtzone aufgetretene Ionosphärensturm kurze Zeit nach dem Einfall der solaren Ultrastrahlung mit zumindest 8-stündiger nach *Mc Kerrow* sogar wesentlich längerer Dauer. Dieser Sturm könnte trivial auf einen Plasmaström zurückgeführt werden, welcher bei einer früheren chromosphärischen Eruption auf der Sonne ausgeschleudert wurde und zu dieser Zeit die Erde erreichte. Am 21. 2. 56 wurde durch Funkbeobachtungen auf den Kerguelen

(nach dem Ursigramm) um 10^{32} h eine chromosphärische Eruption festgestellt, am 22. 2. 56 eine solche um 0⁵ h und um 12²⁰ GMT, außerdem von Bagneux um 13²⁸ und 13³⁰ GMT. Leider weiß man von diesen Eruptionen nicht den Ort auf der Sonne, von dem die Möglichkeit eines Erreichens der Erde durch Plasmaströme abhängt. Außerdem wurde keine erdmagnetische Störung beobachtet und die Tatsache, daß der fragliche Ionosphärensturm in der Polarlichtzone gerade mit dem Einfall der Ultrastrahlung begann, müßte als Zufall gewertet werden. Wir kommen darauf weiter unten zurück. Es soll zunächst untersucht werden, wieweit die Ionisierung durch die solare Ultrastrahlung selbst für die beobachtete Dämpfung ausreicht.

D-Schicht durch solare Ultrastrahlung

Wir schätzen zunächst ab, welche Elektronendichte die solare Ultrastrahlung selbst in der D-Schicht erzeugen konnte. Die Teilchenzahl der normalen Kosmischen Strahlung ist nach Messungen mit Raketengeräten bekannt. *Gangues, Jenkies jr.* und *Allen* [17] fanden mit einzelnen Zählrohren zwischen 50 und 161 km Höhe in 41° geomagnetischer Breite zwanzigmal so viel Teilchen als am Erdboden. *Van Allen* und *Singer* [18] fanden bei Aufstiegen in verschiedener Breite für die vertikale Verteilung der Teilchenzahl Werte, aus denen wir die folgende Ionisierung berechnen können:

geomagn. Breite	0°	41°	50°	58°	
Ionisierungsstärke in großen Höhen	12 I	60 I	150 I	240 I	<u>Ionenpaare</u> at · cm ³ sec

Unterhalb 50 km steigt die Ionisierung auf etwa das Doppelte in 20 km Höhe an und fällt dann durch Absorption stark ab. Wir rechnen im folgenden mit 150 Ionenpaaren/cm³ sec in 50° Breite. In der freien Atmosphäre ist die Ionisierung der Dichte proportional, also ist die Zahl der pro Sekunde freigesetzten Elektronen $N = 150 \rho / \rho_0 \cdot \text{El/sec cm}^3$, wenn ρ die Dichte am Ort und ρ_0 die Dichte bei 0°C und 1 Atmosphäre ist. Für die solare Ultrastrahlung liegen keine entsprechenden Messungen vor. Aber *Meyer, Parker* und *Simpson* [19] führten am Nachmittag des 23. 2. einen Ballonaufstieg bis 30 km Höhe durch. Sie fanden in der Höhe des Maximums der sekundären Neutronenzahl, nämlich bei 70 mm Hg das 4,5-fache der normalen Zahl. Zu dieser Zeit machte der solare Anteil der Neutronen am Boden mit 28% des Normalwertes nur noch 1/75 derjenigen zur Zeit des Maximums um 4¹⁰ GMT mit dem 21-fachen Normalwert aus. Demnach hätte die Neutronenzahl im Maximum das 337-fache des normalen Wertes in Chicago (53° nördl. geomagn. Breite) erreicht. Eingedenk des völlig anderen Energiespektrums der solaren Ultrastrahlung dürfen wir doch annehmen, daß damit die Ionisierung in großen Höhen mindestens den Wert

$$\Delta N_{et} = 50\,000 \rho/\rho_0 = K \rho/\rho_0 \frac{\text{Elektronen}}{\text{cm}^3 \text{ sec}}$$

erreichte.

Winckler [24] führte in Minneapolis unter $55,4^\circ$ geomagnetischer Breite am selben Tag einen Aufstieg mit einem Zählrohrkoinzidenzgerät durch, bei welchem gegen 21.00 Uhr GMT die größte Höhe erreicht wurde. Zu dieser Zeit machte der Effekt am Boden dort nur noch etwa 10% für die nukleare Komponente aus, wie wir den amerikanischen Neutronenregistrierungen entnehmen können. Beim Aufstieg wurde bis zu etwa 300 g/cm^2 Luftdruck keine Differenz gegen den Normalwert bei früheren Aufstiegen gefunden. Aber dann stieg die Zahl der vertikal einfallenden Teilchen mit der Höhe erheblich rascher an als sonst und erreichte bei 10 g/cm^2 das Fünffache des Normalwertes. Die Anordnung mit $9,38 \text{ Steradian-cm}^2$ zählte dort $N = 16$ Teilchen pro Sekunde mehr als unter normalen Umständen. (4 sec^{-1}). Die Bahnen der erfaßten Teilchen haben eine mittlere Zenitdistanz von 15° bis 20° .

Setzen wir in großen Höhen Gleichverteilung über die Winkel des Halbraumes voraus, so erhalten wir als die Zahl der durch eine Kugel des Querschnittes 1 cm^2 einfallenden Teilchen

$$N_2 = 16 \frac{2 \pi}{9,38} \cdot \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} = 10,7 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

Bei normaler Ionisierungsstärke mit 100 I/cm in Normalluft, welche als Minimum anzusetzen ist, wird dann die zusätzliche Ionisation

$$I_{s,01,21,00h} \approx 1\,000 \rho/\rho_0 \frac{\text{Elektronen}}{\text{cm}^3 \text{ sec}}$$

gegenüber $250 \rho/\rho_0$ im Normalfall bei der gleichen Umrechnung.

Multiplizieren wir jetzt wieder diesen Wert der Ionisierung mit dem Verhältnis V zwischen der maximalen, auf solare Strahlung zurückgehenden Neutronenzahl am Erdboden in Chicago zu der um 21⁰⁰ GMT noch vorliegenden mit den Werten für Chicago oder Ottawa,

$$V = \frac{20 \cdot \text{normal}}{0,15 \cdot \text{normal}} = 133$$

so wird die im Maximum pro Sekunde frei gemachte Elektronenzahl

$$I_{s,01,430h} = 130\,000 \rho/\rho_0 \frac{\text{Elektronen}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} = K' \cdot \rho/\rho_0 \cdot$$

Das ist viermal soviel als wir oben abgeschätzt haben. Das Erdfeld setzt am Aufstiegsort eine Energiegrenze von $0,9 \text{ GeV}$ für Protonen. 2 GeV

sind zur Durchdringung der Atmosphäre zumindest erforderlich um den Ionisations-Energieverlust des Teilchens zu decken. Aus der Absorptionskurve des beim Aufstieg von *Winckler* gemessenen solaren Anteils ist auf Primärenergien um von 1 bis etwa 1.5 GeV zu schließen. Diese wirken sich am Grund der Atmosphäre nicht mehr aus. In geringeren geomagnetischen Breiten läßt das Erdfeld diese Teilchen nicht mehr einfallen. Aber über Ottawa und Stockholm waren sie zweifellos auch im Maximum vorhanden. Denn die zeitliche Konstanz des Breiteneffektes der solaren Ultrastrahlung am 23. 2. 56 ab etwa 5.00 GMT weist auf ein konstantes Energiespektrum.

Die Elektronen lagern aber rasch an und haben dann wegen der geringen Beweglichkeit der so gebildeten Ionen keinen merklichen Einfluß auf die Wellenausbreitung mehr. Nehmen wir mit *Bates* und *Massey* [20] an, daß die Anlagerung an molekularem Sauerstoff vorherrscht, so erhalten wir die Bilanz für die Elektronenzahl nach dem Schema:



es ist damit:
$$\frac{d N_{e\ell}}{dt} = K \rho / \rho_0 - N_{e\ell} N'_{O_2} \rho / \rho_0 \eta$$

mit $N'_{O_2} = 2,3 \cdot 10^{18} \frac{\text{Molek.}}{\text{cm}^3}$ der Moleküldichte des Sauerstoffs unter

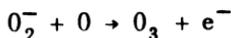
Normalbedingungen. Den Rekombinationskoeffizienten η schätzen *Bates* und *Massey* in der Größenordnung $\eta = 10^{-14} \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ und wir erhalten im

Gleichgewicht, das sich mit diesen Zahlen sehr rasch einstellen muß

$$K = \bar{N}_{e\ell} \cdot N'_{O_2} \eta$$

$$\bar{N}_{e\ell} = \frac{K}{N'_{O_2} \eta} = \frac{5 \cdot 10^4}{2,3 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-14}} \approx 2,2 \frac{\text{Elektronen}}{\text{cm}^3}$$

unabhängig von der Höhe. Die in größeren Höhen geringere Ionisierung wird durch die längere Lebensdauer bis zur Anlagerung ausgeglichen. Die O_2^- Ionen können wieder direkt durch Stoßablösung zerstört werden (*Bates* und *Massey* [20])



Die obige Gleichung erweitert sich zu der Form:

$$\frac{d N_{e\ell}}{dt} = K \rho / \rho_0 - N_{e\ell} \cdot N_{O_2} \eta \rho / \rho_0 + \chi N_{O_2} \cdot N_0 \rho / \rho_0$$

Da die Konzentration N_{0_2} nicht bekannt ist, kann nur ausgesagt werden, daß der effektiv auftretende Anlagerungskoeffizient η' kleiner als der in der obigen Rechnung verwendete sein muß. Der Wert 2,2 El/cm³ stellt daher die untere Grenze für die Elektronendichte zur Zeit des Maximums der solaren Ultrastrahlung dar, dabei soll einschränkend auf die bei *Bates* und *Massey* zitierten unterschiedlichen Angaben für η hingewiesen werden. Damit stellt sich die Frage, ob diese geringe Elektronendichte ausreicht, die beobachtete Dämpfung zu erklären.

Dämpfung von Längswellen in dem durch die solare Ultrastrahlung entstehenden Höhenbereich

Der Empfänger unserer Atmosphericregistrierung war auf 27 kHz abgestimmt. Es soll daher im folgenden näherungsweise bestimmt werden, welche Dämpfung eine Welle dieser Frequenz beim Durchgang durch ein ionisiertes Medium in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden und von der vorhandenen Elektronendichte erfährt. Schreibt man dem ionisierten Medium wie in der Metalloptik einen komplexen Brechungsindex $\mu - ik$ zu, so ist $\frac{\omega}{c} k$ gleich der Dämpfung β und c/μ die Phasengeschwindigkeit v der Welle. Das Quadrat des komplexen Brechungsindex ist nach *Huxley* [21] *K. W. Wagner* [22]

$$y = (\mu - ik)^2 = A - iB$$

$$y = \frac{(n^2 + 1) \epsilon_m \epsilon_0 + l^2 (\epsilon_m^2 - \xi^2) \pm \sqrt{(\epsilon_m^2 - \xi^2 - \epsilon_m \epsilon_0)^2 + 4 n^2 \epsilon_0^2 \xi^2}}{2 (n^2 \epsilon_0 + l^2 \epsilon_m)}$$

Wenn die ϵ_0 , ϵ_m und ξ die Dielektrizitätskonstanten des Mediums und die n und l die Richtungs cosinuse der Ausbreitungsrichtung zur Richtung des Erdfeldes sind. Die Gleichung entspricht weitgehend der *Appleton-Hartree'schen* Formel, doch wurde von *Huxley* [21] die Dämpfung durch genauere statistische Überlegungen und nicht durch Einführung eines einfachen Reibungsgliedes in die Differentialgleichung der Elektronenbewegung abgeleitet. Die Ausdrücke sind sehr kompliziert, so daß auf eine ausführliche Darstellung verzichtet wird. Einfache Ausdrücke ergeben sich nach *K. W. Wagner* [22] nur für die folgenden Sonderfälle.

1. Ausbreitung längs des Erdfeldes

$$y_1^{\parallel} = \epsilon_m + \zeta$$

$$y_2^{\parallel} = \epsilon_m - \zeta$$

wir haben zwei entgegengesetzt drehende zirkular polarisierte Wellen.

2. Ausbreitung senkrecht zum Erdfeld

$$y_1^\perp = \frac{\epsilon_m^2 - \xi^2}{\epsilon_m} \quad y_2^\perp = \epsilon_0$$

Hier sind es zwei linear polarisierte Wellen.

Diese Fälle seien im folgenden genauer betrachtet und unter Weglassung einiger Zwischenrechnungen, die teilweise an andern Orten [16] ausführlicher dargestellt sind, explizit angeschrieben.

Vernachlässigen wir zunächst das Erdfeld und schreiben y_0 das Quadrat des komplexen Brechungsindex

$$y_0 = 1 - \frac{8}{3} \pi N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\nu \omega} \left\{ \frac{\nu \omega}{\nu^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right] + i \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right] \right\}$$

mit folgenden Bezeichnungen

$$N = \text{Elektronendichte} = \frac{\text{Zahl der Elektronen}}{\text{cm}^3}$$

e = Elektronenladung El.st. cgs-Einheiten

m = Elektronenmasse

$$\frac{e^2}{m} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ El.st.cgs-Einheiten}$$

ν = Stoßzahl der Elektronen mit den Neutralgasmolekülen $\frac{1}{\text{sec}}$

ω = Kreisfrequenz der einfallenden elektromagnetischen Welle $\frac{1}{\text{sec}}$

ω_0 = Larmorfrequenz des Elektrons $8,77 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{sec}}$ in etwa 50° nördl.

Breite

Außerdem sei $\alpha = \frac{8}{3} \pi \frac{N e^2}{m \omega}$ als Abkürzung verwendet.

Damit ist:

$$y_0 = 1 - \alpha \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right] - i \alpha \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right] = A_0 - i B_0$$

$$A_0 = 1 - \alpha \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right] \quad B_0 = \alpha \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} \right]$$

Berücksichtigt man auch die Anwesenheit des Erdfeldes, so zeigt sich, daß diese Formel dem Fall $y_2^\perp = \epsilon_0$ entspricht. Die Ausbreitung findet

hier senkrecht zum Erdfeld statt. Die Elektronen bewegen sich hier in Richtung des Erdfeldes, werden also durch dieses nicht beeinflußt. $y_0 = y_2^\perp$
 $A_0 = A_2^\perp$; $B_0 = B_2^\perp$. Bei Ausbreitung längs des Erdfeldes erhalten wir zwei zirkular polarisierte Wellen y_1^\parallel und y_2^\parallel

$$y_1^\parallel = \epsilon_m \pm \zeta =$$

$$1 - \alpha \frac{(\omega \mp \omega_0)}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{(\omega \mp \omega_0)^2}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right] - i \alpha \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \left[1 + \frac{(\omega \mp \omega_0)^2}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right]$$

$$A_1^\parallel = 1 - \frac{\alpha (\omega \mp \omega_0)}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{(\omega \mp \omega_0)^2}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right]$$

$$B_1^\parallel = \alpha \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \left[1 + \frac{(\omega \mp \omega_0)^2}{\nu^2 + (\omega \mp \omega_0)^2} \right]$$

Der Index 1 bei A und B gilt für das negative und der Index 2 für das positive Vorzeichen.

Für die Ausbreitung senkrecht zum Erdfeld ergibt sich

$$y_1^\perp = \frac{\epsilon_m^2 - \zeta^2}{\epsilon_m} = \frac{(\epsilon_m - \zeta)(\epsilon_m + \zeta)}{\epsilon_m}$$

eine linear polarisierte Welle.

Der Ausdruck ist so kompliziert, daß wir ihn hier nur als Funktion von A_1^\parallel ; A_2^\parallel und B_1^\parallel ; B_2^\parallel anschreiben.

$$y_1^\perp = 2 \left\{ \frac{(A_1^\parallel + A_2^\parallel)(A_1^\parallel A_2^\parallel - B_1^\parallel B_2^\parallel) + (B_1^\parallel + B_2^\parallel)(B_1^\parallel A_2^\parallel + B_2^\parallel A_1^\parallel)}{(A_1^\parallel + A_2^\parallel)^2 + (B_1^\parallel + B_2^\parallel)^2} \right\}$$

$$- i 2 \left\{ \frac{(A_1^\parallel + A_2^\parallel)(B_1^\parallel A_2^\parallel + B_2^\parallel A_1^\parallel) - (B_1^\parallel + B_2^\parallel)(A_1^\parallel A_2^\parallel - B_1^\parallel B_2^\parallel)}{(A_1^\parallel + A_2^\parallel)^2 + (B_1^\parallel + B_2^\parallel)^2} \right\}$$

$y_2^\perp = y_0$ ist der vom Magnetfeld nicht beeinflußte Strahl, der ebenfalls linear polarisiert ist. Aus diesen Ausdrücken für das Quadrat der komplexen Brechungsindizes lassen sich ihre Realteile und Imaginärteile einzeln berechnen. Beide sind von klarer physikalischer Bedeutung. Der Realteil μ ergibt, wie schon erwähnt, durch $v = \frac{c}{\mu}$ die reelle Phasenge-

schwindigkeit, der Imaginärteil k durch $\beta = \frac{\omega k}{c}$ die Dämpfung. Es gilt:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A + \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Auf Abb. 3 und 4 sind die berechneten Dämpfungen β für verschiedene Elektronendichten in Abhängigkeit von der Höhe in der Ionosphäre eingetragen. Es zeigt sich, daß in allen Fällen, in denen das Erdfeld von Einfluß ist, bei geringen Elektronendichten in 75-80 km Höhe ein ausgeprägtes Maximum der Dämpfung erscheint. Auf die Bedeutung dieses Maximums und auf den detaillierten Verlauf der Kurven auch bei hohen Elektronendichten soll weiter unten näher eingegangen werden. Die Kurve für $\beta_0 = \beta_2^\perp$, also ohne Auswirkung des Magnetfeldes, zeigt dagegen einen monoton mit der Höhe ansteigenden Dämpfungsverlauf.

In den Ausdrücken für y geht als wichtiger Höhenparameter die Stoßzahl ν ein, sie ist für eine gegebene Frequenz die einzige Veränderliche außer der Elektronendichte N_{e1} . Nach Nicolet [23] ist die Druck- und Temperaturabhängigkeit der Stoßzahl

$$\nu = 5,22 \cdot 10^9 \frac{p}{\sqrt{T}} = \Theta \frac{p}{\sqrt{T}}$$

$p \rightarrow$ mm Hg

$T \rightarrow$ °K

Damit ließen sich die Stoßzahlen auch für die Höhenbereiche berechnen, für die Nicolet keine Kurven direkt angibt. Die dabei für geringere Höhen angenommenen Temperaturen sind: 10-30 km Höhe 230°K, 45-65 km

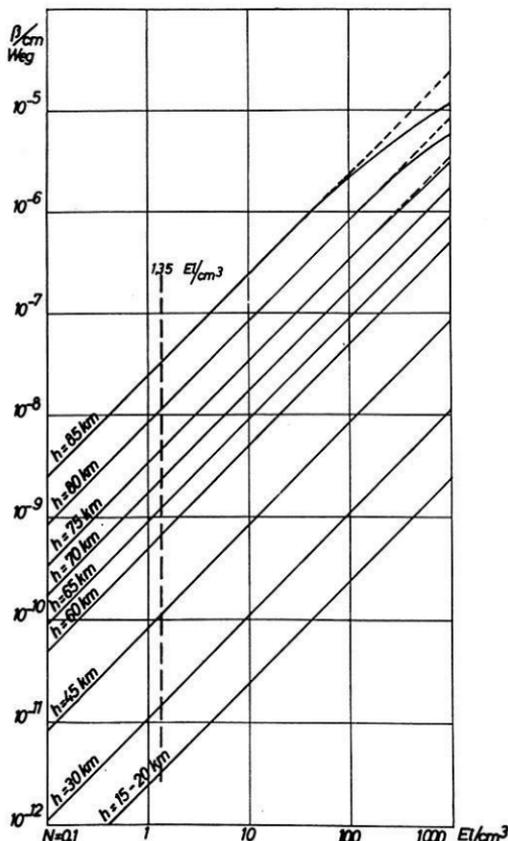


Abb. 3: Dämpfung von Längstwellen (27 KHz) in Abhängigkeit von der Elektronendichte

Höhe 270°K. Die Kurven auf den Abb. 3 und 4 sind mit diesen Werten für ν berechnet. Wird die Elektronendichte sehr klein, so erhalten wir für den Bereich um $N_{e1} = 1 \text{ El/cm}^3$ und für die niedrigen Frequenzen die Möglich-

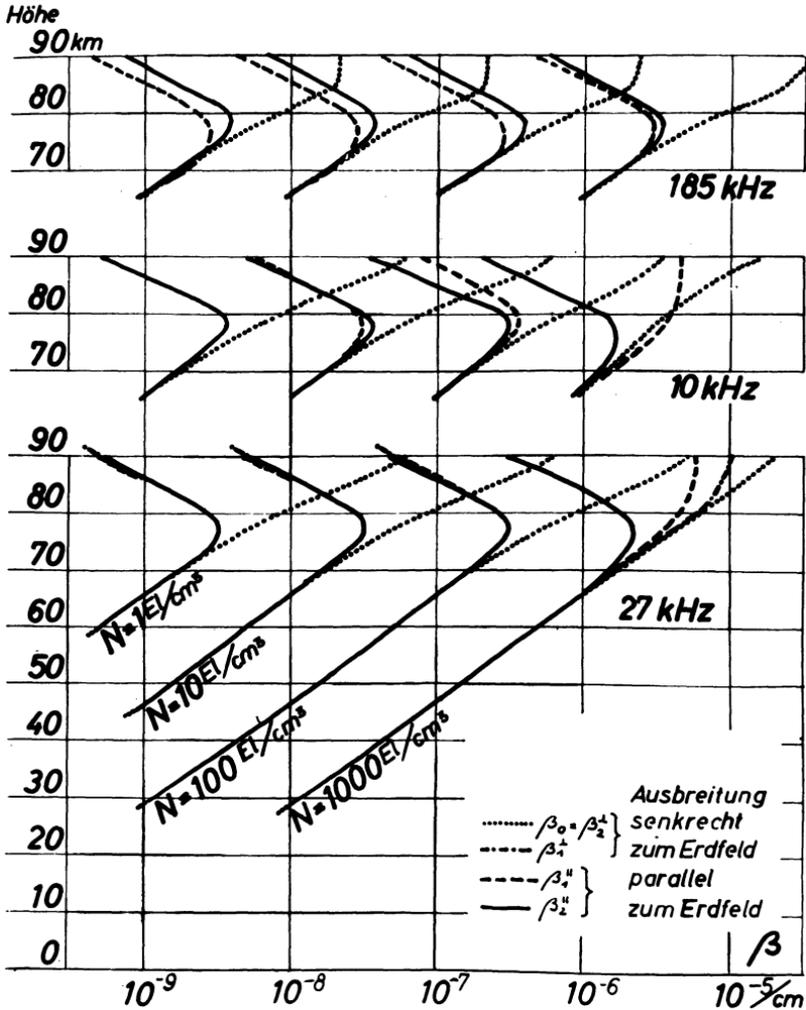


Abb. 4: Dämpfung von Längswellen in der unteren Ionosphäre für verschiedene Höhen, Frequenzen und Elektronendichten

keit, eine von K. W. Wagner [22] angegebene, für alle Fälle $B \ll A$ gültige Näherung anzuwenden. Es ergibt sich $\beta = \frac{\omega}{c} \frac{1}{2} \frac{B}{\sqrt{A}}$.

Da im interessierenden Bereich auch A praktisch gleich 1 ist, erhalten

wir die folgenden einfachen Ausdrücke für β : $\beta = \frac{\omega}{c} B/2$

Da $\nu \gg \omega$ ergibt sich ohne Magnetfeldeinfluß

$$\beta_0 = \beta_2^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m} \frac{1}{\nu}$$

mit Magnetfeld dagegen

$$\beta_1^\parallel \approx \beta_1^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m} \frac{\nu}{\nu^2 + \omega_0^2}$$

Mit einem Maximum der Dämpfung bei $\omega = \omega_0$. Damit lassen sich die Verhältnisse bei geringen Elektronendichten leicht überblicken. Die Dämpfung ist in erster Näherung frequenzunabhängig. Sehr geringe Höhen mit ihren hohen Stoßzahlen haben keinen Einfluß auf die Dämpfung. Die veränderliche Stoßzahl ν ist durch den *Nicoletschen* Ansatz bekannt. Für Abschätzungen lassen sich die Ansätze noch weiter vereinfachen. Annahme einer isothermen Atmosphäre erlaubt die Anwendung der barometrischen Höhenformel und mit der in großer Höhe höhenunabhängigen Ionisierung durch die solare Ultrastrahlung direkte Integration von β über den Ausbreitungsweg der elektromagnetischen Welle.

Die Ausdrücke für β finden dabei folgende einfache Form

$$\beta_0 = \beta_2^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} e^{z/H}$$

$$\beta_1^\parallel \approx \beta_1^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\frac{\ominus}{\sqrt{T_0}} p_0 e^{-z/H} + \frac{\sqrt{T_0}}{\ominus} p_0 e^{z/H}}$$

H = Skalenhöhe

p_0 = Druck am Boden

Z = Höhe über der Erde

T_0 = Temperatur am Boden.

Zur Berechnung der gesamten Dämpfung, die eine elektromagnetische Welle auf ihrem Weg erlebt, muß das Integral $\delta = \int_s \beta ds$ gebildet werden.

Bei einer senkrecht nach oben verlaufenen Welle ist $\delta_\perp = \int_{h=0}^{h=h_{\text{refl}}} \beta(z) dz$

Die ungestörte Reflexionshöhe bei Nacht ist nach vielen Ausmessungen von Wellenformen mit Vielfachreflexion etwa 85 km, damit ist $h_{\text{refl}} = 85$ km. Die Integration ergibt mit den obigen Näherungen für die Gesamtdämpfung:

$$\delta_0 = \delta_2^\perp = \int \beta_0(z) dz = \int \beta_2^\perp(z) dz \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2 \sqrt{T_0}}{m \Theta p_0} H e^{z/H} \Bigg|_{z=0}^{z=h_{\text{refl}}}$$

$$\delta_{\frac{1}{2}}^{\parallel} \approx \delta_1^\perp \approx \int \beta_1^{\parallel}(z) dz = \int \beta_1^\perp(z) dz \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m \omega_0} \arctg \frac{\sqrt{T_0}}{\Theta p_0} e^{z/H} \Bigg|_{z=0}^{z=h_{\text{refl}}}$$

$$\delta_0 \approx \delta_2^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2 \sqrt{T_0}}{m \Theta p_0} H (e^{h_{\text{refl}}/H} - 1)$$

$$\delta_{\frac{1}{2}}^{\parallel} \approx \delta_1^\perp \approx \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} N_{e1} \frac{e^2}{m \omega_0} \left(\arctg \frac{\sqrt{T_0}}{\Theta p_0} e^{h_{\text{refl}}/H} - \arctg \frac{\sqrt{T_0}}{\Theta p_0} \right)$$

Wenn wir für unsere Abschätzung vom Einfluß der gekrümmten Erdoberfläche absehen, so wird für die Zurücklegung einer Entfernung L vom Sender zum Empfänger bei n -facher Reflexion

$$\delta = \delta_\perp \frac{L}{h_{\text{refl}}} \sqrt{1 + \frac{2nh_{\text{refl}}}{L}}$$

Für die Atmosphericics von amerikanischen Blitzen ist $L = 5000$ km und wegen der Erdkrümmung wird nach unseren Erfahrungen mit Wellenformen $n \geq 5$. Damit ist

$$\delta = \delta_\perp \cdot 59 \sqrt{1 + \frac{1}{6}} = \delta_\perp \cdot 63,5$$

Um einen Überblick über einen großen Elektronendichtebereich von $1 - 1000$ El/cm^3 zu gewinnen, wurde β ohne die oben erwähnten Vernachlässigungen, die bei Elektronendichten > 10 $\text{Elektronen}/\text{cm}^3$ nicht mehr erlaubt sind, berechnet. (Abb. 3 und 4) Die Kurven zeigen die beobachtete geringe Frequenzabhängigkeit der Dämpfung. Merkbliche Unterschiede treten erst bei höheren Elektronendichten auf, wo die starke Aufspaltung der linksdrehenden und rechtsdrehenden Welle mit einer auf den Abbildungen nicht dargestellten starken Veränderung der Phasengeschwindigkeit verbunden ist. Sie weist auf die nur bei nicht vorhandener Absorption genau definierte "Grenzfrequenz" hin, ein Gebiet in dem Reflexion einsetzt. Der Verlauf der Dämpfungskurven weist darauf hin, daß unterhalb des Reflexionsniveaus in etwa 85 km normalerweise bei Nacht nur verschwindend kleine Elektronendichten vorhanden sein können. Auf weitere Einzelheiten soll an anderer Stelle eingegangen werden. Die vertikale Gesamtdämpfung wird mit Hilfe der Kurven graphisch integriert. Für kleine Elektronendichten ergibt sich damit ohne Berücksichtigung des Magnetfeldes

$$\delta_{\perp} = \int_{h=0}^{h=h_{\text{refl}}} \beta_0(z) dz = 0,013 \cdot N_{e1}$$

Die gesamte Dämpfung auf der Strecke Amerika-Deutschland wird damit $\delta = 0,013 \cdot 2,2 \cdot 63,5 = 1,85$ bei der durch die solare Ultrastrahlung verursachten Elektronendichte von 2,2 Elektronen/cm³. Es muß nun die theoretisch berechnete Dämpfung mit der tatsächlich gemessenen verglichen werden. Die Feldstärke W eines Signales nimmt unter dem Einfluß der Dämpfung nach $W = W_0 e^{-\int \beta ds}$ ab.

Ist W_1 die Feldstärke vor dem Ultrastrahlungsausbruch und W_2 die Feldstärke im Maximum des Ultrastrahlungsanstieges, so gilt:

$$W_1 = W_0 e^{-\int \beta_1 ds} \quad \text{und} \quad W_2 = W_0 e^{-\int \beta_2 ds}$$

Damit ist:

$$\frac{W_1}{W_2} = e^{+\int (\beta_2 - \beta_1) ds}$$

$$\ln \frac{W_1}{W_2} = \int (\beta_2 - \beta_1) ds$$

β_1 kann mit Rücksicht auf die geringe Dämpfung, welche man aus den Wellenformen mit Mehrfachreflexionen entnimmt, gegen β_2 vernachlässigt werden, so daß

$$\ln \frac{W_1}{W_2} = \int \beta_2 ds$$

Bei Zählung der Atmospherics, welche eine gewisse Größe überschreiten, bedingt eine allgemeine Verminderung der Amplitude den Ausfall derjenigen, deren Amplitude dadurch unter die Schwelle A_{gr} gedrückt wird. Die prozentuale Auswirkung hängt von der Amplitudenverteilung $\mathfrak{R}(A)$ ab. Es ist das gemessene Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} = \frac{\int_{A_{gr} \cdot e^{\int \beta_2 ds}}^{\infty} \mathfrak{R}(A) dA}{\int_{A_{gr.}}^{\infty} \mathfrak{R}(A) dA} = 0,35 = \text{Zahl der Atmospherics vor dem Einbruch zur Zahl während des Einbruchs}$$

auszuwerten. Darüber hinaus ist der Weg S für die großen Amplituden klei-

ner als der für die kleinen Amplituden, die vorzugsweise zu Atmosphericis aus großer Entfernung gehören. Eine für unsere Zwecke genügende Näherung ist die differentielle Amplitudenverteilung

$$\frac{d \mathfrak{N}(A)}{d A} = \mathfrak{N}_1 A^{-2}$$

Mit ihr wird das Verhältnis der Atmosphericiszahl für die beiden im Amplitudenverhältnis 1/16 stehenden Diskriminatoreinstellungen gerade gleich dem gemessenen Zahlenverhältnis 10:1. Damit wird das Verhältnis der Atmosphericiszahlen gerade gleich dem Amplitudenverhältnis:

$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1} = \frac{\mathfrak{N}_1 A_{gr}^{-1} e^{-\int \beta ds}}{\mathfrak{N}_1 A_{gr}^{-1}} = e^{-\int \beta ds}$$

$$\delta = \int \beta ds = \ln \frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_2} = \ln 2,85 = 1,05$$

Dieser Dämpfungswert stimmt überraschend gut mit dem weiter oben theoretisch abgeleiteten von 1,85 überein. Somit würden etwa 2,2 Elektronen/cm³ bei Vernachlässigung des Magnetfeldes ausreichen, die beobachtete Dämpfung zu erklären. Bei Berücksichtigung des Magnetfeldes treten Schwierigkeiten auf, da die Ausbreitungsrichtung der Atmosphericis unter sehr wechselnden Winkeln gegen das Erdmagnetfeld geneigt ist. Wir können aber annehmen, daß die auf der Abb. 4 gezeichneten Kurven die Extremwerte der überhaupt möglichen Dämpfungen darstellen. Die Dämpfung ist also bei longitudinaler Ausbreitung in Richtung des Magnetfeldes am kleinsten, während bei transversaler Ausbreitung der vom Magnetfeld nicht beeinflusste Strahl am stärksten gedämpft wird. Die tatsächliche Dämpfung

muß zwischen den beiden Werten liegen. Für das Integral $\delta_{\perp} = \int_0^{85 \text{ km}} \beta_0 dz$

ergab sich bei kleinen Elektronendichten $\delta_{\perp} = 0,013 \cdot N_{e1}$ für den durch das Magnetfeld nicht beeinflussten Strahl. Bei Magnetfeldeinfluß also longitudinaler Ausbreitung und transversaler Ausbreitung für den außerordent-

lichen Strahl ist die gesamte Dämpfung $\delta_{\perp} = \int_0^{85 \text{ km}} \beta_1^{\parallel} dz = 0,005 N_{e1}$,

also nur ein Drittel so groß. Die elektromagnetischen Wellen der Blitze von weitentfernten Herden fallen bei uns in der Regel sehr flach ein, so daß man zeigen kann, daß die Winkel zwischen Erdfeld und Ausbreitungsrichtung nicht allzu weit von 90° entfernt sind, wir also immer mit eher

senkrechter Lage der Ausbreitungsrichtung zum Feld beim Durchgang durch eine dämpfende Schicht rechnen können. Die Ausbreitung senkrecht zum Erdfeld gewinnt damit erhöhte Bedeutung.

Die von der solaren Ultrastrahlung zur Zeit des Strahlungsmaximums gebildeten Elektronen reichen also im Falle eines effektiven Anlagerungskoeffizienten von $\eta = 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{sec}$ zur Erklärung der an Atmospherics beobachteten Dämpfung aus, und man versteht hieraus das Einsetzen der Dämpfung auf der Nachtseite.

Dann dauerte aber die Dämpfung bis zum Sonnenaufgang fort, der in Amerika erst nach 8 Stunden eintrat. In dieser Zeit war die Intensität der nuklearen Komponente der solaren Ultrastrahlung am Boden auf 5% abgesunken. Die Einstellung des Gleichgewichts erfolgt in 80 km Höhe mit dem oben benutzten effektiven Anlagerungskoeffizienten von $10^{-14} \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ in wenigen Sekunden. Unsere Kenntnis dieses Koeffizienten ist aber sehr unsicher.

Eine Einstellung in 2 Minuten ist mit dem gemessenen Verlauf der Dämpfung durchaus verträglich. Dann sind die vorhandenen Elektronen aber schon weit mehr als ausreichend. Aber es bleibt noch die verschiedene Zeitabhängigkeit von Ultrastrahlung und Dämpfung zu erklären.

Weiter ist in Betracht zu ziehen, daß die Sauerstoffionen O_2^- zwar für die Dämpfung fast 60 000-mal unempfindlicher als Elektronen sind, daß sie sich jedoch bei entsprechender Langlebigkeit im Bereich der kleinen Iondichten über viel größere Zeit akkumulieren können als die Elektronen. Dann wächst ihre Zahl auf ein großes Vielfaches der Elektronenzahl an und damit auch die Wirksamkeit ihrer direkten Dämpfung. Daneben besteht aber insbesondere die Möglichkeit, daß aus diesem bis zum Sonnenaufgang bestehenden Vorrat an O_2^- Ionen durch irgendeinen Prozess – etwa durch geeignete Zusammenstöße mit dem Neutralgas oder dem bereits oben diskutierten Prozeß mit atomarem Sauerstoff – Elektronen vorübergehend frei werden und dann wieder durch erneute Anlagerung zu O_2^- Ionen führen. Die Zahl derselben wird also durch einen solchen Mechanismus nicht verändert. Aber die dämpfende Wirkung wird durch die zeitweise freien Elektronen entscheidend erhöht.

Damit ist das Anhalten der Dämpfung nach dem Abklingen der solaren Ultrastrahlung verständlich. Es genügt, wenn die Elektronen im Durchschnitt weniger als den 10⁵-ten Teil der Zeit frei sind.

Da das Sonnenlicht bei Sonnenaufgang die angelagerten Elektronen frei setzt, wäre in diesem Fall der Akkumulierung der O_2^- Ionen am 23.2.56 eine stärkere Dämpfung in der ersten Phase des Sonnenaufgangs zu erwarten gewesen als an anderen Tagen. Da aber gleichzeitig die Reflexions-

höhe absinkt [16] braucht sich die größere Elektronenzahl nicht als zusätzliche Dämpfung für die Langwellen auszuwirken. Am 23.2.56 sank nach *Belrose, Devenport* und *Weekes* [12] die Reflexionshöhe nach Sonnenaufgang bei 16 kHz auf den ungewöhnlich niedrigen Wert von 68 km in der Mittagszeit ab. Dies deutet auf eine ungewöhnlich starke Freisetzung von Elektronen. Die Beobachtung von *Revellio* [16], daß der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs in 85 km Höhe über der Ozonschicht für das Einsetzen einer Dämpfung maßgebend ist, macht die Freisetzung angelagerter Elektronen besonders plausibel, da zu dieser Zeit nur Licht mit $\lambda > 3000 \text{ \AA}$ zur Verfügung steht. Da nach den Meßergebnissen von *Winckler* [24] das solare Teilchenspektrum am 23.2.56 offensichtlich über die untere Energiegrenze des Spektrums der kosmischen Ultrastrahlung hinausging, ist angesichts des steilen Energiespektrums der solaren Ultrastrahlung (nach *Pfotzer* [26] $\sim E^{-5.5}$) durch dieselbe in hohen Breiten eine extrem verstärkte Dämpfung der Langwellen zu erwarten. Dies ist im Einklang mit der oben genannten völligen Dämpfung der Raumwelle auf 16 kHz von *Rugby* nach *Upsala*.

In normalen Nächten wird nur die Ionisierung durch die kosmische Strahlung durch Anlagerung der Elektronen aufgesammelt. Dies ist weniger als 1% der Ionisierung durch solare Ultrastrahlung am 23.2.56. Eine so geringe Dämpfung ist nicht mehr erfassbar.

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang, daß nach *Belrose, Devenport* und *Weekes* [12] *Stoffregen* in *Upsala* am Morgen des 23.2.56 kurz vor Sonnenaufgang (d. h. wohl zur Zeit des Sonnenaufgangs in 85 km Höhe über der Ozonschicht) eine plötzliche Zunahme der Kurzwellendämpfung in den Ionosphärenlotungen festgestellt wurde. Diese wurde so stark, daß alle Echos bis zu 8 MHz ausblieben. Die Dämpfung nahm nur langsam bis zum Abend ab. Vor Sonnenaufgang trat bei diesen Frequenzen keine Dämpfung in Erscheinung. Einen gleichen mit Sonnenaufgang einsetzenden Effekt melden die selben Autoren nach *Bevan* für die Station *Iverness*. *Lindau* am *Harz* in *Deutschland* hatte nach *Dieminger* [25] keinen solchen Effekt.

Diese Dämpfung der Kurzwellen rundet das Bild: Die stärkere Ionisierung in höherer Breite erzeugte einen größeren Vorrat an O_2^- Ionen. Die bei Sonnenaufgang freigesetzten Elektronen reichten in der kalten Winteratmosphäre wohl zu einer starken Dämpfung der Kurzwellen, aber noch lange nicht zur Reflexion aus, während im Gegensatz dazu bei Längswellen die Reflexion schon so weit nach unten rückte, daß darunter wegen der rasch zunehmenden Stoßzahl keine große Absorption mehr übrig blieb. In *Göttingen* nahe bei *Lindau* erreichte die solare Ultrastrahlung selbst am Boden nur etwa 15% derjenigen in *Stockholm*. Dazu kam aber dort noch die nicht bis zum Erdboden vordringende energiearme solare Ultrastrahlung, welche nach den oben besprochenen Messungen von *Winckler* [24]

primär eine mehrfach größere Intensität aufwies als die übrige solare Strahlung und noch am späten Abend des 23. 2. 56 in größeren Höhen eine mehrfach größere Ionisierung aufwies als die kosmische Ultrastrahlung.

Es erscheint deshalb als durchaus möglich, daß auch diese Dämpfung in der Nähe der Polarlichtzone bei Tag eine indirekte Folge der solaren Ultrastrahlung war, also von Teilchen mit Energien von mindestens 1 GeV.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für die finanzielle Unterstützung der Registrierungen und der eine von uns für eine persönliche Beihilfe.

Literatur

- [1] *Ehmert, A. und Pfozter, G.*: Zeitschrift für Naturforschung Band 11 a, Heft 4, 1956 S. 322-324.
- [2] Prof. Dr. *J. Lugeon* danken wir für die freundliche Überlassung.
- [3] *Meyer, P. und Simpson, J. A.*: Phys. Rev., Cosmic Radiation Studies, Enrico Fermi Institute Chicago 1956.
- [4] *Brown, R.*: Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 8, 278, 1956.
- [5] *Sittkus, A., Kühn, W. und Andrich, E.*: Zeitschrift für Naturforschung 11 a, 325, 1956.
- [6] *Forbush, S. E.*: J. Geophys. Res. 61 (März 1956).
- [7] *Ehmert, A.*: Stockholm Konferenz 1956 (im Druck).
- [8] *Lauter, E. A., Bartels, G., Sprenger, K. und Skeib, G.*: Wir danken für die freundliche Mitteilung eines an die Zeitschrift für die Meteorologie gegebenen Manuskripts.
- [9] *Aarons, J. und Barron, W. R.*: Nature, London 178, 277, 1956.
- [10] *Pierce, J. A. und Moritz, E. M.*: Cruft Lab. Progress Report 39 vom 1. 4. 56
- [11] *Mc. Kerrow, C. A.*: Nature (London) 178, Seite 223, 1956.
- [12] *Belrose, J. S., Devenport, M. H. und Weekes, K.*: Journal of Terrestrial and Atmospheric Physics 1956, Vol. 8, 281-286.
- [13] *Gold, T. und Palmer, D. R.*: Journal of Atm. Terr. Phys. Vol. 8 Nos 4/5 May 1956, 287-291.
- [14] *Ellison, M. A. und Reid, J. H.*: J. of Atm. Terr. Phys. Vol. 8 Nos 4/5 May 1956, 291-293.
- [15] *Lugeon, J.*: Localisation à grande distance des foyers de parasites atmosphériques sans radiogoniomètre, Academie des Sciences 1934.
- [16] *Revellia, K.*: Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Physik der Stratosphäre, Weissenau b. Ravensburg, Nr. 8, 1956.
- [17] *Ganges, A. V., Jenkies, J. F. jr. und van Allen, J. A.*: Phys. Rev. 75, 57, 1949.

- [18] *Van Allen, J. A. und Singer: Phys. Rev. 78, 819, 1950.*
- [19] *Meyer, P., Parker, E.N. und Simpson, J.A.: Report in Cosmic Radiation Studies of the Enrico Fermi Institute for Nuclear Studies, Chicago, Juni 1956 – erscheint in Physical Review. Wir danken den Autoren für die Übersendung des Berichtes.*
- [20] *Bates, D.R. und Massey, H.S.W.: Journ. of Atmospheric and Terrestrial Physics 2, 1, 1952.*
- [21] *Huxley: Phil. Mag. 25, 1938, S. 148.*
- [22] *Wagner, K.W.: Schwingungen und Wellen. Verlag Diederich Wiesbaden.*
- [23] *Nicolet: Journal of Atm. and Terr. Physics 1953, Vol. 3 pp 200-211.*
- [24] *Winckler, J.R.: Phys. Rev. Vol. 104, No. 1, Okt. 1. 1956.*
- [25] *Dieminger, W.: Freundliche persönliche Mitteilung.*
- [26] *Pfotzer, G.: Mitteilungen des MPI für Physik der Stratosphäre Nr. 7, 1956.*

Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials

Von A. Belluigi, Rom¹⁾

Zusammenfassung: Im ersten Teil leitet der Verfasser mit mehreren strengen Verfahren die Funktion des "scheinbaren spezifischen Widerstandes" von horizontal geschichteten Böden mit beliebigen Untergrund ab, die auf der Oberfläche mit Gleichstrom energisiert werden.

Durch Verwendung der entsprechenden Ergebnisse entwickelt der Verfasser im zweiten Teil neue strenge Formeln für die asymptotische Äquivalenz von horizontal geschichteten Böden und Untergrund von hoher Leitfähigkeit, von hohem spez. Widerstand und von nicht konstanter Leitfähigkeit.

Abstract: The Author deduces in the first part with more rigorous methods the function of the "apparent resistivity" regarding horizontally stratified soils with whatever underground which are energized with direct current on soil surface.

Utilizing the former results the Author develops in the second part new rigorous formulas of asymptotic equivalence for horizontally stratified soils and undergrounds with high conductivity, high resistivity and with no constant conductivity.

Teil I

§ 1. — Wir betrachten in dieser Abhandlung einen Erdboden dessen (isotrope) Leitfähigkeit nur mit der Tiefe veränderlich ist; ferner setzen wir voraus, daß von einer gegebenen Tiefe ab diese Leitfähigkeit einen gewissen Wert σ annimmt.

Wir bezeichnen mit:

x = die Tiefe,

a = die Tiefe ab welcher die Leitfähigkeit den Wert σ annimmt,

$\sigma(x)$ = die Leitfähigkeit in der Tiefe x ,

I = die von der Punktelektrode hervorgerufene Stromstärke,

$V(r)$ = das auf der Erdoberfläche im Abstand von der Elektrode gemessene Potential,

¹⁾ Prof. A. Belluigi, Leiter des Istituto di Fisica Terrestre an der Universität von Perugia, Italien.

$\phi(r) = \frac{2 r V(r)}{I}$ = den spezifischen scheinbaren Widerstand im Abstände r von der Elektrode.

Man beachte, daß im allgemeinen in der Praxis die Differenz

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) \text{ oder } \frac{\phi(r_1) - \phi(r_2)}{r_1 - r_2}$$

gemessen wird, wobei die beiden Abstände r_1 und r_2 von der Meßanordnung abhängig sind.

Unser Zweck ist nun der, die für große Werte von r (im allgemeinen für $r > a$) gültigen asymptotischen Formeln zu bestimmen.

Ein Weg zur Lösung des Problems d. h. zur Bestimmung der $\phi(r)$ ist bekanntlich folgender:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \frac{dv}{dx} - \lambda^2 v = 0; \quad (\sigma'(x) = \frac{d\sigma(x)}{dx}, \lambda = \text{konstant})$$

und suchen das besondere Integral $v(x, \lambda)$ welches nachstehende Bedingungen erfüllt:

- a) $v(x, \lambda)$ und $\sigma(x) \cdot v'(x, \lambda)$ seien stetige Funktionen von x .
- b) für $x > a$ verhalte sich die $v(x, \lambda)$ wie $C e^{-\lambda x}$ ($C = \text{Konstante}$)

Wie aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen bekannt ist, gibt es nur eine einzige Lösung dieser Art. Sobald diese Lösung bestimmt ist, erhält man $\phi(r)$ aus folgender Beziehung

$$(2) \quad \phi(r) = - \frac{1}{\sigma(0)} \int_0^{+\infty} \lambda \frac{v(0, \lambda)}{v'(0, \lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

wo $J_0(z)$ eine Bessel'sche Funktion erster Gattung und Null-ter Ordnung ist.

Man beachte, daß Gl. (2) von C unabhängig ist; demzufolge können wir für diese Konstante einen willkürlichen Wert annehmen. Auf Grund der weiter unten folgenden Ergebnisse setzen wir

$$C = e^{\lambda a}$$

Die $v(x, \lambda)$ nimmt infolgedessen nachstehende Form an [A. 1]:

$$v(x, \lambda) = e^{\lambda(a-x)} \quad (x > a)$$

Unter Berücksichtigung dieses für $x > a$ gültigen Ausdruckes von $v(x, \lambda)$, verwandelt sich die Bedingung a) in folgende [A. 2]:

$$a') \quad \begin{cases} v(a, \lambda) = 1 \\ \sigma(a) v'(a, \lambda) = -\lambda \bar{\sigma} \end{cases}$$

wobei wir einstweilen $0 < \bar{\sigma} < +\infty$ voraussetzen; die Extremwerte werden beim Grenzübergang in den Endformeln berücksichtigt werden.

§ 2. — Wir drücken jetzt $v(x, \lambda)$ durch Lösungen der Gl. (1) aus, deren Verhalten im Nullpunkt (anstatt im Unendlichen oder im Punkte a) bekannt ist.

Vor allem heben wir hervor, daß zwei willkürlich angenommene Lösungen der Gl. (1), $u(x, \lambda)$ und $v(x, \lambda)$, stets nachstehende Beziehung erfüllen

$$(3) \quad \sigma(x) [u(x, \lambda) v'(x, \lambda) - u'(x, \lambda) v(x, \lambda)] = \text{konstant};$$

Wenn das erste Glied der Gl. (3) bezüglich x differenziert wird und mittels Gl. (1) die $u''(x, \lambda)$ und $v''(x, \lambda)$ eliminiert werden, so erhält man tatsächlich das Resultat 0.

Wir bezeichnen nun mit $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ die zwei besondere Integrale der Gl. (1) die nachstehende Bedingungen erfüllen.

$$(4) \quad \begin{aligned} y(0, \lambda) &= 1, & y'(0, \lambda) &= 0 \\ z(0, \lambda) &= 0, & z'(0, \lambda) &= \frac{1}{\sigma(0)} \end{aligned}$$

Die Gl. (3) wird für $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$, unter Berücksichtigung der Gl. (4), wie folgt geschrieben:

$$(3') \quad \sigma(x) [y(x, \lambda) z'(x, \lambda) - y'(x, \lambda) z(x, \lambda)] = 1$$

Für $v(x, \lambda)$ leitet man in leichter Weise [A. 3] ab:

$$(5) \quad v(x, \lambda) = v(0, \lambda) y(x, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(x, \lambda)$$

Wir setzen nun für $v(x, \lambda)$ die sie bestimmenden Bedingungen a')

$$(6) \quad \begin{aligned} v(a, \lambda) &= v(0, \lambda) y(a, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(a, \lambda) = 1 \\ \sigma(a) v'(a, \lambda) &= \sigma(a) [v(0, \lambda) y'(a, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(a, \lambda)] = -\lambda \bar{\sigma} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden in $v(0, \lambda)$, $v'(0, \lambda)$ ein lineares System das eine einzige Lösung zuläßt

$$(7) \quad \begin{aligned} v(0, \lambda) &= \sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda) \\ v'(0, \lambda) &= -\frac{1}{\sigma(0)} [\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)] \end{aligned}$$

(wobei bei der Auflösung Gl. (3') berücksichtigt worden ist). Aus den Gl. (5) und (7) erhält man für $v(x, \lambda)$ folgenden Ausdruck

$$(8) \quad v(x, \lambda) = [\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)] y(x, \lambda) - \\ - [\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)] z(x, \lambda)$$

Wird jetzt Gl. (7) in Gl. (2) eingesetzt, so erhält man für

$$(9) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)}{\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Dieser Ausdruck von $\phi(r)$ hat gegenüber Gl. (2) den bedeutenden Vorteil, daß er Funktionen $(y(x, \lambda), z(x, \lambda))$ mitbeteiligt deren Verhalten auf Grund der Gl. (4) im Nullpunkt anstatt im Unendlichen bekannt ist. Dieser Vorteil ist sofort ersichtlich wenn y und z als Funktionen von λ betrachtet werden: in der Tat besitzen letztere einfachere Reihenentwicklungen mit dem Anfangspunkt $\lambda = 0$ als wie jene von $v(x, \lambda)$ für deren Entwicklung wir nur die Bedingungen a) und b) oder deren gleichwertige a') und b') verfügbar haben.

In der Tat ersieht man sofort, daß weder Gl. (1) noch die Bedingungen (4) variieren wenn man λ in $-\lambda$ ändert (was hingegen für die Bedingungen a') und b') zutrifft) und infolgedessen sind $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ gerade Funktionen von λ und ihre Reihenentwicklungen enthalten somit ausschließlich gerade Potenzen von λ . Wir können somit setzen

$$(10) \quad y(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x) \lambda^{2i} \\ z(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(x) \lambda^{2i}$$

woraus durch Einsetzen in Gl. (1) und durch Annullieren der Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ folgt, daß die $y_i(x)$ und $z_i(x)$ nachstehende Differentialgleichungen erfüllen

$$y_0''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_0'(x) = 0, \quad y_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_i'(x) = y_{i-1}(x) \\ (11) \quad z_0''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} z_0'(x) = 0, \quad z_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} z_i'(x) = z_{i-1}(x) \\ (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Diese Gleichungen bilden ein System von unendlich vielen, $y_i(x)$ und $z_i(x)$ enthaltenden Differentialgleichungen, welches die Bestimmung aller dieser Gleichungen durch Rekursion ermöglicht. Die von den unbekanntem

Funktionen zu erfüllenden Anfangsbedingungen erhält man sofort aus den Gl. (10) durch Berücksichtigung der Gl. (4); in der Tat besteht

$$y(0, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(0) \lambda^{2i} \equiv 1, \quad z(0, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(0) \lambda^{2i} \equiv 0$$

$$y'(0, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i'(0) \lambda^{2i} \equiv 0, \quad z'(0, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i'(0) \lambda^{2i} \equiv \frac{1}{\sigma(0)}$$

woraus man durch Identifikation der zwei Glieder sofort erhält

$$y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0, \quad z_0(0) = 0, \quad z_0'(0) = \frac{1}{\sigma(0)}$$

$$(12) \quad y_i(0) = 0, \quad y_i'(0) = 0, \quad z_i(0) = 0, \quad z_i'(0) = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

Durch Integrierung der Gl. (11) [A.5] erhält man schließlich

$$y_0(x) \equiv 1, \quad z_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$

(13)

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) y_{i-1}(t) dt, \quad z_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) z_{i-1}(t) dt$$

§ 3. — Wir können jetzt Gl. (9) auch für die bisher ausgeschlossene Werte $\sigma = 0$, $\sigma = +\infty$ besprechen. Wie bekannt ist, hängt die Konvergenz eines Integrals der Type

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda) d\lambda$$

wo $f(\lambda)$ eine stetige Funktion im Bereiche $(0 < \lambda < +\infty)$ ist, vom Verhalten der $f(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow +\infty$ ab.

Wenn wir nun λ in der zu integrierenden Funktion der Gl. (9) nach 0 streben lassen, wobei wir stets vor Augen halten, daß $\sigma \neq 0, +\infty$, ist, so erhalten wir [A. 6]

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)} = \frac{1}{\sigma}$$

die eine summierbare Funktion darstellt, weil sie an die Umgebung des Nullpunktes beschränkt ist.

Wenn wir nun, stets in der zu integrierenden Funktion, λ nach $+\infty$ streben lassen, so erhalten wir [A. 7]

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow +\infty} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)} = \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)}$$

und diese Funktion ist ebenfalls summierbar, denn es besteht

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} = \frac{z(a, 0)}{y(a, 0)} = \frac{z_0(a)}{y_0(a)} = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}$$

und somit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) = 0$$

In diesem Falle ist aber der Grenzübergang unter dem Integralzeichen gestattet und Gl. (9) verwandelt sich in

$$(9') \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

§ 4. — Weniger einfach ist der Fall von $\bar{\sigma} = 0$, denn die Grenzfunktion ist im Nullpunkt eine unendliche Größe erster Ordnung und somit nicht summierbar [A. 8]. Wie bereits erwähnt beziehen sich jedoch die Messungen praktisch stets auf die Differenz $\phi(r_1) - \phi(r_2)$ die, wie leicht ersichtlich [A. 8] beschränkt ist und somit in der Umgebung des Nullpunktes summiert werden kann.

Infolgedessen ergibt sich, für $\bar{\sigma} = 0$, folgender Ausdruck

$$(9'') \quad \phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z'(a, \lambda)}{y'(a, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] d\lambda$$

§ 5. — Wir suchen jetzt einen expliziten Ausdruck für die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ für welche die Gl. (13) einen Rekursionsausdruck liefern. Zu diesem Zwecke setzen wir für jede, in jedem innerhalb des Bereiches $(0, a)$ enthaltenen Bereiche $(0, x)$ integrierbare Funktion $f(x)$

$$(15) \quad [f]_x = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

$$[f_1 0 f_2 0 \dots 0 f_n]_x = \int_0^x f_1(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} f_2(x_2) dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \\ \cdot \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n) dx_n$$

wobei die im zweiten Gliede dieser Formel angegebene Integrationsfolge so zu verstehen ist, daß man vorerst die $f_n(x)$ zwischen 0 und einer veränderlichen Grenze x_{n-1} integriert, dann das Resultat mit der Funktion $f_{n-1}(x)$ als Funktion der oberen Grenze x_{n-1} der vorhergehenden Integration multipliziert, nacheinander zwischen 0 und einer ebenfalls als veränderlich betrachteten Grenze x_{n-2} integriert und daß man so fortfährt bis zur letzten Integration des vorhergehenden Resultates (Funktion von x_1), multipliziert mit $f_1(x_1)$ und integriert zwischen 0 und x : es ergibt sich natürlich eine Funktion von x .

Aus der zweiten Gl. (15) erhält man sofort

$$\frac{d}{dx} [f_1 0 f_2 0 \dots 0 f_n] = f_1(x) \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \\ \cdot \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n) dx_n = f_1(x) [f_2 0 \dots 0 f_n]_x$$

$$(16) \quad [f_1 0 f_2 0 \dots 0 f_n] = \int_0^x f_1(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} f_2(x_2) dx_2 \dots \\ \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n) dx_n = 0$$

und ferner

$$(17) \quad [f 0 \zeta]_x + [\zeta 0 f] = [f]_x \cdot [\zeta]_x$$

die dadurch nachgewiesen wird, daß man durch Differentiation beider Glieder eine Identität erhält und daß beide Glieder, für $x = 0$, gleich Null sind.

Schließlich verzichten wir in den Gl. (15) für $x = a$ auf den Index a , d. h. wir setzen

$$[f_1 0 f_2 0 \dots 0 f_n]_a = [f_1 0 f_2 0 \dots 0 f_n], \quad [f]_a = [f]$$

§ 6. — Mit dieser symbolischen Bezeichnung können die expliziten Ausdrücke für $y(x)$ und $z(x)$ leicht aufgeschrieben werden: für die ersten Werte von i ergibt sich [A. 9]

$$\begin{aligned}
 (18) \quad y_0(x) &\equiv 1 & z_0(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} \right]_x \\
 y_1(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x & z_1(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \\
 y_2(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x & z_2(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \\
 y_3(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x & z_3(x) &= \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Demzufolge erhalten wir für $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ folgende Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 (19) \quad y(x, \lambda) &= 1 + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x \lambda^2 + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x \lambda^4 + \dots \\
 z(x, \lambda) &= \left[\frac{1}{\sigma} \right]_x + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \lambda^2 + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \lambda^4 + \dots
 \end{aligned}$$

die für jedes λ konvergent sind und woraus folgt [A. 9]

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \sigma(x) y'(x, \lambda) &= [\sigma]_x \lambda^2 + [\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]_x \lambda^4 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]_x \lambda^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\sigma(x) z'(x, \lambda) = 1 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]_x \lambda^4 + \dots$$

Obiges vorausgesetzt setzen wir in Gl. (9)

$$Y(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)], \quad Z(\lambda) = \sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)$$

so daß Gl. (9) wie folgt geschrieben wird

$$(9''') \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Mit Hilfe der Gl. (19) und (20) erhalten wir (wenn wir in dieselben $x = a$ setzen)

$$(21) \quad \begin{aligned} Y(\lambda) &= \bar{\sigma} + [\sigma] \lambda + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^3 + \dots \\ Z(\lambda) &= 1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^3 + \dots \end{aligned}$$

welche das Verhältnis $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ als Verhältnis von zwei Potenzreihen liefern.

§ 7. — Wir erinnern jetzt daran, daß das asymptotische Verhalten (für große Werte von r) eines Integrals der Type

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

hauptsächlich vom Verhalten der $f(\lambda)$ in der Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ abhängt: denn, für ein sehr großes r ist $J_0(\lambda, r)$ eine rapid variable Funktion. Tatsächlich kann man nachstehendes nachweisen.

Wenn die $f(\lambda)$ im Nullpunkt eine (auch nur asymptotische und nicht notwendigerweise konvergente) Entwicklung von der Type

$$f(\lambda) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \lambda^i$$

zuläßt, so ergibt sich asymptotisch für $r \rightarrow +\infty$

$$(22) \quad \int_0^{+\infty} f(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \sim \frac{a_0}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} (-i)^i \frac{(2i-1)!! a_{2i}}{r^{2i+1}},$$

$$((2i-1)!! = 1, 3, 5 \dots (2i-1))$$

Man beachte, daß in dieser Entwicklung die Glieder mit ungeradem Index a_{2i+1} der Entwicklung von $f(\lambda)$ nicht erscheinen: dies bedeutet, daß sie in der Entwicklung des Integrals mit Gliedern beitragen, die nach Null viel rapider streben als wie jedwede Potenz $\frac{1}{r^{\alpha}}$. In der Tat ist z.B. der Fall eines Untergrundes von unendlich großer Leitfähigkeit ($\bar{\sigma} = \infty$) be-

kannt, bei dem $f(\lambda)$ eine ungerade Funktion $\left(f(\lambda) = \lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)}, f(-\lambda) = -\lambda \frac{z(\mathbf{a}, -\lambda)}{y(\mathbf{a}, -\lambda)} = -\lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)} = -f(\lambda) \right)$ ist und infolgedessen sind alle

a_{2i} in ihrer Entwicklung gleich Null: in diesem Falle kann nachgewiesen werden, daß die $\phi(r)$ beim Wachsen von r exponentiell abnimmt, denn ihr Verhalten hängt beim Streben von r nach Unendlich von den a_{2i+1} ab. Andere ähnliche Fälle werden in späteren Berichten beschrieben werden.

Die a_{2i+1} geben jedenfalls bei großen Entfernungen keinen Beitrag zum Verhalten der $\phi(r)$: ihretwegen kann die Gl. (22) praktisch überflüssig sein, da sie nur für allzu große und somit praktisch zwecklose Entfernungen anwendbar ist: ein ähnlicher Fall ($\bar{\sigma}$ sehr klein oder gleich Null) wird weiter unten behandelt werden.

§ 8. — Wir wenden jetzt Gl. (22) an die durch Gl. (9''') gegebene $\phi(r)$ an. Es besteht [A. 10]

$$(23) \quad \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ 1 + \left(\bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \right) \lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}} - 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right) \lambda^2 + \dots \right\}$$

und

$$(24) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda \sim \frac{a_0}{r} - \frac{a_2}{r^3} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} + \left(2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

bezw. in expliziter Form

$$(24') \quad \phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} + \left(2 \int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x) dx \right)^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

Aus Gl. (24) ergibt sich offensichtlich die bekannte Tatsache, daß das asymptotische Verhalten in erster Näherung (Glied mit $\frac{1}{r}$) nur von der Leitfähigkeit ($\bar{\sigma}$) des Untergrundes abhängt und daß erst in zweiter Näherung die Verteilung der Leitfähigkeit in den verschiedenen Schichten eine Rolle spielt.

§ 9. — Bezüglich der Entfernungen, für die Gl. (24) anwendbar ist, nehmen wir an, daß letztere für Entfernungen gilt für die das Verhältnis zwischen dem zweiten und dem ersten Glied genügend klein ist: diese Annah-

me ist nicht sehr streng, doch genügt sie im allgemeinen in der Praxis. Sie führt üblich zu einem Fehler von der Größenordnung des Quadrates des genannten Verhältnisses.

Wir setzen somit die Gl. (24) als gültig für Entfernungen r voraus, die größer sind als wie der Abstand [A. 11]

$$(25) \quad r_0 = \sqrt{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} \right]_0 \sigma - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right|} = \sqrt{\left| 2 \int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x) dx \right)^2}{\bar{\sigma}^2} \right|}$$

Diese Entfernung hat im allgemeinen die Größenordnung von a [A. 11] soweit nicht ein unter der Wurzel befindliches Glied allzu groß ist. Trotzdem aber besteht, vom theoretischen Standpunkt aus, stets die Gültigkeit der Annahme, daß nämlich Gl. (24) für Entfernungen $r > r_0$ gültig sei: wenn andererseits r_0 allzu groß ist, so bleibt die Gl. (24) auf Entfernungen beschränkt die kein praktisches Interesse mehr besitzen.

So z. B. hat der Addend

$$2 \left[\frac{1}{\sigma} \right]_0 \sigma = 2 \int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) dt$$

wie leicht ersichtlich ist, die Größenordnung des folgenden Produktes

$$\left[\frac{1}{\sigma} \right] \cdot [\sigma] = \left(\int_0^a \sigma(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)} \right)$$

und dieses Produkt ist sehr groß, wenn im Bereiche $(0, a)$ mächtige und sehr leitfähige Schichten (das zweite Integral der vorstehenden Formel ist groß) oder mächtige und isolierende Schichten (das erste Integral ist groß) vorhanden sind welche, bei der Entfernung bei der die Messungen praktisch durchgeführt werden, den Einfluß der darunterliegenden Schichten nicht zum Ausdruck bringen. In diesem Falle genügt es, solche Schichten als Untergrund zu betrachten, d. h. die Tiefe a auf die erste ziemlich mächtige Schicht von unendlich großer oder nullter Leitfähigkeit zu beschränken und das Problem so zu behandeln, als ob die darunterliegende Schicht den Untergrund bilde.

Der zweite Addend der Gl. (25)

$$\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(\int_0^a \sigma(x) dx \right)^2$$

überwiegt über den ersten wenn $\bar{\sigma}$ klein gegenüber $\int_0^a \sigma(x) dx$ ist: mit anderen Worten gesagt, überwiegt das in Frage kommende Glied über das andere (welches, man vergesse es nicht, die Größenordnung a besitzt) wenn das

Verhältnis $\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_0^a \sigma(x) dx$ sehr groß gegenüber a ist, d. h. wenn

$$\bar{\sigma} \ll \frac{1}{a} [\sigma] = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma(x) dx$$

(mittlere Leitfähigkeit der Schichten zwischen 0 und a) ist. In diesem Falle ist Gl. (24) praktisch noch wertlos, da sie nur für viel größere Entfernungen als wie $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ gültig ist.

§ 10. – Um aber auch für diesen Fall noch gültige Formeln für kleinere Entfernungen als $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ (und natürlich für größere als a) zu erhalten, wenden wir ein anderes Verfahren an.

Die Eigentümlichkeit des bisher angewandten Verfahrens besteht in der Bildung der Reziproken der im Nenner befindlichen Reihe: diese Reziproke führt steigende Potenzen von $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ ein, die die Geschwindigkeit

ausgleichen mit der die Multiplikatoren $\frac{1}{r^\alpha}$ nach Null streben und die in-

folgedessen die den behaltene Gliedern aufeinanderfolgende nicht vernachlässigbar gestalten, sofern selbstverständlich nicht sehr große und somit zwecklose Entfernungen betrachtet werden. Dies kann vermieden werden, wenn man die bekannte Formel

$$(26) \quad \int_0^{+\infty} \frac{J_0(rx)}{x+k} dx = \frac{2}{\pi} [H_0(rk) - Y_0(rk)]$$

benutzt, wobei Y_0 die Bessel'sche Funktion zweiter Gattung und nullter Ordnung und H_0 die Struve'sche Funktion null-ter Ordnung ist. Wir bezeichnen im folgenden das zweite Glied der Gl. (26) mit $\psi(x)$

$$(27) \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi} [H_0(x) - Y_0(x)]$$

Für große Werte von x läßt die $\psi(x)$ eine asymptotische Entwicklung zu deren erste Glieder durch

$$(28) \quad \psi(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

gegeben sind.

Um die asymptotischen Formeln für $\phi(r)$, im Falle daß $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ groß ist, zu erhalten, behandeln wir in der Entwicklung von $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ die Größe $\bar{\sigma}$ als ob sie die gleiche Größenordnung von λ habe.

In erster Näherung behalten wir in den Entwicklungen von $Z(\lambda)$ und $Y(\lambda)$ nur die hauptsächlichsten Glieder: nachdem wir, wie gesagt, $\bar{\sigma}$ als von der gleichen Größenordnung λ betrachten, folgt, daß wir nicht nur die Glieder mit λ vom zweiten oder höheren Grade, sondern auch das Produkt $\bar{\sigma} \lambda$ und die Potenzen von $\bar{\sigma}$ zweiten oder höheren Grades enthaltende Glieder vernachlässigen werden. Infolgedessen schreiben wir für die Gl.

$$(21) \quad \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\bar{\sigma} + [\sigma] \lambda}$$

woraus

$$(29) \quad \phi(r) \sim \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\bar{\sigma} + [\sigma] \lambda} d\lambda = \frac{1}{[\sigma]} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}} d\lambda$$

$$\phi(r) = \frac{2}{r[\sigma]} \left[H_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right) - Y_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right) \right] = \frac{1}{[\sigma]} \psi\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right)$$

wobei $\psi(x)$ durch Gl. (27) gegeben ist.

Auf Grund der Gl. (28) können wir schreiben

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{\bar{\sigma}^3}{[\sigma]^3} r^3} \right)$$

woraus, da für große Werte von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r$ das erste Glied über das zweite überwiegt, sich folgende Beziehung ergibt

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma} r}$$

die mit Gl. (24) übereinstimmt und von der nur das erste Glied behalten werden soll.

§ 11. – Für sehr kleine Werte von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r$ (wobei selbstverständlich die

Voraussetzung $r \gg a$ stets aufrecht erhalten bleibt) erhält man dagegen eine Verallgemeinerung der klassischen, vom Falle $\bar{\sigma} = 0$, abgeleiteten Formel. Aus den bekannten Reihenentwicklungen von $H_0(x)$ und $Y_0(x)$, erhält man durch Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung

$$\psi(x) \sim -\lg x - \gamma + \lg 2$$

($\gamma =$ Konstante von *Euler-Mascheroni*) und somit, durch Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r$,

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \left\{ -\lg\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right) - \gamma + \lg 2 \right\} = \frac{1}{[\sigma]} \left\{ -\lg r - \lg \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} - \gamma + \lg 2 \right\}$$

und infolgedessen

$$(30) \quad \phi(r) \sim -\frac{1}{[\sigma]} \lg r + \frac{1}{[\sigma]} \left(-\gamma + \lg \frac{2[\sigma]}{\bar{\sigma}} \right)$$

aus der sich die klassische Formel

$$(31) \quad \phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{1}{[\sigma]} \lg \frac{r_2}{r_1}$$

ergibt, die für $\bar{\sigma} = 0$ (isolierender Untergrund) asymptotisch gültig ist. Im Falle, daß $\bar{\sigma}$ klein, jedoch nicht genau Null ist, kann die Formel nur für Entfernungen von $r \ll \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ angewandt werden, sodaß von der Größen-

ordnung von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r$ vernachlässigt werden dürfen; widrigenfalls muß man Gl. (29) anwenden.

§ 12. – Wir gehen jetzt zur nächsten Näherung (die grundsätzlich der Näherung (24) entspricht) über. Wir behalten in $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ alle Glieder bis zur darauffolgenden Größenordnung gegenüber den in der vorherigen Näherung behaltenen Gliedern. Wir setzen somit

$$(32) \quad \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2}{\bar{\sigma} + [\sigma] \lambda + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] \lambda^2 + \left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] \lambda^3}$$

Wir erinnern, daß wir bei dieser Näherung die Glieder der Type $\bar{\sigma} \lambda^2$ und λ^3 als vernachlässigbar betrachten und bemerken, daß der Nenner der Gl. (32) folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\bar{\sigma} + [\sigma] \lambda + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^3 = \bar{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right\} \\ \left\{ 1 + A \lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2 \right\}$$

wobei $A = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\}$ [A. 12] ist.

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in Gl. (32) erhält man

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\bar{\sigma} \left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right]} \cdot \frac{1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2}{1 + A \lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2}$$

woraus man, wenn die Reziproke des Nenners des zweiten Bruches berechnet wird, erhält

$$\frac{1}{1 + A \lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2} \sim 1 - A \lambda - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \lambda^2$$

(durch Vernachlässigung der Glieder, die λ in der dritten oder höheren Potenz enthalten) und schließlich erhält man [A. 13]

$$(33) \quad \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{1}{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda \alpha} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) + K \lambda \right\}, \quad (K = \text{Konstante})$$

worin

$$(34) \quad \alpha = 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\}, \quad \beta = 1 - 2 \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]$$

Durch Einsetzen der Gl. (33) in Gl. (9''') erhält man

$$\phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha \lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda \right] J_0(\lambda r) d\lambda \right\}$$

und schließlich [A. 14]

$$(35) \quad \phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \frac{\beta}{\alpha^3} \psi\left(\frac{\bar{\sigma} r}{[\sigma] \alpha}\right) + \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \frac{1}{r} = \frac{2}{\pi [\sigma]} \frac{\beta}{\alpha^3} \left[H_0\left(\frac{\bar{\sigma} r}{[\sigma] \alpha}\right) - Y_0\left(\frac{\bar{\sigma} r}{[\sigma] \alpha}\right) \right] + \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \frac{1}{r}$$

Wir bemerken vorerst daß, wenn wir in dieser Formel die Werte von ziemlich groß annehmen, wir die asymptotische Entwicklung (28) für die ψ als gültig betrachten und somit [A. 15] schreiben können

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} + \left(2 \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

die mit Gl. (24) übereinstimmt.

Ferner [A. 16] stimmt Gl. (35) für sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ mit Gl. (29) überein und somit führt der Grenzübergang, für $\bar{\sigma} \rightarrow 0$, wiederum zur Gl. (31).

§ 13. – Zusammenfassend kann gesagt werden, daß Gl. (35) für große Werte von r mit Gl. (24) und für sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ mit Gl. (29) und somit, für $\bar{\sigma} = 0$, grundsätzlich mit Gl. (31) übereinstimmt. Für nicht sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ (oder besser gesagt für Werte von $\bar{\sigma}$ für welche $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}$ a nicht klein ist) sind die Gl. (35) und (24) vom praktischen Standpunkt aus gleichwertig und somit beide für mittlere Werte von r nicht anwendbar. Für mittlere Entfernungen muß man demzufolge Gl. (29) benutzen.

Für die Gültigkeit der Gl. (35) ist es ferner wesentlich, daß α sehr klein gegenüber der Einheit ist: demzufolge ist es notwendig, nachdem der in der Klammer befindliche Faktor von α die Größenordnung $\left[\frac{1}{\sigma} \right] \cdot [\sigma]$ besitzt, daß

$$\alpha \sim 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \cdot [\sigma] \sim 1$$

$$\frac{\bar{\sigma}^2 \left[\frac{1}{\sigma} \right]}{[\sigma]^2} [\sigma] \sim 0, \quad \bar{\sigma} \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{\sigma} \right]}{[\sigma]}} \sim 0$$

d. h., daß

$$(36) \quad \bar{\sigma} \ll \sqrt{\frac{[\sigma]}{\left[\frac{1}{\sigma} \right]}}$$

ist.

Um nun beurteilen zu können ob $\bar{\sigma}$ groß oder klein ist, ist der Vergleich mit der mittleren Leitfähigkeit $\frac{1}{a}[\sigma]$ weniger wichtig als wie der Vergleich mit der Größe

$$\bar{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\left[\frac{1}{\sigma} \right]}} = \sqrt{\frac{\int_0^a \sigma(x) dx}{\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}}}$$

die den Charakter einer Art "mittlerer Leitfähigkeit" (deren Dimensionen sie auch hat) besitzt. Später bei der Behandlung der Äquivalenzformeln, wird man ersehen, daß $\bar{\sigma}_0$ in wesentlicher Form erscheint.

Aus dem obengesagten ersieht man die Gültigkeit der Formel (24), die theoretisch für größere Entfernungen als wie $r_0 = \sqrt{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right|}$ stets gültig ist, praktisch jedoch auf den Fall beschränkt bleibt, in dem r_0 nicht allzu groß ist. Mit Ausnahme des Falles in dem $\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]$ sehr groß ist (für welchen wie bereits gesagt nur das Verfahren wiederholt werden muß, indem die erste genügend mächtige Schicht von höchster oder geringster Leitfähigkeit als Untergrund betrachtet wird) kann Gl. (24) für mäßige oder kleine Werte von $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ verwandt werden. Dies kommt vor, wenn $\bar{\sigma}$ groß oder vergleichbar gegenüber $[\sigma]$ ist, d. h. für eine Gestaltung bei der der Untergrund eine Leitfähigkeit von mittlerem, vergleichbarem oder großem Wert gegenüber der mittleren Leitfähigkeit der darüberliegenden Schichten besitzt: insbesondere im Falle eines Untergrundes von sehr großer oder geradezu unendlich großer Leitfähigkeit.

Hingegen im Falle, daß das Verhältnis $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ sehr groß ist, kann die Gl. (24) für mittlere Entfernungen (r_0 sehr groß) nicht angewandt werden und müssen somit die Gl. (29) oder (35) benutzt werden. Dies kommt vor, wenn $\bar{\sigma}$ sehr klein und $[\sigma]$ von mittlerer Größe ist (Untergrund von sehr kleiner mittlerer Leitfähigkeit gegenüber jener der darüberliegenden Schichten) oder wenn $\bar{\sigma}$ mittelgroß und $[\sigma]$ sehr groß ist (darüberliegende Schicht von großer Leitfähigkeit): insbesondere können die Gl. (29) und (35) für Untergründe von niedrigster oder nullter mittlerer Leitfähigkeit benutzt werden.

Man beachte außerdem, daß, wenn die Entfernung r_0 nicht groß ist ($\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ von mittlerer Größe), praktisch gleichgültig Gl. (24) oder Gl. (35) angewandt werden kann: die besondere Nützlichkeit der Gl. (35) bleibt somit auf den Fall beschränkt in dem $\bar{\sigma}$ sehr klein ist.

Anhang

[A.1]

Für $x > a$, nachdem $\sigma(x) = \bar{\sigma} = \text{konstant}$, $\sigma'(x) \equiv 0$ ist, verwandelt sich Gl. (1) in

$$(1') \quad \frac{d^2 v}{dx^2} - \lambda^2 v = 0$$

eine Gleichung, die das allgemeine Integral

$$v(x, \lambda) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}, \quad (x > a)$$

zuläßt und, infolge der Bedingung b), muß $c_1 = 0$ sein und infolgedessen ist, wegen der obenerwähnten Wahl der Multiplikationskonstanten

$$v(x, \lambda) = c_2 e^{-\lambda x} = e^{\lambda(a-x)}, \quad (x > a)$$

[A.2]

In der Tat fordert die Stetigkeit von $v(x, \lambda)$ für $x = a$, daß

$$\lim_{x \rightarrow a^-} v(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow a^+} v(x, \lambda)$$

ist. Aber $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow a^+} e^{\lambda(a-x)}$, woraus sich sofort die erste der Gl. a') ergibt.

Analog muß, wegen der Stetigkeit von

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \sigma(x) v'(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma(x) v'(x, \lambda)$$

sein. Jedoch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma(x) v'(x, \lambda) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma(x) \frac{d}{dx} e^{\lambda(a-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma(x) \lim_{x \rightarrow a^+} (-\lambda) e^{\lambda(a-x)} = -\lambda \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma(x) = -\lambda \bar{\sigma} \end{aligned}$$

(da für jedes $x > a$, $\sigma(x) = \bar{\sigma}$); hieraus erhält man sofort die zweite Gl. a').

[A.3]

Das besondere Integral $v(x, \lambda)$ der linearen Gleichung (1) kann als lineare Kombination von zwei besonderen Integralen $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ der Gl. (1) selbst ausgedrückt werden, welche ein Grundsystem bilden, da

$$W[y(0, \lambda), z(0, \lambda)] = \begin{vmatrix} y(0, \lambda) & z(0, \lambda) \\ y'(0, \lambda) & z'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma(0)} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma(0)} \neq 0$$

ist und infolgedessen, auf Grund des Satzes von *Lionville*, besteht für jedes

$$W[y(x, \lambda), z(x, \lambda)] \neq 0$$

Man hat somit

$$v(x, \lambda) = c_1(\lambda) y(x, \lambda) + c_2(\lambda) z(x, \lambda)$$

woraus man durch Einsetzen von $x = 0$

$$v(0, \lambda) = c_1(\lambda) y(0, \lambda) + c_2(\lambda) z(0, \lambda)$$

$$v'(0, \lambda) = c_1(\lambda) y'(0, \lambda) + c_2(\lambda) z'(0, \lambda)$$

erhält und mit Berücksichtigung der Gl. (4)

$$v(0, \lambda) = c_1(\lambda), \quad v'(0, \lambda) = c_2(\lambda)/\sigma(0)$$

und somit Gl. (5).

[A.4]

Durch Einsetzen der Gl. (10) in Gl. (1) erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i''(x) \lambda^{2i} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \sum_{i=0}^{\infty} y_i'(x) \lambda^{2i} - \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x) \lambda^{2i} \equiv 0$$

($i = 0, 1, 2, \dots$)

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i''(x) \lambda^{2i} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \sum_{i=0}^{\infty} z_i'(x) \lambda^{2i} - \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} z_i(x) \lambda^{2i} \equiv 0$$

Diese Ausdrücke müssen identisch Null in λ sein; demzufolge müssen die Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ für jedes x gleich Null sein.

Wir können z. B. die erste der vorstehenden Beziehungen in folgender Weise schreiben

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[y_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_i'(x) \right] \lambda^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x) \lambda^{2(i+1)} \equiv 0$$

Wenn in der zweiten Summe $i + 1 = k$ gesetzt wird, so erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(x) \lambda^{2(i+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} y_{k-1}(x) \lambda^{2k} = \sum_{i=1}^{\infty} y_{i-1}(x) \lambda^{2i}$$

und die vorherige Beziehung kann wie folgt geschrieben werden

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[y_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_i'(x) \right] \lambda^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} y_{i-1}(x) \lambda^{2i} \equiv 0$$

$$y_0''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_0'(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[y_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_i'(x) - y_{i-1}(x) \right] \lambda^{2i} \equiv 0$$

woraus, wenn die Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ gleich Null gesetzt werden, man die Gl. (11) erhält.

[A. 5]

Zur Integrierung der Gl. (11) mit den Bedingungen (12) bemerken wir, daß, wenn jedes Glied mit $\sigma(x)$ multipliziert wird, diese Gleichungen folgende Form annehmen

$$\sigma(x) y_0''(x) + \sigma'(x) y_0'(x) = 0, \quad \sigma(x) y_i''(x) + \sigma'(x) y_i'(x) = \sigma(x) y_{i-1}(x)$$

$$\sigma(x) z_0''(x) + \sigma'(x) z_0'(x) = 0, \quad \sigma(x) z_i''(x) + \sigma'(x) z_i'(x) = \sigma(x) z_{i-1}(x)$$

und, daß man, für $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\sigma(x) y_i''(x) + \sigma'(x) y_i'(x) = \frac{d}{dx} [\sigma(x) y_i'(x)]$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sigma(x) z_i''(x) + \sigma'(x) z_i'(x) = \frac{d}{dx} [\sigma(x) z_i'(x)]$$

erhält. Infolgedessen kann die erste Gl. (11) wie folgt geschrieben werden

$$\frac{d}{dx} [\sigma(x) y_0'(x)] = 0$$

woraus sich

$$\sigma(x) y_0'(x) = \text{konstant}$$

ergibt. Für $x = 0$ ist jedoch $y_0'(0) = 0$ und somit ist

$$\sigma(0) y_0'(0) = 0$$

Infolgedessen muß die Konstante notwendigerweise gleich Null sein und demzufolge ist $y'_0(x)$ identisch gleich Null. Es folgt, daß $y_0(x) = \text{konstant}$ ist; aber $y_0(0) = 1$ und somit ist

$$y_0(x) = 1$$

Wenn in analoger Weise für $z_0(x)$ verfahren wird, erhält man daraufhin

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x) z'_0(x)] = 0$$

$$\sigma(x) z'_0(x) = \text{konstant}$$

Jedoch $z'_0(0) = \frac{1}{\sigma(0)}$ und somit $\frac{1}{\sigma(0)} \cdot \sigma(0) = \text{konstant} = 1$

$$z'_0(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$$

$$z_0(x) = z_0(0) + \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$

$$z_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}, \quad (z_0(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

Für die weiteren Gl. (11) kann, für $i = 1, 2, 3, \dots$ geschrieben werden

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x) y'_i(x)] = \sigma(x) y_{i-1}(x)$$

$$\sigma(x) y'_i(x) - \sigma(0) y'_i(0) = \int_0^x \sigma(t) y_{i-1}(t) dt$$

$$\sigma(x) y'_i(x) = \int_0^x \sigma(t) y_{i-1}(t) dt, \quad (y'_i(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

$$y_i(x) - y_i(0) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) y_{i-1}(t) dt$$

$$(13) \quad y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) y_{i-1}(t) dt, \quad (y_i(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

Mit dem gleichen Verfahren und durch dauernde Berücksichtigung der Gl. (12) erhält man für die $z_i(x)$

$$(13) \quad z_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) z_{i-1}(t) dt \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

[A.6]

Um den

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a, \lambda)}{\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a, \lambda)}$$

zu berechnen, erinnern wir, daß infolge der Gl. (10) für $x = a$ nachstehende Beziehungen bestehen

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda(a, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [y_0(a) + y_1(a)\lambda^2 + y_2(a)\lambda^4 + \dots] = y_0(a) = 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} y'(a, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [y'_0(a) + y'_1(a)\lambda^2 + y'_2(a)\lambda^4 + \dots] = y'_0(a) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z(a, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [z_0(a) + z_1(a)\lambda^2 + z_2(a)\lambda^4 + \dots] = z_0(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z'(a, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + z'_2(a)\lambda^4 + \dots] = z'_0(a) = \frac{1}{\sigma(a)}$$

und somit, wenn $\sigma \neq 0, +\infty$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a, \lambda)}{\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a, \lambda)} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a, \lambda)}{\sigma(a)\frac{y'(a, \lambda)}{\lambda} + \bar{\sigma}y(a, \lambda)} = \\ &= \frac{\sigma(a)\frac{1}{\sigma(a)}}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \end{aligned}$$

$$\text{(denn } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y'(a, \lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y'_0(a) + y'_1(a)\lambda^2 + \dots}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y'_1(a)\lambda^2 + \dots}{\lambda} =$$

$= \lim [y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 + \dots] = 0)$ und infolgedessen ist für unsere Funktion

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a, \lambda)}{\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_0(\lambda r)}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}$$

($\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_0(\lambda r) = 1$).

[A. 7]

Wenn wir $\bar{\sigma}$ nach $+\infty$ streben lassen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow \infty} \lambda \frac{\sigma(\mathbf{a})z'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(\mathbf{a}, \lambda)}{\sigma(\mathbf{a})y'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lambda \frac{\frac{\sigma(\mathbf{a})z'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda z(\mathbf{a}, \lambda)}{\bar{\sigma}}}{\frac{\sigma(\mathbf{a})y'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda y(\mathbf{a}, \lambda)}{\bar{\sigma}}} J_0(\lambda r) = \\ &= \lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r). \end{aligned}$$

[A. 8]

Wenn wir $\bar{\sigma}$ nach 0 streben lassen, so ist die Grenzfunktion

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{\sigma(\mathbf{a})z'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(\mathbf{a}, \lambda)}{\sigma(\mathbf{a})y'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r) = \lambda \frac{z'(\mathbf{a}, \lambda)}{y'(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r)$$

so, daß

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{z'(\mathbf{a}, \lambda)}{y'(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{z'(\mathbf{a}, \lambda)}{\frac{y'(\mathbf{a}, \lambda)}{\lambda}} J_0(\lambda r) = +\infty$$

$$\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y'(\mathbf{a}, \lambda)}{\lambda} = 0 \right)$$

und, da es sich um ein Unendliches ersten Grades handelt $\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{z'(\mathbf{a}, \lambda)}{y'(\mathbf{a}, \lambda)} J_0(\lambda r) = \right.$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{z'_0(\mathbf{a}) + z'_1(\mathbf{a})\lambda^2 + \dots}{y'_1(\mathbf{a})\lambda^2 + y'_2(\mathbf{a})\lambda^4 + \dots} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{z'_0(\mathbf{a}) + z'_1(\mathbf{a})\lambda^2 + \dots}{y'_1(\mathbf{a}) + y'_2(\mathbf{a})\lambda^2 + \dots} J_0(\lambda r) =$$

$$= \frac{z'_0(\mathbf{a})}{y'_1(\mathbf{a})} = \frac{1}{\int_0^{\mathbf{a}} \sigma(x) dx} \neq 0, \text{ so ist die Grenzfunktion in der Umgebung des Null-}$$

punktes bestimmt nicht summierbar und Gl. (9) wird sinnlos. Wie jedoch bereits gesagt, beziehen sich die Messungen in der Praxis stets auf die Differenz

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\sigma(\mathbf{a})z'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(\mathbf{a}, \lambda)}{\sigma(\mathbf{a})y'(\mathbf{a}, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(\mathbf{a}, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] d\lambda$$

und infolgedessen wird die zu integrierende Grenzfunktion

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] &= \\ &= \lambda \frac{z'(a, \lambda)}{y'(a, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] \end{aligned}$$

welche, in folge der bekannten Reihenentwicklung von $J_0(t)$ in nachstehender Weise geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} \lambda \frac{z'(a, \lambda)}{y'(a, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] &= \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \dots}{y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 + \dots} \\ &= \frac{\left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^4}{(2!)^2} - \dots \right] - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^4}{(2!)^2} - \dots \right] \right\}}{\left\{ \left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^2 \right\} + \frac{1}{(2!)^2} \left[\left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^4 \right] + \dots} = \\ &= \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \dots}{y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 + \dots} \lambda^2 \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} \left[\left(\frac{r_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{r_2}{2}\right)^4 \right] + \dots \right\} = \\ &= \lambda \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \dots}{y'_1(a) + y'_2(a)\lambda^2 + \dots} \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} \left[\left(\frac{r_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{r_2}{2}\right)^4 \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

und somit ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{z'(a, \lambda)}{y'(a, \lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)] = 0 \cdot \frac{z'_0(a)}{y'(a)} \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] = 0$$

eine begrenzte Funktion, die demzufolge der Umgebung des Nullpunktes summiert werden kann.

[A. 9]

Wir bemerken, daß man von einer der in Frage kommenden Funktionen zur darauffolgenden übergeht, indem man mit $\sigma(x)$ multipliziert, zwischen 0 und ξ (veränderlich) integriert, nochmals mit $\frac{1}{\sigma(x)}$ multipliziert und noch einmal zwischen 0 und x integriert: wir schreiben das ebengesagte mit den verwandten Symbolen wie folgt

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) y_{i-1}(t) dt = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma y_{i-1}) \right]_x$$

$$z_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) z_{i-1}(t) dt = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma z_{i-1}) \right]_x$$

Aus demselben Grunde besteht andererseits

$$y_{i-1}(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma y_{i-2}) \right]_x, \quad z_{i-1}(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma z_{i-2}) \right]_x$$

und somit

$$y_i(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 (\sigma y_{i-2}) \right]_x, \quad z_i(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 (\sigma z_{i-2}) \right]_x$$

und schließlich, wenn man berücksichtigt, daß $y_0(x) \equiv 1$, $z_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} = \left[\frac{1}{\sigma} \right]_x$

ist

$$y_i(x) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}} y_0(x) \right]_x = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}} \right]_x$$

$$z_i(x) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}} z_0(x) \right]_x = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \frac{1}{\sigma}}_{i\text{-mal}} \right]_x$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

woraus sich die Entwicklungen (19) ergeben.

Durch Beachtung der ersten Gl. (16) erhalten wir aus Gl. (19)

$$\begin{aligned} \sigma(x) y_i'(x) &= \sigma(x) \frac{d}{dx} \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}} \right]_x = \\ &= \sigma(x) \frac{1}{\sigma(x)} \left[\underbrace{\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{(i-1)\text{-mal}} \right]_x = \left[\underbrace{\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{(i-1)\text{-mal}} \right]_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) z'_i(x) &= \sigma(x) \frac{d}{dx} \left[\underbrace{\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]}_{i\text{-mal}} \right]_x = \\ &= \sigma(x) \frac{1}{\sigma(x)} \left[\underbrace{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]}_{(i-1)\text{-mal}} \right]_x = \left[\underbrace{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \dots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]}_{(i-1)\text{-mal}} \right]_x \end{aligned}$$

woraus sich die Gl. (20) ergeben.

[A. 10]

Bekanntlich ist die Reziproke einer Potenzreihe

$$\psi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots$$

mit $a_0 \neq 0$, wiederum eine in der Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion der Type

$$\frac{1}{\psi(\lambda)} = b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots$$

wobei die Koeffizienten b_k durch folgende Rekursionsbeziehungen gegeben sind

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \quad a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \dots$$

$$a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n = 0, \dots$$

Auf Grund des Gesagten leitet man sofort ab

$$\frac{1}{y(\lambda)} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ 1 - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right) \lambda^2 + \dots \right\}$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} &= \frac{1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2 + \dots}{\bar{\sigma} + [\sigma] \lambda + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 + \dots} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ 1 - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right) \lambda^2 + \dots \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

und durch Multiplikation der beiden Reihen gemäß *Cauchy* erhält man

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ 1 + \left(\bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \right) \lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - [\sigma] \cdot \left[\frac{1}{\sigma} \right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \right) \lambda^2 + \dots \right\}$$

und durch Berücksichtigung der Gl. (17) für $x = a$

$$[\sigma] \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - [\sigma] \left[\frac{1}{\sigma} \right] &= \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] = \\ &= \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \end{aligned}$$

erhält man schließlich die Gl. (23).

Durch Anwendung der Gl. (22) mit $f(\lambda) = \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$, nachdem

$$a_0 = \frac{1}{\bar{\sigma}}, \quad a_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \right), \quad a_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right), \dots$$

ist, erhält man sofort die Gl. (24).

[A. 11]

Auf Grund des erwähnten Kriteriums setzen wir voraus, daß Gl. (24) gültig ist wenn das Verhältnis

$$\frac{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right| \frac{1}{r^3}}{\frac{1}{r}} = \frac{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right|}{r^2}$$

$\ll 1$ ist, was für sehr große Entfernungen r im Vergleich zur Entfernung r_0 zutrifft, weshalb

$$\frac{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right|}{r_0^2} = 1$$

ist, d. h.

$$(25) \quad r_0 = \sqrt{\left| 2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right|} = \sqrt{\left| 2 \int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x) dx \right)^2}{\bar{\sigma}^2} \right|}$$

Diese Entfernung r_0 hat im allgemeinen die Größenordnung von a , wie z. B. ersichtlich durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes auf den ersten Addenden unter der Wurzel

$$\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t) dt = \left(\int_0^a \sigma(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)} \right) \leq \left(\int_0^a \sigma(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)} \right) \leq \frac{M}{m} a^2$$

(m und M sind das Minimum bezw. Maximum von $\sigma(x)$ in $(0, a)$) und durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes auf den zweiten Addenden

$$\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(\int_0^a \sigma(x) dx \right)^2 \geq \frac{m^2}{\bar{\sigma}^2} a^2$$

woraus sich ergibt

$$r_0 \leq \alpha \sqrt{\frac{2M}{m} - \frac{m^2}{\bar{\sigma}^2}}$$

Man könnte für r_0 noch verfeinerte Ungleichheiten ableiten, aber die eben beschriebene genügt, um das Problem für einen allgemeinen Fall zu erläutern.

[A. 12]

Wenn man das Produkt entwickelt, so erhält man tatsächlich

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right\} \left\{ 1 + A\lambda + \left(\frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2 \right\} = \\ & = \left\{ 1 + A\lambda + \left(\frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda + A \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \left(\frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^3 \right\} = \\ & = \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + A\lambda - A\lambda + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^2 + A^2 \lambda^2 + A \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^2 - A^2 \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^3 - A \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^3 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} A^2 \lambda^3 - A^3 \lambda^3 \right\} \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition selbst von A (die $\bar{\sigma}$ als Multiplikator enthält) können

wir die Glieder vernachlässigen welche $A\lambda^3$, $\frac{A^2\lambda^3}{\bar{\sigma}}$, $A^3\lambda^3$ enthalten (diese Glieder enthalten Potenzen von $\bar{\sigma}$ höher als die dritte) und schreiben

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right\} \cdot \left\{ 1 + A\lambda + \left(\frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2 \right\} = \\ & = \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^2 + A \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^2 + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^3 \right\} = \\ & = \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^2 + \left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \right) \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^3 \right\} = \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^3 \right\} = \\ & = \bar{\sigma} + [\sigma] \lambda + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 + \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{\bar{\sigma}} \lambda^3 \end{aligned}$$

was wir eben beweisen wollten.

[A. 13]

Aus

$$\begin{aligned} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} &= \frac{1}{\bar{\sigma} \left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right]} \frac{1 + \sigma \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2}{1 + A\lambda + \left(\frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + A^2 \right) \lambda^2} \sim \\ & \sim \frac{1}{\bar{\sigma} \left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right]} \left\{ 1 + \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \lambda^2 \right\} \left\{ 1 - A\lambda - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \lambda^2 \right\} \end{aligned}$$

erhält man durch Bildung des Produktes im Nenner

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1 + \left(\bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - A \right) \lambda + \left(\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \right) \lambda^2}{\bar{\sigma} \left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda \right]}$$

$$\frac{-A\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2 - \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]}\lambda^3 - \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right]\frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]}\lambda^4}{\bar{\sigma}\left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda\right]}$$

woraus man durch Vernachlässigung der dem dritten darauffolgenden Glieder (welche Potenzen von λ die gleich oder höher als die dritte sind, sowie Produkte der Type $A\bar{\sigma}\lambda^2$ enthalten) erhält

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1 + \left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right] - A\right)\lambda + \left(\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2}{\bar{\sigma}\left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda\right]}$$

Wir führen jetzt die Division zwischen dem Zähler und Nenner durch: man erhält

$$\frac{1 + \left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right] - A\right)\lambda + \left(\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2}{1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda} = h + K\lambda + \frac{R}{1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda}$$

wobei h, K, R zu bestimmende Konstanten sind.

Um die Rechnung in einfachster Weise durchzuführen, setzen wir

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A = \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha, \quad A = \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1 - \alpha)$$

woraus

$$\alpha = 1 - \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}A = 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]} \right\}$$

und

$$1 - \alpha = \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\begin{smallmatrix} \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \end{smallmatrix}\right]}{[\sigma]} \right\}$$

Wir können somit den vorhergehenden Quotienten wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + \left\{ \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - A \right\} \lambda + \left\{ \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\} \lambda^2}{1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A \right) \lambda} = \\
 & = \frac{1 + \left\{ \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} (1 - \alpha) \right\} \lambda + \left\{ \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\} \lambda^2}{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha \lambda}
 \end{aligned}$$

woraus sich in identischer Weise ergibt

$$1 + \left\{ \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} (1 - \alpha) \right\} \lambda + \left\{ \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\} \lambda^2 = (h + K\lambda) \left(1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha \lambda \right) + R$$

Durch Bildung des Produktes im zweiten Glied und Gleichsetzung, gelangt man für h, K, R zu folgenden Gleichungen

$$h + R = 1$$

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha h + K = \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} (1 - \alpha)$$

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha K = \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]}$$

woraus man sofort erhält

$$K = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \left\{ \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\}$$

$$h = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \left\{ \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} (1 - \alpha) - K \right\} =$$

$$= \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \left\{ \bar{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} (1 - \alpha) - \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} \right\} =$$

$$= \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma] \alpha} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \frac{1 - \alpha}{\alpha} - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2 \alpha^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2 \alpha^2} \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{[\sigma]} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]} \left[\frac{1}{\sigma} \right] - \alpha(1-\alpha) - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]}}{\alpha^2} = \\
& \alpha \left\{ 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \right\} + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]} \\
& = 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = \\
& = 1 - \frac{\left\{ 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left(\left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha \right) - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]} \right\} \left\{ 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \right\} + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] -}{\alpha^2} \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]}}{\alpha^2} = \\
& = 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left(\left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha \right) - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]} - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]} \left[\frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}^4}{[\sigma]^3} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \left(\left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha - \right.}{\alpha^2} \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]} \right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]}}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

Das dritte Glied im Zähler kann vernachlässigt werden (es enthält $\bar{\sigma}^4$) und man hat somit

$$\begin{aligned}
h \sim 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left(\left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha \right) - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]} - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \sigma]}{[\sigma]}}{\alpha^2} = \\
= 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left(\left[\frac{1}{\sigma} \right] \alpha + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right]}{\alpha^2} =
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]}{\alpha^2}, \quad \left([\sigma] \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] \right)$$

Daraus erhält man, wenn

$$\beta = 1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right]$$

gesetzt wird

$$h = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ferner, nachdem $h + R = 1$ ist, erhält man

$$R = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

und schließlich die Gl. (33).

[A. 14]

Aus

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{[\sigma]}{\alpha} \lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda \right] J_0(\lambda r) d\lambda \right.$$

erhält man, infolge Gl. (26)

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{1 + \frac{[\sigma]}{\alpha} \lambda} d\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha}} d\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma] \alpha} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} \frac{r}{\alpha} \right)$$

und infolge Gl. (22), angewandt für $f(\lambda) = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda$, und somit mit $a_0 =$

$$= 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}, a_1 = k, a_2 = a_3 = \dots = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda \right] J_0(\lambda r) d\lambda \sim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r}$$

und demzufolge Gl. (35).

[A. 15]

Unter der Annahme, daß r in Gl. (35) ziemlich groß ist, können wir für die (x) die asymptotische Entwicklung (28) als gültig betrachten und schreiben

$$\begin{aligned} \phi(r) &\sim \frac{1}{[\sigma]} \frac{\beta}{\alpha^3} \left\{ \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma} r} - \frac{[\sigma]^3 \alpha^3}{\bar{\sigma}^3 r^3} \right\} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\beta}{\bar{\sigma} \alpha^2} \frac{1}{r} - \beta \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{1}{r} - \frac{\beta}{\bar{\sigma} \alpha^2} \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} - \beta \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \frac{1}{r^3} \right\} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} - \left(1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right) \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \frac{1}{r^3} \right\} = \\ &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} + \left(2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\} \end{aligned}$$

welche mit der Gl. (24) übereinstimmt.

[A. 16]

In der Tat ist

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \right) \right\} = 1$$

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \beta = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \right\} = 1$$

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2} = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^2} \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 - \beta}{\bar{\sigma}} = \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 - \beta}{\bar{\sigma}} =$$

$$= \frac{\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]} \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} + \frac{\bar{\sigma}^4}{[\sigma]^4} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \right\}^2}{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} =$$

$$= \lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \left\{ 2 \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]^3} \left[\frac{\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}{\sigma} \right] + \frac{\bar{\sigma}^3}{[\sigma]^4} \left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma]}{[\sigma]} \right) \right\} = 0$$

und somit stimmt, für sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$, Gl. (35) mit Gl. (29) überein.

(Wird fortgesetzt)