Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials

Von A. Belluigi, Rom[1]

Zusammenfassung: Im ersten Teil leitet der Verfasser mit mehreren strengen Verfahren die Funktion des "scheinbaren spezifischen Widerstandes" von horizontal geschichteten Böden mit beliebigen Untergrund ab, die auf der Oberfläche mit Gleichstrom energisiert werden.

Durch Verwendung der entsprechenden Ergebnisse entwickelt der Verfasser im zweiten Teil neue strenge Formeln für die asymptotische Äquivalenz von horizontal geschichteten Böden und Untergrund von hoher Leitfähigkeit, von hohem spez. Widerstand und von nicht konstanter Leitfähigkeit.

Abstract: The Author deduces in the first part with more rigorous methods the function of the "apparent resistivity" regarding horizontally stratified soils with whatever underground which are energized with direct current on soil surface.

Utilizing the former results the Author develops in the second part new rigorous formulas of asymptotic equivalence for horizontally stratified soils and undergrounds with high conductivity, high resistivity and with no constant conductivity.

Teil I

§ 1. – Wir betrachten in dieser Abhandlung einen Erdboden dessen (isotrope) Leitfähigkeit nur mit der Tiefe veränderlich ist; ferner setzen wir voraus, daß von einer gegebenen Tiefe ab diese Leitfähigkeit einen gewissen Wert $\bar{\sigma}$ annimmt.

Wir bezeichnen mit:

x = die Tiefe,

a = die Tiefe ab welcher die Leitfähigkeit den Wert $\bar{\sigma}$ annimmt,

$\sigma(x)$ = die Leitfähigkeit in der Tiefe x,

I = die von der Punktelektrode hervorgerufene Stromstärke,

$V(r)$ = das auf der Erdoberfläche im Abstand von der Elektrode gemessene Potential,

[1] Prof. A. Belluigi, Leiter des Istituto di Fisica Terrestre an der Universität von Perugia, Italien.

$\phi(r) = \frac{2\,r\,V(r)}{I}$ = den spezifischen scheinbaren Widerstand im Abstande r von der Elektrode.

Man beachte, daß im allgemeinen in der Praxis die Differenz

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) \quad \text{oder} \quad \frac{\phi(r_1) - \phi(r_2)}{r_1 - r_2}$$

gemessen wird, wobei die beiden Abstände r_1 und r_2 von der Meßanordnung abhängig sind.

Unser Zweck ist nun der, die für große Werte von r (im allgemeinen für $r > a$) gültigen asymptotischen Formeln zu bestimmen.

Ein Weg zur Lösung des Problems d.h. zur Bestimmung der $\phi(r)$ ist bekanntlich folgender:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\frac{dv}{dx} - \lambda^2 v = 0; \quad \left(\sigma'(x) = \frac{d\sigma(x)}{dx}, \ \lambda = \text{konstant}\right)$$

und suchen das besondere Integral $v(x,\lambda)$ welches nachstehende Bedingungen erfüllt:

a) $v(x,\lambda)$ und $\sigma(x) \cdot v'(x,\lambda)$ seien stetige Funktionen von x.

b) für $x > a$ verhalte sich die $v(x,\lambda)$ wie $C\,c^{-\lambda x}$ (C = Konstante)

Wie aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen bekannt ist, gibt es nur eine einzige Lösung dieser Art. Sobald diese Lösung bestimmt ist, erhält man $\phi(r)$ aus folgender Beziehung

$$(2) \qquad \phi(r) = -\frac{1}{\sigma(0)} \int_0^{+\infty} \lambda \frac{v(0,\lambda)}{v'(0,\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

wo $J_0(z)$ eine Bessel'sche Funktion erster Gattung und Null-ter Ordnung ist.

Man beachte, daß Gl. (2) von C unabhängig ist; demzufolge können wir für diese Konstante einen willkürlichen Wert annehmen. Auf Grund der weiter unten folgenden Ergebnisse setzen wir

$$C = e^{\lambda a}$$

Die $v(x,\lambda)$ nimmt infolgedessen nachstehende Form an [A. 1] :

$$v(x,\lambda) = e^{\lambda(a-x)} \qquad (x > a)$$

Unter Berücksichtigung dieses für $x > a$ gültigen Ausdruckes von $v(x, \lambda)$, verwandelt sich die Bedingung a) in folgende [A. 2]:

$$\text{a')} \qquad \begin{cases} v(a, \lambda) = 1 \\ \sigma(a) v'(a, \lambda) = -\lambda \bar{\sigma} \end{cases}$$

wobei wir einstweilen $0 < \bar{\sigma} < +\infty$ voraussetzen; die Extremwerte werden beim Grenzübergang in den Endformeln berücksichtigt werden.

§ 2. — Wir drücken jetzt $v(x, \lambda)$ durch Lösungen der Gl. (1) aus, deren Verhalten im Nullpunkt (anstatt im Unendlichen oder im Punkte a) bekannt ist.

Vor allem heben wir hervor, daß zwei willkürlich angenommene Lösungen der Gl. (1), $u(x, \lambda)$ und $v(x, \lambda)$, stets nachstehende Beziehung erfüllen

$$\sigma(x) [u(x, \lambda) v'(x, \lambda) - u'(x, \lambda) v(x, \lambda)] = \text{konstant}; \tag{3}$$

Wenn das erste Glied der Gl. (3) bezüglich x differenziert wird und mittels Gl. (1) die $u''(x, \lambda)$ und $v''(x, \lambda)$ eliminiert werden, so erhält man tatsächlich das Resultat 0.

Wir bezeichnen nun mit $y(x, \lambda)$, $z(x, \lambda)$ die zwei besondere Integrale der Gl. (1) die nachstehende Bedingungen erfüllen.

$$\begin{aligned} y(0, \lambda) &= 1, \quad y'(0, \lambda) = 0 \\ z(0, \lambda) &= 0, \quad z'(0, \lambda) = \frac{1}{\sigma(0)} \end{aligned} \tag{4}$$

Die Gl. (3) wird für $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$, unter Berücksichtigung der Gl. (4), wie folgt geschrieben:

$$\sigma(x) [y(x, \lambda) z'(x, \lambda) - y'(x, \lambda) z(x, \lambda)] = 1 \tag{3'}$$

Für $v(x, \lambda)$ leitet man in leichter Weise [A. 3] ab:

$$v(x, \lambda) = v(0, \lambda) y(x, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(x, \lambda) \tag{5}$$

Wir setzen nun für $v(x, \lambda)$ die sie bestimmenden Bedingungen a')

$$\begin{aligned} v(a, \lambda) &= v(0, \lambda) y(a, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(a, \lambda) = 1 \\ \sigma(a) v'(a, \lambda) &= \sigma(a) [v(0, \lambda) y'(a, \lambda) + \sigma(0) v'(0, \lambda) z(a, \lambda] = -\lambda \bar{\sigma} \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Gleichungen bilden in $v(0, \lambda)$, $v'(0, \lambda)$ ein lineares System das eine einzige Lösung zuläßt

$$\begin{aligned} v(0, \lambda) &= \sigma(a) z'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(a, \lambda) \\ v'(0, \lambda) &= -\frac{1}{\sigma(0)} [\sigma(a) y'(a, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(a, \lambda)] \end{aligned} \tag{7}$$

(wobei bei der Auflösung Gl. (3') berücksichtigt worden ist). Aus den Gl. (5) und (7) erhält man für $v(x,\lambda)$ folgenden Ausdruck

$$(8)\quad v(x,\lambda) = [\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, z(a,\lambda)]\, y(x,\lambda) - $$
$$- [\sigma(a) y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, y(a,\lambda)]\, z(x,\lambda)$$

Wird jetzt Gl. (7) in Gl. (2) eingesetzt, so erhält man für

$$(9)\qquad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, z(a,\lambda)}{\sigma(a)\, y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, y(a,\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

Dieser Ausdruck von ϕ (r) hat gegenüber Gl. (2) den bedeutenden Vorteil, daß er Funktionen $(y(x,\lambda),\ z(x,\lambda))$ mitbeteiligt deren Verhalten auf Grund der Gl. (4) im Nullpunkt anstatt im Unendlichen bekannt ist. Dieser Vorteil ist sofort ersichtlich wenn y und z als Funktionen von λ betrachtet werden: in der Tat besitzen letztere einfachere Reihenentwicklungen mit dem Anfangspunkt $\lambda = 0$ als wie jene von $v(x,\lambda)$ für deren Entwicklung wir nur die Bedingungen a) und b) oder deren gleichwertige a') und b') verfügbar haben.

In der Tat ersieht man sofort, daß weder Gl. (1) noch die Bedingungen (4) varieren wenn man λ in $-\lambda$ ändert (was hingegen für die Bedingungen a') und b') zutrifft) und infolgedessen sind $y(x,\lambda)$ und $z(x,\lambda)$ gerade Funktionen von λ und ihre Reihenentwicklungen enthalten somit ausschließlich gerade Potenzen von λ. Wir können somit setzen

$$(10)\qquad \begin{aligned} y(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x)\, \lambda^{2i} \\ z(x,\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} z_i(x)\, \lambda^{2i} \end{aligned}$$

woraus durch Einsetzen in Gl. (1) und durch Annullieren der Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ folgt, daß die $y_i(x)$ und $z_i(x)$ nachstehende Differentialgleichungen erfüllen

$$y_0''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y_0'(x) = 0, \quad y_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} y'(x) = y_{i-1}(x)$$

$$(11)\quad z_0''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} z_0'(x) = 0, \quad z_i''(x) + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} z_i'(x) = z_{i-1}(x)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Diese Gleichungen bilden ein System von unendlich vielen, $y_i(x)$ und $z_i(x)$ enthaltenden Differentialgleichungen, welches die Bestimmung aller dieser Gleichungen durch Rekursion ermöglicht. Die von den unbekannten

Funktionen zu erfüllenden Anfangsbedingungen erhält man sofort aus den Gl. (10) durch Berücksichtigung der Gl. (4); in der Tat besteht

$$y(0,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(0)\,\lambda^{2i} \equiv 1, \quad z(0,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(0)\,\lambda^{2i} \equiv 0$$

$$y'(0,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i'(0)\,\lambda^{2i} \equiv 0, \quad z'(0,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i'(0)\lambda^{2i} \equiv \frac{1}{\sigma(0)}$$

woraus man durch Identifikation der zwei Glieder sofort erhält

$$y_0(0) = 1, \; y_0'(0) = 0, \quad z_0(0) = 0, \; z_0'(0) = \frac{1}{\sigma(0)}$$

$$\text{(12)} \qquad y_i(0) = 0, \; y_i'(0) = 0, \quad z_i(0) = 0, \; z_i'(0) = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Durch Integrierung der Gl. (11) [A.5] erhält man schließlich

$$y_0(x) \equiv 1, \qquad z_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$

$$\text{(13)}$$

$$y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^{\xi} \sigma(t)\,y_{i-1}(t)\,dt, \quad z_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^{\xi} \sigma(t)\,z_{i-1}(t)\,dt$$

§ 3. – Wir können jetzt Gl. (9) auch für die bisher ausgeschlossene Werte $\overline{\sigma} = 0$, $\overline{\sigma} = +\infty$ besprechen. Wie bekannt ist, hängt die Konvergenz eines Integrals der Type

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda$$

wo $f(\lambda)$ eine stetige Funktion im Bereiche $(0 < \lambda < +\infty)$ ist, vom Verhalten der $f(\lambda)$ für $\lambda \to +\infty$ ab.

Wenn wir nun λ in der zu integrierenden Funktion der Gl. (9) nach 0 streben lassen, wobei wir stets vor Augen halten, daß $\sigma \neq 0, +\infty$, ist, so erhalten wir [A. 6]

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \frac{\sigma(a)\,z'(a,\lambda) + \lambda\overline{\sigma}\,z(a,\lambda)}{\sigma(a)\,y'(a,\lambda) + \lambda\overline{\sigma}\,y(a,\lambda)} = \frac{1}{\sigma}$$

die eine summierbare Funktion darstellt, weil sie an die Umgebung des Nullpunktes beschränkt ist.

Wenn wir nun, stets in der zu integrierenden Funktion, λ nach $+\infty$ streben lassen, so erhalten wir [A. 7]

$$\lim_{\bar{\sigma}\to+\infty} \lambda \frac{\sigma(a)\, z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, z(a,\lambda)}{\sigma(a)\, y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, y(a,\lambda)} = \lambda \frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)}$$

und diese Funktion ist ebenfalls summierbar, denn es besteht

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)} = \frac{z(a,0)}{y(a,0)} = \frac{z_0(a)}{y_0(a)} = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}$$

und somit

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)} J_0(\lambda r) = 0$$

In diesem Falle ist aber der Grenzübergang unter dem Integralzeichen gestattet und Gl. (9) verwandelt sich in

$$\phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{9'}$$

§ 4. – Weniger einfach ist der Fall von $\bar{\sigma} = 0$, denn die Grenzfunktion ist im Nullpunkt eine unendliche Größe erster Ordnung und somit nicht summierbar [A. 8]. Wie bereits erwähnt beziehen sich jedoch die Messungen praktisch stets auf die Differenz $\phi(r_1) - \phi(r_2)$ die, wie leicht ersichtlich [A. 8] beschränkt ist und somit in der Umgebung des Nullpunktes summiert werden kann.

Infolgedessen ergibt sich, für $\bar{\sigma} = 0$, folgender Ausdruck

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} [J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)]\, d\lambda \tag{9''}$$

§ 5. – Wir suchen jetzt einen expliziten Ausdruck für die Funktionen y (x) und z (x) für welche die Gl. (13) einen Rekursionsausdruck liefern. Zu diesem Zwecke setzen wir für jede, in jedem innerhalb des Bereiches (0,a) enthaltenen Bereiche (0,x) integrierbare Funktion f (x)

$$[f]_x = \int_0^x f(\xi)\, d\xi \tag{15}$$

$$[f_1 0 f_2 0 \ldots 0 f_n]_x = \int_0^x f_1(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} f_2(x_2)\,dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1})\,dx_{n-1} \cdot \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n)\,dx_n$$

wobei die im zweiten Gliede dieser Formel angegebene Integrierungsfolge so zu verstehen ist, daß man vorerst die $f_n(x)$ zwischen 0 und einer veränderlichen Grenze x_{n-1} integriert, dann das Resultat mit der Funktion $f_{n-1}(x)$ als Funktion der oberen Grenze x_{n-1} der vorhergehenden Integrierung multipliziert, nacheinander zwischen 0 und einer ebenfalls als veränderlich betrachteten Grenze x_{n-2} integriert und daß man so fortfährt bis zur letzten Integrierung des vorhergehenden Resultates (Funktion von x_1), multipliziert mit $f_1(x_1)$ und integriert zwischen 0 und x : es ergibt sich natürlich eine Funktion von x.

Aus der zweiten Gl. (15) erhält man sofort

$$\frac{d}{dx}[f_1 0 f_2 0 \ldots 0 f_n] = f_1(x) \int_0^x f_2(x_2)\,dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1})\,dx_{n-1} \cdot \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n)\,dx_n = f_1(x)\,[f_2 0 \ldots 0 f_n]_x$$

(16)

$$[f_1 0 f_2 0 \ldots 0 f_n] = \int_0^0 f_1(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} f_2(x_2)\,dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} f_{n-1}(x_{n-1})\,dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} f_n(x_n)\,dx_n = 0$$

und ferner

(17) $$[f 0 \zeta]_x + [\zeta 0 f] = [f]_x \cdot [\zeta]_x$$

die dadurch nachgewiesen wird, daß man durch Differentiation beider Glieder eine Identität erhält und daß beide Gleider, für $x = 0$, gleich Null sind.

Schließlich verzichten wir in den Gl. (15) für $x = a$ auf den Index a, d.h. wir setzen

$$[f_1 0 f_2 0 \ldots . 0 f_n]_a = [f_1 0 f_2 0 \ldots . 0 f_n], \quad [f]_a = [f]$$

§ 6. – Mit dieser symbolischen Bezeichnung können die expliziten Ausdrücke für $y(x)$ und $z(x)$ leicht aufgeschrieben werden: für die ersten Werte von i ergibt sich [A. 9]

$$
(18) \quad
\begin{array}{ll}
y_0(x) \equiv 1 & z_0(x) = \left[\frac{1}{\sigma}\right]_x \\[2ex]
y_1(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x & z_0(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \\[2ex]
y_2(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x & z_2(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \\[2ex]
y_3(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x & z_3(x) = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Demzufolge erhalten wir für $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ folgende Entwicklungen

$$
(19) \quad
\begin{aligned}
y(x, \lambda) &= 1 + \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x \lambda^2 + \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x \lambda^4 + \ldots . \\
z(x, \lambda) &= \left[\frac{1}{\sigma}\right]_x + \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \lambda^2 + \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \lambda^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

die für jedes λ konvergent sind und woraus folgt [A. 9]

$$
(20) \quad
\begin{aligned}
\sigma(x)y'(x, \lambda) &= [\sigma]_x \lambda^2 + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x \lambda^4 + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]_x \lambda^6 + \ldots \\
\sigma(x)z'(x, \lambda) &= 1 + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \lambda^2 + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]_x \lambda^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Obiges vorausgesetzt setzen wir in Gl. (9)

$$Y(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[\sigma(a)y'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, y(a, \lambda)], \quad Z(\lambda) = \sigma(a)z'(a, \lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, z(a, \lambda)$$

so daß Gl. (9) wie folgt geschrieben wird

$$(9''') \qquad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

Mit Hilfe der Gl. (19) und (20) erhalten wir (wenn wir in dieselben x = a setzen)

$$(21) \qquad \begin{aligned} Y(\lambda) &= \bar{\sigma} + [\sigma]\lambda + \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]\lambda^3 + \ldots \\ Z(\lambda) &= 1 + \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2 + \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^3 + \ldots \end{aligned}$$

welche das Verhältnis $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ als Verhältnis von zwei Potenzreihen liefern.

§ 7. – Wir erinnern jetzt daran, daß das asymptotische Verhalten (für große Werte von r) eines Integrals der Type

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

hauptsächlich vom Verhalten der f (λ) in der Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ abhängt: denn, für ein sehr großes r ist $J_0(\lambda, r)$ eine rapid variable Funktion. Tatsächlich kann man nachstehendes nachweisen.

Wenn die f (λ) im Nullpunkt eine (auch nur asymptotische und nicht notwendigerweise konvergente) Entwicklung von der Type

$$f(\lambda) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \lambda^i$$

zuläßt, so ergibt sich asymptotisch für $r \to +\infty$

$$(22) \qquad \int_0^{+\infty} f(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda \sim \frac{a_0}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} (-i)^i \, \frac{(2i-1)!!\, a_{2i}}{r^{2i+1}},$$

$$((2i-1)!! = 1, 3, 5 \ldots (2i-1))$$

Man beachte, daß in dieser Entwicklung die Glieder mit ungeradem Index a_{2i+1} der Entwicklung von $f(\lambda)$ nicht erscheinen: dies bedeutet, daß sie in der Entwicklung des Integrals mit Gliedern beitragen, die nach Null viel rapider streben als wie jedwege Potenz $\frac{1}{r^{\alpha}}$. In der Tat ist z.B. der Fall eines Untergrundes von unendlich großer Leitfähigkeit ($\bar{\sigma} = \infty$) bekannt, bei dem $f(\lambda)$ eine ungerade Funktion $\left(f(\lambda) = \lambda\frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)},\ f(-\lambda) = -\lambda\frac{z(a,-\lambda)}{y(a,-\lambda)} = -\lambda\frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)} = -f(\lambda)\right)$ ist und infolgedessen sind alle a_{2i} in ihrer Entwicklung gleich Null: in diesem Falle kann nachgewiesen werden, daß die ϕ (r) beim Wachsen von r exponentiell abnimmt, denn ihr Verhalten hängt beim Streben von r nach Unendlich von den a_{2i+1} ab. Andere ähnliche Fälle werden in späteren Berichten beschrieben werden.

Die a_{2i+1} geben jedenfalls bei großen Entfernungen keinen Beitrag zum Verhalten der ϕ (r): ihretwegen kann die Gl. (22) praktisch überflüssig sein, da sie nur für allzu große und somit praktisch zwecklose Entfernungen anwendbar ist: ein ähnlicher Fall ($\bar{\sigma}$ sehr klein oder gleich Null) wird weiter unten behandelt werden.

§ 8. – Wir wenden jetzt Gl. (22) an die durch Gl. (9''') gegebene ϕ(r) an. Es besteht [A. 10]

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{1 + \left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\right)\lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}} - 2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right)\lambda^2 + \dots\right\} \tag{23}$$

und

$$\phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \sim \frac{a_0}{r} - \frac{a_2}{r^3} = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{\frac{1}{r} + \left(2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right)\frac{1}{r^3}\right\} \tag{24}$$

bezw. in expliziter Form

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{\frac{1}{r} + \left(2\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}\int_0^{\xi}\sigma(t)\, dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x)\, dx\right)^2}{\bar{\sigma}^2}\right)\frac{1}{r^3}\right\} \tag{24'}$$

Aus Gl. (24) ergibt sich offensichtlich die bekannte Tatsache, daß das asymptotische Verhalten in erster Näherung (Glied mit $\frac{1}{r}$) nur von der Leitfähigkeit ($\bar{\sigma}$) des Untergrundes abhängt und daß erst in zweiter Näherung die Verteilung der Leitfähigkeit in den verschiedenen Schichten eine Rolle spielt.

§ 9. – Bezüglich der Entfernungen, für die Gl. (24) anwendbar ist, nehmen wir an, daß letztere für Entfernungen gilt für die das Verhältnis zwischen dem zweiten und dem ersten Glied genügend klein ist: diese Annahme ist nicht sehr streng, doch genügt sie im allgemeinen in der Praxis. Sie führt üblich zu einem Fehler von der Größenordnung des Quadrates des genannten Verhältnisses.

Wir setzen somit die Gl. (24) als gültig für Entfernungen r voraus, die größer sind als wie der Abstand [A. 11]

$$(25)\qquad r_0 = \sqrt{\left|2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|} = \sqrt{\left|2\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}\int_0^\xi \sigma(t)\,dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x)dx\right)^2}{\bar{\sigma}^2}\right|}$$

Diese Entfernung hat im allgemeinen die Größenordnung von a [A. 11] soweit nicht ein unter der Wurzel befindliches Glied allzu groß ist. Trotzdem aber besteht, vom theoretischen Standpunkt aus, stets die Gültigkeit der Annahme, daß nämlich Gl. (24) für Entfernungen $r > r_0$ gültig sei: wenn andererseits r_0 allzu groß ist, so bleibt die Gl. (24) auf Entfernungen beschränkt die kein praktisches Interesse mehr besitzen.

So z. B. hat der Addend

$$2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] = 2\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}\int_0^\xi \sigma(t)\,dt$$

wie leicht ersichtlich ist, die Größenordnung des folgenden Produktes

$$\left[\frac{1}{\sigma}\right]\cdot[\sigma] = \left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}\right)$$

und dieses Produkt ist sehr groß, wenn im Bereiche (0,a) mächtige und sehr leitfähige Schichten (das zweite Integral der vorstehenden Formel ist groß) oder mächtige und isolierende Schichten (das erste Integral ist groß) vorhanden sind welche, bei der Entfernung bei der die Messungen praktisch durchgeführt werden, den Einfluß der darunterliegenden Schichten nicht zum Ausdruck bringen. In diesem Falle genügt es, solche Schichten als Untergrund zu betrachten, d. h. die Tiefe a auf die erste ziemlich mächtige Schicht von unendlich großer oder nullter Leitfähigkeit zu beschränken und das Problem so zu behandeln, als ob die darunterliegende Schicht den Untergrund bilde.

Der zweite Addend der Gl. (25)

$$\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)^2$$

überwiegt über den ersten wenn $\bar{\sigma}$ klein gegenüber $\int_0^a \sigma(x)\,dx$ ist: mit anderen Worten gesagt, überwiegt das in Frage kommende Glied über das andere (welches, man vergesse es nicht, die Größenordnung a besitzt) wenn das Verhältnis $\frac{1}{\bar{\sigma}}\int_0^a \sigma(x)\,dx$ sehr groß gegenüber a ist, d.h. wenn

$$\bar{\sigma} << \frac{1}{a}[\sigma] = \frac{1}{a}\int_0^a \sigma(x)\,dx$$

(mittlere Leitfähigkeit der Schichten zwischen 0 und a) ist. In diesem Falle ist Gl. (24) praktisch noch wertlos, da sie nur für viel größere Entfernungen als wie $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ gültig ist.

§ 10. – Um aber auch für diesen Fall noch gültige Formeln für kleinere Entfernungen als $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ (und natürlich für größere als a) zu erhalten, wenden wir ein anderes Verfahren an.

Die Eigentümlichkeit des bisher angewandten Verfahrens besteht in der Bildung der Reziproken der im Nenner befindlichen Reihe: diese Reziproke führt steigende Potenzen von $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ ein, die die Geschwindigkeit ausgleichen mit der die Multiplikatoren $\frac{1}{r^\alpha}$ nach Null streben und die infolgedessen die den behaltenen Gliedern aufeinanderfolgende nicht vernachlässigbar gestalten, sofern selbstverständlich nicht sehr große und somit zwecklose Entfernungen betrachtet werden. Dies kann vermieden werden, wenn man die bekannte Formel

$$(26) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{J_0(rx)}{x+k}\,dx = \frac{2}{\pi}[H_0(rk) - Y_0(rk)]$$

benutzt, wobei Y_0 die Bessel'sche Funktion zweiter Gattung und nullter Ordnung und H_0 die Struve'sche Funktion null-ter Ordnung ist. Wir bezeichnen im folgenden das zweite Glied der Gl. (26) mit $\psi(x)$

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi}[H_0(x) - Y_0(x)] \tag{27}$$

Für große Werte von x läßt die $\psi(x)$ eine asymptotische Entwicklung zu deren erste Glieder durch

$$\psi(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \tag{28}$$

gegeben sind.

Um die asymptotischen Formeln für $\phi(r)$, im Falle daß $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ groß ist, zu erhalten, behandeln wir in der Entwicklung von $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ die Größe $\bar{\sigma}$ als ob sie die gleiche Größenordnung von λ habe.

In erster Näherung behalten wir in den Entwicklungen von $Z(\lambda)$ und $Y(\lambda)$ nur die hauptsächlichen Glieder: nachdem wir, wie gesagt, $\bar{\sigma}$ als von der gleichen Größenordnung λ betrachten, folgt, daß wir nicht nur die Glieder mit λ vom zweiten oder höheren Grade, sondern auch das Produkt $\bar{\sigma}\,\lambda$ und die Potenzen von $\bar{\sigma}$ zweiten oder höheren Grades enthaltende Glieder vernachlässigen werden. Infolgedessen schreiben wir für die Gl. (21)

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\bar{\sigma} + [\sigma]\,\lambda}$$

woraus

$$\phi(r) \sim \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\bar{\sigma} + [\sigma]\,\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{[\sigma]} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}}\, d\lambda$$

(29)

$$\phi(r) = \frac{2}{r[\sigma]}\left[H_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}r\right) - Y_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}r\right)\right] = \frac{1}{[\sigma]}\,\psi\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}r\right)$$

wobei $\psi(x)$ durch Gl. (27) gegeben ist.

Auf Grund der Gl. (28) können wir schreiben

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]}\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{\bar{\sigma}^3}{[\sigma]^3}r^3}\right)$$

woraus, da für große Werte von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}r$ das erste Glied über das zweite überwiegt, sich folgende Beziehung ergibt

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}\, r}$$

die mit Gl. (24) übereinstimmt und von der nur das erste Glied behalten werden soll.

§ 11. – Für sehr kleine Werte von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}$ r (wobei selbstverständlich die Voraussetzung $r >> a$ stets aufrecht erhalten bleibt) erhält man dagegen eine Verallgemeinerung der klassischen, vom Falle $\bar{\sigma} = 0$, abgeleiteten Formel. Aus den bekannten Reihenentwicklungen von H_0 (x) und Y_0 (x), erhält man durch Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung

$$\psi(x) \sim - \lg x - \gamma + \lg 2$$

(γ = Konstante von *Euler-Mascheroni*) und somit, durch Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}$ r,

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]}\left\{-\lg\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right) - \gamma + \lg 2\right\} = \frac{1}{[\sigma]}\left\{-\lg r - \lg\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} - \gamma + \lg 2\right\}$$

und infolgedessen

$$\phi(r) \sim -\frac{1}{[\sigma]}\lg r + \frac{1}{[\sigma]}\left(-\gamma + \lg\frac{2[\sigma]}{\bar{\sigma}}\right) \tag{30}$$

aus der sich die klassische Formel

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{1}{[\sigma]}\lg\frac{r_2}{r_1} \tag{31}$$

ergibt, die für $\bar{\sigma} = 0$ (isolierender Untergrund) asymptotisch gültig ist. Im Falle, daß $\bar{\sigma}$ klein, jedoch nicht genau Null ist, kann die Formel nur für Entfernungen von $r << \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ angewandt werden, sodaß von der Größenordnung von $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}$ r vernachlässigt werden dürfen; widrigenfalls muß man Gl. (29) anwenden.

§ 12. – Wir gehen jetzt zur nächsten Näherung (die grundsätzlich der Näherung (24) entspricht) über. Wir behalten in $\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$ alle Glieder bis zur darauffolgenden Größenordnung gegenüber den in der vorherigen Näherung behaltenen Gliedern. Wir setzen somit

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1 + \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda + \left[\sigma\, 0\, \frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2}{\bar{\sigma} + [\sigma]\,\lambda + \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]\lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]\lambda^3} \tag{32}$$

Wir erinnern, daß wir bei dieser Näherung die Glieder der Type $\overline{\sigma}\ \lambda^2$ und λ^3 als vernachlässigbar betrachten und bemerken, daß der Nenner der Gl. (32) folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\overline{\sigma} + [\sigma]\,\lambda + \overline{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]\lambda^2 + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]\lambda^3 = \overline{\sigma}\cdot\left\{1 + \left(\frac{[\sigma]}{\overline{\sigma}} - A\right)\lambda\right\}$$

$$\left\{1 + A\lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^2\right\}$$

wobei $A = \frac{\overline{\sigma}}{[\sigma]}\left\{\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right\}$ [A. 12] ist.

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in Gl. (32) erhält man

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\overline{\sigma}\left[1 + \left(\frac{[\sigma]}{\overline{\sigma}} - A\right)\lambda\right]} \cdot \frac{1 + \overline{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2}{1 + A\lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^2}$$

woraus man, wenn die Reziproke des Nenners des zweiten Bruches berechnet wird, erhält

$$\frac{1}{1 + A\lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^2} \sim 1 - A\lambda - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^2$$

(durch Vernachlässigung der Glieder, die λ in der dritten oder höheren Potenz enthalten) und schließlich erhält man [A. 13]

$$(33)\quad \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} \sim \frac{1}{\overline{\sigma}}\left\{\frac{\beta}{\alpha^2}\,\frac{1}{1 + \frac{[\sigma]}{\overline{\sigma}}\lambda\alpha} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) + K\lambda\right\}, \quad (K = \text{Konstante})$$

worin

$$(34)\quad \alpha = 1 - \frac{\overline{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left\{\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right\}, \quad \beta = 1 - 2\frac{\overline{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]$$

Durch Einsetzen der Gl. (33) in Gl. (9''') erhält man

$$\phi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{\beta}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \alpha\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda \right] J_0(\lambda r)\, d\lambda \right\}$$

und schließlich [A. 14]

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \frac{\beta}{\alpha^3} \psi\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{\bar{\sigma}}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi[\sigma]} \frac{\beta}{\alpha^3} \left[H_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} \frac{r}{\alpha}\right) - Y_0\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} \frac{r}{\alpha}\right)\right] + \frac{1}{\bar{\sigma}}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{1}{r} \tag{35}$$

Wir bemerken vorerst daß, wenn wir in dieser Formel die Werte von ziemlich groß annehmen, wir die asymptotische Entwicklung (28) für die ψ als gültig betrachten und somit [A. 15] schreiben können

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} + \left(2 \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

die mit Gl. (24) übereinstimmt.

Ferner [A. 16] stimmt Gl. (35) für sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ mit Gl. (29) überein und somit führt der Grenzübergang, für $\bar{\sigma} \to 0$, wiederum zur Gl. (31).

§ 13. – Zusammenfassend kann gesagt werden, daß Gl. (35) für große Werte von r mit Gl. (24) und für sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ mit Gl. (29) und somit, für $\bar{\sigma} = 0$, grundsätzlich mit Gl. (31) übereinstimmt. Für nicht sehr kleine Werte von $\bar{\sigma}$ (oder besser gesagt für Werte von $\bar{\sigma}$ für welche $\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}$ a nicht klein ist) sind die Gl. (35) und (24) vom praktischen Standpunkt aus gleichwertig und somit beide für mittlere Werte von r nicht anwendbar. Für mittlere Entfernungen muß man demzufolge Gl. (29) benutzen.

Für die Gültigkeit der Gl. (35) ist es ferner wesentlich, daß α sehr klein gegenüber der Einheit ist: demzufolge ist es notwendig, nachdem der in der Klammer befindliche Faktor von α die Größenordnung $\left[\frac{1}{\sigma}\right] \cdot [\sigma]$ besitzt, daß

$$\alpha \sim 1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2} \left[\frac{1}{\sigma}\right] \cdot [\sigma] \sim 1$$

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma}\right][\sigma] \sim 0, \qquad \bar{\sigma}\sqrt{\frac{\left[\frac{1}{\sigma}\right]}{[\sigma]}} \sim 0$$

d.h., daß

$$\bar{\sigma} << \sqrt{\frac{[\sigma]}{\left[\frac{1}{\sigma}\right]}} \tag{36}$$

ist.

Um nun beurteilen zu können ob $\bar{\sigma}$ groß oder klein ist, ist der Vergleich mit der mittleren Leitfähigkeit $\frac{1}{a}[\sigma]$ weniger wichtig als wie der Vergleich mit der Größe

$$\bar{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{[\sigma]}{\left[\frac{1}{\sigma}\right]}} = \sqrt{\frac{\int_0^a \sigma(x)\,dx}{\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}}}$$

die den Charakter einer Art "mittlerer Leitfähigkeit" (deren Dimensionen sie auch hat) besitzt. Später bei der Behandlung der Äquivalenzformeln, wird man ersehen, daß $\bar{\sigma}_0$ in wesentlicher Form erscheint.

Aus dem obengesagten ersieht man die Gültigkeit der Formel (24), die theoretisch für größere Entfernungen als wie $r_0 = \sqrt{\left|\,2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|}$ stets gültig ist, praktisch jedoch auf den Fall beschränkt bleibt, in dem r_0 nicht allzu groß ist. Mit Ausnahme des Falles in dem $\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]$ sehr groß ist (für welchen wie bereits gesagt nur das Verfahren wiederholt werden muß, indem die erste genügend mächtige Schicht von höchster oder geringster Leitfähigkeit als Untergrund betrachtet wird) kann Gl. (24) für mäßige oder kleine Werte von $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ verwandt werden. Dies kommt vor, wenn $\bar{\sigma}$ groß oder vergleichbar gegenüber $[\sigma]$ ist, d.h. für eine Gestaltung bei der der Untergrund eine Leitfähigkeit von mittlerem, vergleichbarem oder großem Wert gegenüber der mittleren Leitfähigkeit der darüberliegenden Schichten besitzt: insbesondere im Falle eines Untergrundes von sehr großer oder geradezu unendlich großer Leitfähigkeit.

Hingegen im Falle, daß das Verhältnis $\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ sehr groß ist, kann die Gl. (24) für mittlere Entfernungen (r_0 sehr groß) nicht angewandt werden und müssen somit die Gl. (29) oder (35) benutzt werden. Dies kommt vor, wenn $\bar{\sigma}$ sehr klein und $[\sigma]$ von mittlerer Größe ist (Untergrund von sehr kleiner mittlerer Leitfähigkeit gegenüber jener der darüberliegenden Schichten) oder wenn $\bar{\sigma}$ mittelgroß und $[\sigma]$ sehr groß ist (darüberliegende Schicht von großer Leitfähigkeit): insbesonders können die Gl. (29) und (35) für Untergrunde von niedrigster oder nullter mittlerer Leitfähigkeit benutzt werden.

Man beachte außerdem, daß, wenn die Entfernung r_0 nicht groß ist ($\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}$ von mittlerer Größe), praktisch gleichgültig Gl. (24) oder Gl. (35) angewandt werden kann: die besondere Nützlichkeit der Gl. (35) bleibt somit auf den Fall beschränkt in dem $\bar{\sigma}$ sehr klein ist.

Anhang

[A.1]

Für $x > a$, nachdem $\sigma(x) = \bar{\sigma}$ = konstant, $\sigma'(x) \equiv 0$ ist, verwandelt sich Gl. (1) in

(1') $$\frac{d^2 v}{dx^2} - \lambda^2 v = 0$$

eine Gleichung, die das allgemeine Integral

$$v(x, \lambda) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}, \quad (x > a)$$

zuläßt und, infolge der Bedingung b), muß $c_1 = 0$ sein und infolgedessen ist, wegen der obenerwähnten Wahl der Multiplikationskonstanten

$$v(x, \lambda) = c_2 e^{-\lambda x} = e^{\lambda(a-x)}, (x > a)$$

[A.2]

In der Tat fordert die Stetigkeit von $v(x,\lambda)$ für $x = a$, daß

$$\lim_{x \to a^-} v(x, \lambda) = \lim_{x \to a^+} v(x, \lambda)$$

ist. Aber $\lim\limits_{x \to a^+} v(x, \lambda) = \lim\limits_{x \to a^+} e^{\lambda(a-x)}$, woraus sich sofort die erste der Gl. a') ergibt.

Analog muß, wegen der Stetigkeit von

$$\lim_{x \to a^-} \sigma(x)\, v'(x, \lambda) = \lim_{x \to a^+} \sigma(x)\, v'(x, \lambda)$$

sein. Jedoch

$$\lim_{x \to a^+} \sigma(x)\, v'(x,\lambda) = \lim_{x \to a^+} \sigma(x) \frac{d}{dx} e^{\lambda(a-x)} =$$

$$= \lim_{x \to a^+} \sigma(x) \lim_{x \to a^+} (-\lambda)\, e^{\lambda(a-x)} = -\lambda \lim_{x \to a^+} \sigma(x) = -\lambda \bar{\sigma}$$

(da für jedes $x > a$, $\sigma(x) = \bar{\sigma}$); hieraus erhält man sofort die zweite Gl. a').

[A.3]

Das besondere Integral $v(x,\lambda)$ der linearen Gleichung (1) kann als lineare Kombination von zwei besonderen Integralen $y(x,\lambda)$ und $z(x,\lambda)$ der Gl. (1) selbst ausgedrückt werden, welche ein Grundsystem bilden, da

$$W[y(0,\lambda), z(0,\lambda)] = \begin{vmatrix} y(0,\lambda) & z(0,\lambda) \\ y'(0\lambda) & z'(0,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma(0)} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma(0)} \neq 0$$

ist und infolgedessen, auf Grund des Satzes von *Lionville*, besteht für jedes

$$W[y(x,\lambda), z(x,\lambda)] \neq 0$$

Man hat somit

$$v(x,\lambda) = c_1(\lambda)\, y(x,\lambda) + c_2(\lambda)\, z(x,\lambda)$$

woraus man durch Einsetzen von $x = 0$

$$v(0,\lambda) = c_1(\lambda)\, y(0,\lambda) + c_2(\lambda)\, z(0,\lambda)$$

$$v'(0,\lambda) = c_1(\lambda)\, y'(0,\lambda) + c_2(\lambda)\, z'(0,\lambda)$$

erhält und mit Berücksichtigung der Gl. (4)

$$v(0,\lambda) = c_1(\lambda), \quad v'(0,\lambda) = c_2(\lambda)/\sigma(0)$$

und somit Gl. (5).

[A.4]

Durch Einsetzen der Gl. (10) in Gl. (1) erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i''(x)\, \lambda^{2i} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \sum_{i=0}^{\infty} y_i'(x)\, \lambda^{2i} - \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x)\, \lambda^{2i} \equiv 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i''(x)\, \lambda^{2i} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \sum_{i=0}^{\infty} z_i'(x)\, \lambda^{2i} - \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} z_i(x)\, \lambda^{2i} \equiv 0$$

Diese Ausdrücke müssen identisch Null in λ sein; demzufolge müssen die Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ für jedes x gleich Null sein.

Wir können z.B. die erste der vorstehenden Beziehungen in folgender Weise schreiben

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[y_i''(x)+\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}y_i'(x)\right]\lambda^{2i}-\sum_{i=0}^{\infty}y_i(x)\lambda^{2(i+1)}\equiv 0$$

Wenn in der zweiten Summe $i+1=k$ gesetzt wird, so erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_i(x)\lambda^{2(i+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}y_{k-1}(x)\lambda^{2k}=\sum_{i=1}^{\infty}y_{i-1}(x)\lambda^{2i}$$

und die vorherige Beziehung kann wie folgt geschrieben werden

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[y_i''(x)+\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}y_i'(x)\right]\lambda^{2i}-\sum_{i=0}^{\infty}y_{i-1}(x)\lambda^{2i}\equiv 0$$

$$y_0''(x)+\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}y_0'(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[y_i''(x)+\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}y_i'(x)-y_{i-1}(x)\right]\lambda^{2i}\equiv 0$$

woraus, wenn die Koeffizienten der darauffolgenden Potenzen von λ gleich Null gesetzt werden, man die Gl. (11) erhält.

[A.5]

Zur Integrierung der Gl. (11) mit den Bedingungen (12) bemerken wir, daß, wenn jedes Glied mit $\sigma(x)$ multipliziert wird, diese Gleichungen folgende Form annehmen

$$\sigma(x)y_0''(x)+\sigma'(x)y_0'(x)=0,\quad \sigma(x)y_i''(x)+\sigma'(x)y_i'(x)=\sigma(x)y_{i-1}(x)$$

$$\sigma(x)z_0''(x)+\sigma'(x)z_0'(x)=0,\quad \sigma(x)z_i''(x)+\sigma'(x)z_i'(x)=\sigma(x)z_{i-1}(x)$$

und, daß man, für $i=1,2,3,\ldots.$

$$\sigma(x)y_i''(x)+\sigma'(x)y_i'(x)=\frac{d}{dx}[\sigma(x)y_i'(x)]$$

$$(i=0,1,2,\ldots.)$$

$$\sigma(x)z_i''(x)+\sigma'(x)z_i'(x)=\frac{d}{dx}[\sigma(x)z_i'(x)]$$

erhält. Infolgedessen kann die erste Gl. (11) wie folgt geschrieben werden

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)y_0'(x)]=0$$

woraus sich

$$\sigma(x)y_0'(x)=\text{konstant}$$

ergibt. Für $x=0$ ist jedoch $y_0'(0)=0$ und somit ist

$$\sigma(0)y_0'(0)=0$$

Infolgedessen muß die Konstante notwendigerweise gleich Null sein und demzufolge ist $y'_0(x)$ identisch gleich Null. Es folgt, daß $y_0(x)$ = konstant ist; aber $y_0(0) = 1$ und somit ist

$$y_0(x) = 1$$

Wenn in analoger Weise für $z_0(x)$ verfahren wird, erhält man daraufhin

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\, z'_0(x)] = 0$$

$$\sigma(x)\, z'_0(x) = \text{konstant}$$

Jedoch $z'_0(0) = \dfrac{1}{\sigma(0)}$ und somit $\dfrac{1}{\sigma(0)} \cdot \sigma(0) = \text{konstant} = 1$

$$z'_0(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$$

$$z_0(x) = z_0(0) + \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$

$$z_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}, \qquad (z_0(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

Für die weiteren Gl. (11) kann, für i = 1,2,3,....geschrieben werden

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\, y'_i(x)] = \sigma(x)\, y_{i-1}(x)$$

$$\sigma(x)\, y'_i(x) - \sigma(0)\, y'(0) = \int_0^x \sigma(t)\, y_{i-1}(t)\, dt$$

$$\sigma(x)\, y'_i(x) = \int_0^x \sigma(t)\, y_{i-1}(t)\, dt, \qquad (y'(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

$$y_i(x) - y_i(0) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t)\, y_{i-1}(t)\, dt$$

$$\text{(13)} \quad y_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t)\, y_{i-1}(t)\, dt, \qquad (y_i(0) = 0 \text{ für die Gl. (12)})$$

Mit dem gleichen Verfahren und durch dauernde Berücksichtigung der Gl. (12) erhält man für die $z_i(x)$

$$(13)\quad z_i(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^\xi \sigma(t)\, z_{i-1}(t)\, dt \qquad (i = 1,2,3,\ldots.)$$

[A.6]

Um den

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} z(a,\lambda)}{\sigma(a) y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} y(a,\lambda)}$$

zu berechnen, erinnern wir, daß infolge der Gl. (10) für $x = a$ nachstehende Beziehungen bestehen

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda(a,\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} [y_0(a) + y_1(a)\lambda^2 + y_2(a)\lambda^4 + \ldots..] = y_0(a) = 1$$

$$\lim_{\lambda \to 0} y'(a,\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} [y_0'(a) + y_1'(a)\lambda^2 + y_2'(a)\lambda^4 + \ldots..] = y_0'(a) = 0$$

$$\lim_{\lambda \to 0} z(a,\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} [z_0(a) + z_1(a)\lambda^2 + z_2(a)\lambda^4 + \ldots.] = z_0(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} z'(a,\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} [z_0'(a) + z_1'(a)\lambda^2 + z_2'(a)\lambda^4 + \ldots.] = z_0'(a) = \frac{1}{\sigma(a)}$$

und somit, wenn $\sigma \neq 0, +\infty$ ist, ergibt sich

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} z(a,\lambda)}{\sigma(a) y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} y(a,\lambda)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} z(a,\lambda)}{\sigma(a)\frac{y'(a,\lambda)}{\lambda} + \bar{\sigma} y(a,\lambda)} =$$

$$= \frac{\sigma(a)\frac{1}{\sigma(a)}}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}$$

(denn $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{y'(a,\lambda)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{y_0'(a) + y_1'(a)\lambda^2 + \ldots}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{y_1'(a)\lambda^2 + \ldots}{\lambda} =$

$= \lim [y_1'(a)\lambda + y_2'(a)\lambda^3 + \ldots.] = 0$) und infolgedessen ist für unsere Funktion

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \frac{\sigma(a) z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} z(a,\lambda)}{\sigma(a) y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma} y(a,\lambda)} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J_0(\lambda r)}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}$$

$(\lim\limits_{\lambda \to 0} J_0(\lambda r) = 1)$.

[A.7]

Wenn wir $\bar{\sigma}$ nach $+\infty$ streben lassen, so erhalten wir

$$\lim_{\bar{\sigma}\to\infty} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a,\lambda)}{\sigma(a)y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a,\lambda)} J_0(\lambda r) = \lim_{\sigma\to\infty} \lambda \frac{\dfrac{\sigma(a)z'(a,\lambda)}{\bar{\sigma}} + \lambda z(a,\lambda)}{\dfrac{\sigma(a)y'(a,\lambda)}{\bar{\sigma}} + \lambda y(a,\lambda)} J_0(\lambda r) =$$

$$= \lambda \frac{z(a,\lambda)}{y(a,\lambda)} J_0(\lambda r).$$

[A.8]

Wenn wir $\bar{\sigma}$ nach 0 streben lassen, so ist die Grenzfunktion

$$\lim_{\bar{\sigma}\to 0} \frac{\sigma(a)z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a,\lambda)}{\sigma(a)y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a,\lambda)} J_0(\lambda r) = \lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} J_0(\lambda r)$$

so, daß

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{z'(a,\lambda)}{\dfrac{y'(a,\lambda)}{\lambda}} J_0(\lambda r) = +\infty$$

$$\left(\lim_{\lambda\to 0} \frac{y'(a,\lambda)}{\lambda} = 0\right)$$

und, da es sich um ein Unendliches ersten Grades handelt $\Big(\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^2 \dfrac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} J_0(\lambda r) =$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^2 \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots}{y'_1(a)\lambda^2 + y'_2(a)\lambda^4 + \ldots} J_0(\lambda r) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots}{y'_1(a) + y'_2(a)\lambda^2 + \ldots} J_0(\lambda r) =$$

$= \dfrac{z'_0(a)}{y'_1(a)} = \dfrac{1}{\displaystyle\int_0^a \sigma(x)\,dx} \neq 0$, so ist die Grenzfunktion in der Umgebung des Nullpunktes bestimmt nicht summierbar und Gl. (9) wird sinnlos. Wie jedoch bereits gesagt, beziehen sich die Messungen in der Praxis stets auf die Differenz

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\sigma(a)z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}z(a,\lambda)}{\sigma(a)y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}y(a,\lambda)} [\, J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)\,]\, d\lambda$$

und infolgedessen wird die zu integrierende Grenzfunktion

$$\lim_{\bar{\sigma}\to 0} \frac{\sigma(a)\, z'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, z(a,\lambda)}{\sigma(a)\, y'(a,\lambda) + \lambda\bar{\sigma}\, y(a\lambda)} [\, J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)\,] =$$

$$= \lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} [\, J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)\,]$$

welche, infolge der bekannten Reihenentwicklung von J_0 (t) in nachstehender Weise geschrieben werden kann

$$\lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} [\, J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)\,] = \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots.}{y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 +)\ldots}$$

$$\left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^4}{(2!)^2} - \ldots \right] - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^4 + \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^4}{(2!)^2} - \ldots \right] \right\} =$$

$$= \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots}{y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 + \ldots} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^2 \right] + \frac{1}{(2!)^2} \left[\left(\frac{1}{2}\lambda r_1\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\lambda r_2\right)^4 \right] + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots}{y'_1(a)\lambda + y'_2(a)\lambda^3 + \ldots} \lambda^2 \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} \left[\left(\frac{r_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{r_2}{2}\right)^4 \right] + \ldots. \right\} =$$

$$= \lambda \frac{z'_0(a) + z'_1(a)\lambda^2 + \ldots}{y'_1(a) + y'_2(a)\lambda^2 + \ldots} \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} \left[\left(\frac{r_1}{2}\right)^4 - \left(\frac{r_2}{2}\right)^4 \right] + \ldots. \right\}$$

und somit ist

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \frac{z'(a,\lambda)}{y'(a,\lambda)} [\, J_0(\lambda r_1) - J_0(\lambda r_2)\,] = 0 \cdot \frac{z'_0(a)}{y'(a)} \left[\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right] = 0$$

eine begrenzte Funktion, die demzufolge der Umgebung des Nullpunktes summiert werden kann.

[A.9]

Wir bemerken, daß man von einer der in Frage kommenden Funktionen zur darauffolgenden übergeht, indem man mit σ (x) multipliziert, zwischen 0 und ξ (veränderlich) integriert, nochmals mit $\frac{1}{\sigma\,(x)}$ multipliziert und noch einmal zwischen 0 und x integriert: wir schreiben das ebengesagte mit den verwandten Symbolen wie folgt

$$y_i(x) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int\limits_0^{\xi} \sigma(t) y_{i-1}(t)\, dt = \left[\frac{1}{\sigma} 0\, (\sigma y_{i-1})\right]_x$$

$$z_i(x) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int\limits_0^{\xi} \sigma(t) z_{i-1}(t)\, dt = \left[\frac{1}{\sigma} 0\, (\sigma z_{i-1})\right]_x$$

Aus demselben Grunde besteht andererseits

$$y_{i-1}(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma y_{i-2})\right]_x , \quad z_{i-1}(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 (\sigma z_{i-2})\right]_x$$

und somit

$$y_i(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0\, (\sigma y_{i-2})\right]_x , \quad z_i(x) = \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0\, (\sigma z_{i-2})\right]_x$$

und schließlich, wenn man berücksichtigt, daß $y_0(x) \equiv 1$, $z_0(x) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} = \left[\frac{1}{\sigma}\right]_x$ ist

$$y_i(x) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}}\, y_0(x)\right]_x = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}}\right]_x$$

$$z_i(x) = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}}\, z_0(x)\right]_x = \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}} 0 \frac{1}{\sigma}\right]_x$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

woraus sich die Entwicklungen (19) ergeben.

Durch Beachtung der ersten Gl. (16) erhalten wir aus Gl. (19)

$$\sigma(x) y_i'(x) = \sigma(x) \frac{d}{dx} \left[\underbrace{\frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{i\text{-mal}}\right]_x =$$

$$= \sigma(x) \frac{1}{\sigma(x)} \left[\sigma \underbrace{0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{(i-1)\text{-mal}}\right]_x = \left[\sigma \underbrace{0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma 0 \ldots 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma}_{(i-1)\text{-mal}}\right]_x$$

$$\sigma(x)z_i'(x) = \sigma(x)\frac{d}{dx}\Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sigma}0\sigma0}\underbrace{\frac{1}{\sigma}0\sigma0}\ldots\underbrace{0\frac{1}{\sigma}0\sigma}}_{i\text{-mal}}0\frac{1}{\sigma}\Bigg]_x =$$

$$= \sigma(x)\frac{1}{\sigma(x)}\Bigg[\sigma0\underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sigma}0\sigma}0\frac{1}{\sigma}0\ldots\underbrace{0\frac{1}{\sigma}0\sigma}}_{(i-1)-\text{mal}}0\frac{1}{\sigma}\Bigg]_x = \Bigg[\sigma0\underbrace{\underbrace{\frac{1}{\sigma}0\sigma}0\underbrace{\frac{1}{\sigma}0\sigma}0\ldots\ldots\underbrace{0\frac{1}{\sigma}0\sigma}}_{(i-1)-\text{mal}}0\frac{1}{\sigma}\Bigg]_x$$

woraus sich die Gl. (20) ergeben.

[A.10]

Bekanntlich ist die Reziproke einer Potenzreihe

$$\psi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots.$$

mit $a_0 \neq 0$, wiederum eine in der Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion der Type

$$\frac{1}{\psi(\lambda)} = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \ldots.$$

wobei die Koeffizienten b_k durch folgende Rekursionsbeziehungen gegeben sind

$$a_0 b_0 = 1,\ \ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0,\ \ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \ldots.$$

$$a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \ldots. + a_0 b_n = 0, \ldots.$$

Auf Grund des Gesagten leitet man sofort ab

$$\frac{1}{y(\lambda)} = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{1 - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\lambda + \left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right)\lambda^2 + \ldots.\right\}$$

woraus

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} = \frac{1+\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda + \left[\sigma0\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2+\ldots}{\bar{\sigma}+[\sigma]\lambda+\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\lambda^2+\ldots} = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{1-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\lambda+\left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}-\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right)\lambda^2+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda+\left[\sigma0\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2+\ldots..\right\}$$

und durch Multiplikation der beiden Reihen gemäß *Cauchy* erhält man

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)} + \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{1+\left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\right)\lambda+\left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}-\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]-[\sigma]\cdot\left[\frac{1}{\sigma}\right]+\left[\sigma0\frac{1}{\sigma}\right]\right)\lambda^2+\ldots\right\}$$

und durch Berücksichtigung der Gl. (17) für $x = a$

$$[\sigma]\left[\frac{1}{\sigma}\right] = \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]$$

$$\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - [\sigma]\left[\frac{1}{\sigma}\right] = \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right] - \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] =$$

$$= \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - 2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]$$

erhält man schließlich die Gl. (23).

Durch Anwendung der Gl. (22) mit $f(\lambda) = \frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}$, nachdem

$$a_0 = \frac{1}{\bar{\sigma}}, \quad a_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right] - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\right), \quad a_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}}\left(\frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} - 2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right), \quad \ldots\ldots$$

ist, erhält man sofort die Gl. (24).

[A.11]

Auf Grund des erwähnten Kriteriums setzen wir voraus, daß Gl. (24) gültig ist wenn das Verhältnis

$$\frac{\left|2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|\frac{1}{r^3}}{\frac{1}{r}} = \frac{\left|2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|}{r^2}$$

<< 1 ist, was für sehr große Entfernungen r im Vergleich zur Entfernung r_0 zutrifft, weshalb

$$\frac{\left|2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|}{r_0^2} = 1$$

ist, d.h.

$$(25) \quad r_0 = \sqrt{\left|2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2}\right|} = \sqrt{\left|2\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}\int_0^{\xi}\sigma(t)\,dt - \frac{\left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)^2}{\bar{\sigma}^2}\right|}$$

Diese Entfernung r_0 hat im allgemeinen die Größenordnung von a, wie z.B. ersichtlich durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes auf den ersten Addenden unter der Wurzel

$$\int_0^a \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} \int_0^{\xi} \sigma(t)\,dt = \left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{\xi}^a \frac{dx}{\sigma(x)}\right) \leq \left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}\right) \leq \frac{M}{m} a^2$$

(m und M sind das Minimum bezw. Maximum von σ (x) in (0,a)) und durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes auf den zweiten Addenden

$$\frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\int_0^a \sigma(x)\,dx\right)^2 \geq \frac{m^2}{\bar{\sigma}^2} a^2$$

woraus sich ergibt

$$r_0 \leq \alpha \sqrt{\frac{2M}{m} - \frac{m^2}{\bar{\sigma}^2}}$$

Man könnte für r_0 noch verfeinerte Ungleichheiten ableiten, aber die eben beschriebene genügt, um das Problem für einen allgemeinen Fall zu erläutern.

[A.12]

Wenn man das Produkt entwickelt, so erhält man tatsächlich

$$\bar{\sigma}\left\{1 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda\right\}\left\{1 + A\lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^2\right\} =$$

$$= \left\{1 + A\lambda + \left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda + A\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\lambda^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} - A\right)\left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]} + A^2\right)\lambda^3 \right\} =$$

$$= \bar{\sigma}\left\{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\lambda + A\lambda - A\lambda + \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^2 + A^2\lambda^2 + A\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\lambda^2 - A^2\lambda^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^3 - A\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^3 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}A^2\lambda^3 - A^3\lambda^3\right\}$$

Auf Grund der Definition selbst von A (die $\bar{\sigma}$ als Multiplikator enthält) können wir die Glieder vernachlässigen welche $A\lambda^3, \frac{A^2\lambda^3}{\bar\sigma}, A^3\lambda^3$ enthalten (diese Glieder enthalten Potenzen von $\bar\sigma$ höher als die dritte) und schreiben

$$\bar\sigma\left\{1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}-A\right)\lambda\right\}\cdot\left\{1+A\lambda+\left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}+A^2\right)\lambda^2\right\}=$$

$$=\bar\sigma\left\{1+\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}\lambda+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^2+A\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}\lambda^2+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{\bar\sigma}\lambda^3\right\}=$$

$$=\bar\sigma\left\{1+\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}\lambda+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^2+\left(\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]-\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{\bar\sigma}\lambda^3\right\}=\bar\sigma\left\{1+\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}\lambda+\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\lambda^2+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{\bar\sigma}\lambda^3\right\}=$$

$$=\bar\sigma+[\sigma]\lambda+\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\lambda^2+\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{\bar\sigma}\lambda^3$$

was wir eben beweisen wollten.

[A.13]

Aus

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}=\frac{1}{\bar\sigma\left[1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}-A\right)\lambda\right]}\;\frac{1+\sigma\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda+\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2}{1+A\lambda+\left(\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}+A^2\right)\lambda^2}\sim$$

$$\sim\frac{1}{\bar\sigma\left[1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}-A\right)\lambda\right]}\left\{1+\bar\sigma\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda+\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2\right\}\cdot\left\{1-A\lambda-\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^2\right\}$$

erhält man durch Bildung des Produktes im Nenner

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}\sim\frac{1+\left(\bar\sigma\left[\frac{1}{\sigma}\right]-A\right)\lambda+\left(\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2\;-}{\bar\sigma\left[1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar\sigma}-A\right)\lambda\right]}$$

$$\frac{-\;A\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\lambda^2-\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^3-\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\lambda^4}{\bar{\sigma}\left[1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A\right)\lambda\right]}$$

woraus man durch Vernachlässigung der dem dritten darauffolgenden Glieder (welche Potenzen von λ die gleich oder höher als die dritte sind, sowie Produkte der Type $A\,\bar{\sigma}\,\lambda^2$ enthalten) erhält

$$\frac{Z(\lambda)}{Y(\lambda)}\sim\frac{1+\left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-A\right)\lambda+\left(\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2}{\bar{\sigma}\left[1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A\right)\lambda\right]}$$

Wir führen jetzt die Division zwischen dem Zähler und Nenner durch: man erhält

$$\frac{1+\left(\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-A\right)\lambda+\left(\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right)\lambda^2}{1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A\right)\lambda}=h+K\lambda+\frac{R}{1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A\right)\lambda}$$

wobei h, K, R zu bestimmende Konstanten sind.

Um die Rechnung in einfachster Weise durchzuführen, setzen wir

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A=\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha,\qquad A=\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)$$

woraus

$$\alpha=1-\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}A=1-\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left\{\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}$$

und

$$1-\alpha=\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left\{\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}$$

Wir können somit den vorhergehenden Quotienten wie folgt schreiben

$$\frac{1+\left\{\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-A\right\}\lambda+\left\{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}\lambda^2}{1+\left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}-A\right)\lambda}=$$

$$=\frac{1+\left\{\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)\right\}\lambda+\left\{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}\lambda^2}{1+\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha\lambda}$$

woraus sich in identischer Weise ergibt

$$1+\left\{\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)\right\}\lambda+\left\{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}\lambda^2 \equiv (h+K\lambda)\left(1+\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha\lambda\right)+R$$

Durch Bildung des Produktes im zweiten Glied und Gleichsetzung, gelangt man für h, K, R zu folgenden Gleichungen

$$h + R = 1$$

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha h + K = \bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)$$

$$\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha K = \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}$$

woraus man sofort erhält

$$K = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\left\{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}$$

$$h = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\left\{\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)-K\right\} =$$

$$=\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\left\{\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}(1-\alpha)-\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]+\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\,\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}=$$

$$=\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]\alpha}\left[\frac{1}{\sigma}\right]-\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2\alpha^2}\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]+\frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2\alpha^2}\,\frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}=$$

$$= \frac{\alpha \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]}\left[\frac{1}{\sigma}\right] - \alpha(1-\alpha) - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}}{\alpha^2} =$$

$$= 1 - \frac{\alpha\left\{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\right\} + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}}{\alpha^2} =$$

$$= 1 - \frac{\left\{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \alpha\right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right)\right\}\left\{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\right\} + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\alpha}\right] -}{\alpha^2}$$

$$\frac{- \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}}{\alpha^2} =$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right) - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]}\left[\frac{1}{\sigma}\right] + \frac{\bar{\sigma}^4}{[\sigma]^3}\left[\frac{1}{\sigma}\right]\left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] -\right.}{\alpha^2}$$

$$\frac{\left. - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}}{\alpha^2}$$

Das dritte Glied im Zähler kann vernachlässigt werden (es enthält $\bar{\sigma}^4$) und man hat somit

$$h \sim 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}\right) - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}[\sigma]\left[\frac{1}{\sigma}\right] + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\frac{\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right]}{[\sigma]}}{\alpha^2} =$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] - \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left(\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma\right] + \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right]\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma}\right]}{\alpha^2} =$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{\alpha^2}, \qquad \left([\sigma]\left[\frac{1}{\sigma}\right] = \left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] + \left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}\right]\right)$$

Daraus erhält man, wenn

$$\beta = 1 - \frac{2\bar{\sigma}^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]$$

gesetzt wird

$$h = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ferner, nachdem $h + R = 1$ ist, erhält man

$$R = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

und schließlich die Gl. (33).

[A. 14]

Aus

$$\phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}}\left\{\frac{\beta}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha\lambda}d\lambda + \int_0^{+\infty}\left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda\right]J_0(\lambda r)\,d\lambda\right.$$

erhält man, infolge Gl. (26)

$$\int_0^{+\infty}\frac{J_0(\lambda r)}{1 + \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}}\alpha\lambda}d\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{J_0(\lambda r)}{\lambda + \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}}d\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]\alpha}\psi\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]}\frac{r}{\alpha}\right)$$

und infolge Gl. (22), angewandt für $f(\lambda) = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda$, und somit mit $a_0 =$ $= 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}$, $a_1 = k$, $a_2 = a_3 = \ldots\ldots = 0$,

$$\int_0^{+\infty}\left[1 - \frac{\beta}{\alpha^2} + K\lambda\right]J_0(\lambda r)\,d\lambda \sim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{1}{r}$$

und demzufolge Gl. (35).

[A. 15]

Unter der Annahme, daß r in Gl. (35) ziemlich groß ist, können wir für die (x) die asymptotische Entwicklung (28) als gültig betrachten und schreiben

$$\phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]}\frac{\beta}{\alpha^3}\left\{\frac{[\sigma]\,\alpha}{\bar\sigma\, r} - \frac{[\sigma]^3\,\alpha^3}{\bar\sigma^3\, r^3}\right\} + \frac{1}{\bar\sigma}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{\beta}{\bar\sigma\,\alpha^2}\,\frac{1}{r} - \beta\frac{[\sigma]^2}{\bar\sigma^3}\,\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\bar\sigma}\,\frac{1}{r} - \frac{\beta}{\bar\sigma\,\alpha^2}\,\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{\bar\sigma}\left\{\frac{1}{r} - \beta\frac{[\sigma]^2}{\bar\sigma^2}\,\frac{1}{r^3}\right\} = \frac{1}{\bar\sigma}\left\{\frac{1}{r} - \left(1 - \frac{2\bar\sigma^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right)\frac{[\sigma]^2}{\bar\sigma^2}\,\frac{1}{r^3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\bar\sigma}\left\{\frac{1}{r} + \left(2\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{[\sigma]^2}{\bar\sigma^2}\right)\frac{1}{r^3}\right\}$$

welche mit der Gl. (24) übereinstimmt.

[A. 16]

In der Tat ist

$$\lim_{\bar\sigma\to 0}\alpha = \lim_{\bar\sigma\to 0}\left\{1 - \frac{\bar\sigma^2}{[\sigma]^2}\left(\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right)\right\} = 1$$

$$\lim_{\bar\sigma\to 0}\beta = \lim_{\bar\sigma\to 0}\left\{1 - \frac{2\bar\sigma^2}{[\sigma]^2}\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]\right\} = 1$$

$$\lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{1}{\bar\sigma}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) = \lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{1}{\bar\sigma}\,\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha^2} = \lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{1}{\alpha^2}\lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{\alpha^2-\beta}{\bar\sigma} = \lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{\alpha^2-\beta}{\bar\sigma} =$$

$$= \lim_{\bar\sigma\to 0}\frac{2\dfrac{\bar\sigma^2}{[\sigma]}\dfrac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]} + \dfrac{\bar\sigma^4}{[\sigma]^4}\left\{\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \dfrac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right\}^2}{\bar\sigma} =$$

$$= \lim_{\bar\sigma\to 0}\left\{2\frac{\bar\sigma}{[\sigma]^3}\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] + \frac{\bar\sigma^3}{[\sigma]^4}\left(\left[\frac{1}{\sigma}0\sigma\right] - \frac{\left[\sigma 0\frac{1}{\sigma}0\sigma\right]}{[\sigma]}\right)\right\} = 0$$

und somit stimmt, für sehr kleine Werte von $\bar\sigma$, Gl. (35) mit Gl. (29) überein.

(Wird fortgesetzt)