

Werk

Jahr: 1957

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:23

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0023

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0023

LOG Id: LOG_0030

LOG Titel: Heft 4

LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ZEITSCHRIFT
FÜR
GEOPHYSIK

Herausgegeben im Auftrage der

Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft

von

B. Brockamp, Münster i. W.

unter Mitwirkung von **A. Defant**, Innsbruck — **W. Dieminger**, Lindau b. Northeim
W. Hiller, Stuttgart — **K. Jung**, Kiel — **O. Meyer**, Hamburg
F. Möller, Mainz — **H. Reich**, München.

Jahrgang 23

1957

Heft 4



PHYSICA - VERLAG · WÜRZBURG

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Reich, H.:</i> Über die Nachprüfung von magnetischen Messungen mit dem Lokal-Variometer von J. Wüst und die Feststellung der Ursachen der gefundenen magnetischen Störungen	169
<i>Belluigi, A.:</i> Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials	182
<i>Lucke, O.:</i> Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien	197

Die ZEITSCHRIFT FÜR GEOPHYSIK

erscheint in Jahrgängen zu je 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt je Jahrgang 28,— DM, Einzelhefte je nach Umfang. Abonnements verlängern sich jeweils um einen Jahrgang, falls keine ausdrückliche Abbestellung zum Ende eines Jahrganges vorliegt.

In der Zeitschrift werden Originalarbeiten, die weder im In- noch im Ausland veröffentlicht wurden, und die der Autor auch anderweitig nicht zu veröffentlichen sich verpflichtet, aus dem Gebiet der reinen und angewandten Geophysik sowie aus den Grenzgebieten aufgenommen. Mit der Annahme des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht an den Verlag über.

Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln druckfertig einzureichen und gesondert eine „Anweisung für den Setzer“ beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz und griechische, gotische oder einander ähnliche Typen und Zeichen kenntlich gemacht sind (z. B. durch farbige Unterstreichung). Die Vorlagen für die Abbildungen sollen reproduktionsfertig (Tuschzeichnung) möglichst im Maßstab 2:1 eingesandt werden. Die Beschriftung der Abbildungen soll auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier erfolgen. Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren und am Ende des Manuskriptes zusammenzustellen; bei Zitaten sind neben Autorennamen, Titel und Zeitschriftentitel, auch Bandnummer, Erscheinungsjahr und Seitenzahl anzugeben.

Jeder Arbeit ist eine „Zusammenfassung“ in deutscher und englischer oder französischer Sprache beizufügen.

Der Verfasser liest von der Arbeit in der Regel nur eine Korrektur: etwaige Autorennkorrekturen können nur als Fußnoten bzw. am Schluß des Artikels gebracht werden. Umfangreiche Änderungen bedürfen der Zustimmung des Herausgebers und können nur gebracht werden, wenn sich der Autor bereit erklärt, die Korrekturkosten zumindest teilweise zu tragen.

Von seiner Arbeit erhält der Verfasser 50 Sonderdrucke ohne Umschlag kostenlos. Weitere Sonderdrucke liefert der Verlag gegen Erstattung der Selbstkosten. Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht.

Für die *Zeitschrift für Geophysik* bestimmte Manuskripte und redaktionelle Anfragen bitten wir an den Herausgeber zu richten:

Prof. Dr. Bernhard Brockamp, Münster (Westfalen), Steinfurter Straße 107

Anschrift der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft:

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 80

Es ist ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, fotografische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrofotos u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Bekanntmachung lt. Bayr. Pressegesetz: Verlag: PHYSICA-VERLAG Rudolf Liebing K.-G., Würzburg, Rotlöwengasse 2. Pers. haft. Ges.: Rudolf Liebing, Arnulf Liebing u. Hildgund Holler, sämtl. Buchhändler in Würzburg. Kommanditisten: Friedr. Gäbler, Buchhändler, u. Charl. Kuhnert, beide Würzburg. Verantwortl. f. d. Anzeigenteil: Arnulf Liebing. Druck: fotokop, Darmstadt.



Über die Nachprüfung von magnetischen Messungen mit dem Lokal-Variometer von J. WÜST und die Feststellung der Ursachen der gefundenen magnetischen Störungen

Von H. Reich, München¹⁾

Zusammenfassung: Es wird an Hand verschiedener, mit den bewährten Askania-Feldwaagen nachgeprüfter magnetischer Messungen gezeigt, daß das magnetische Lokalvariometer von J. Wüst im Stande ist, starke Störungen der Horizontal-Komponente richtig zu erfassen.

Die Ursachen der lokalen magnetischen Störungen sind in allen Fällen entweder Eisengegenstände oder magnetitführende Schlacken gewesen. Die ungewöhnlich große Amplitude der beobachteten Anomalien ist auf Induktion durch Blitzschläge zurückzuführen. Mit der Wasserführung im Untergrund, wie das von Anhängern der Wünschelrute behauptet wird, haben diese Anomalien nichts zu tun.

Es wäre zu begrüßen, wenn jeder Geologe, der sich mit der Kartierung magnetischer Gesteine zu beschäftigen hat, ein leichtes, stabiles und billiges Vertikal-Magnetometer mit sich führen würde.

Abstract: By means of magnetic control-measurements carried through by aid of the well-known and reliable magnetic field-balances of the Askania-type it is shown that a recently presented magnetic local-variometer of J. Wüst exactly produces the values of large anomalies in the horizontal component of the magnetic force.

The locally limited anomalies in all cases were due to either iron-materials or slag-sediments containing magnetite. The unusual high amplitude of the observed anomalies may be attributed to induction by lightning. The measured anomalies have nothing common with hydrological aspects, such as flowing water in the subsoil, as adherents of the divining-rods suppose to.

It would be very appreciable, if every geologist engaged with geological mapping of magnetic rocks in the field had at disposal an easily portable, highly stable, and cheap vertical-magnetometer.

1. Einleitung

In verschiedenen Veröffentlichungen der vergangenen Jahre (*E. Brüche*, 1954, S. 373, *O. Prokop*, 1954, S. 120, *J. Wüst*, 1955 a) ist auf Versuche

¹⁾ Prof. Dr. H. Reich, Universität München, Institut für angewandte Geophysik, München 2, Richard-Wagner-Str. 10, ab 1. X. 1957 Göttingen, Schlößerweg 11

Bezug genommen worden, die von *H. Reich* bei der Nachprüfung von magnetischen Messungen mit dem Lokalvariometer von *J. Wüst* vorgenommen worden sind. Es scheint angebracht, damit sich nicht unrichtige Angaben über diese Versuche im Schrifttum einschleichen, wie sie z.T. schon in der Tagespresse erfolgten, über diese Versuche und ihre Ergebnisse sachlich zu berichten.

Es soll hier nicht zur Wüschelrutenfrage Stellung genommen werden, sondern allein zu den magnetischen Messungen von *J. Wüst* und zu den Ursachen der so gefundenen magnetischen Störungen. An den von *R. Bock* (1936) mitgeteilten, völlig negativ verlaufenen Versuchen mit dem als "Gerameter" bezeichneten magnetischen Gerät habe ich seinerzeit teilgenommen und hatte darum die Vorstellung, daß das von *J. Wüst* anschließend für seine Messungen gebrauchte Lokalvariometer ein ebenso unbrauchbares Instrument sein würde. Die von *J. Wüst* oft betonte Abhängigkeit von Änderungen des Magnetfeldes von der Witterung, häufigen, sehr starken zeitlichen Änderungen der Intensität der magnetischen Feldstärke und ebenso die Behauptung, daß unterirdische Wasserläufe mit lokalen Änderungen der Intensität der magnetischen Feldstärke in Beziehung ständen, haben meine Bedenken gegenüber diesen Messungen weiter erhöht. Es sind das alles Behauptungen, die jedem Fachmann, der mit der Praxis magnetischer Messungen vertraut ist, unmöglich erscheinen müssen. Es erschien daher angebracht, die Messungen von *J. Wüst* durch exakte Messungen nachzuprüfen. Ich war überzeugt, daß sich eine ähnliche negative Feststellung ergeben würde, wie bei den Versuchen, über die *R. Bock* (1936) berichtet hat. Diese Nachprüfung ergab jedoch, daß mit dem *Wüstschen* Instrument tatsächlich starke lokale magnetische Störungen durchaus richtig festgestellt werden können.

Es erschien angebracht, die Untersuchungen von *J. Wüst*, die er mit seinem, in der Praxis magnetischer Messungen unbekanntem, Instrument vorgenommen hat, mit anerkannten magnetischen Geräten nachzuprüfen und festzustellen, mit welcher Zuverlässigkeit lokale magnetische Störungen von *J. Wüst* gemessen wurden.

Meine Untersuchungen erstrecken sich allein auf die Nachprüfung der mit dem *Wüstschen* Lokalvariometer ausgemessenen magnetischen Störungen, und die Ermittlung der Ursachen dieser magnetischen Störungen. Es ging also, wie das sehr richtig von *E. Brüche* (1954) bemerkt wird, im wesentlichen um eine Überprüfung der *J. Wüstschen* magnetischen Messungen, die darum nötig war, weil die früher in der Wüschelruten-Literatur aufgeführten Messungen mit dem Gerameter einer kritischen Nachprüfung nicht standgehalten haben (*R. Bock*, 1936). Auch *H. Vidal* (1954) mußte in einem Bericht über Messungen eines namhaften Wüschelrutengängers mit einem magnetometrischen Meßgerät feststellen, daß der mit diesem Instrument gemessene Maximalwert sich bei den Feldwaagemessungen (*Askania-Waage*)

in H und Z überhaupt nicht abzeichnete. Es können demnach die mit solchen Instrumenten angeblich festgestellten magnetischen Anomalien nicht als wirklich bestehend hingenommen werden.

2. Versuche im Jahre 1953

Die erste Nachprüfung der magnetischen Messungen von *J. Wüst* hat im Bereich der Isarauen in Bogenhausen, im sog. Herzogpark, stattgefunden, an den genau markierten Stellen, an denen *J. Wüst* mit dem von ihm konstruierten Magnetometer (*J. Wüst*, 1941 b) magnetische Störungen ermittelt hatte. Die Ergebnisse des Vergleichs der Messungen von *J. Wüst* mit den von dem Münchener Universitätsinstitut durchgeführten Messungen mit einem Askania-H-Variometer sind in der Arbeit *E. Brüche* (1954, S. 373, Abb. 3) wiedergegeben. Aus dieser Abbildung ist zu ersehen, daß eine gute Übereinstimmung zwischen den von *J. Wüst* gemessenen und den mit der Feldwaage festgestellten Störungen der Horizontalkomponente des Erdfeldes vorliegt. Die von mir damals gegebene Erklärung, daß es sich bei der Ursache der magnetischen Störungen wahrscheinlich um in geringer Tiefe zugeschüttete Eisengegenstände handelt, hat insoferne eine Bestätigung gefunden, als ein von *J. Wüst* eingesetztes Metallsuchgerät positiv ansprach. Daraufhin hat sich *J. Wüst* auch davon überzeugen lassen, daß diese Indikationen von Eisengegenständen herrühren und nichts mit der Wasserführung zu tun haben.

Die von *J. Wüst* behaupteten magnetischen Feldstärkeänderungen über unterirdisch fließendem Wasser sind mir, ebenso wie den zahlreichen Kollegen der ganzen Welt, die sich eingehend mit magnetischen Messungen befaßt haben, nicht bekannt. Der Hinweis, daß diese Störungen nur ganz lokalen Charakter haben und darum zu ihrer Erfassung ein ganz geringer Stationsabstand, etwa 0,5 bis 5 m, notwendig ist, ist z.B. bei den Messungen, über die *R. Lauterbach* (1954) berichtet, erfüllt. Aber bei diesen, wie bei allen anderen magnetischen Messungen wird nichts von der Wasserführung im Untergrund abgebildet. Damit entfällt auch die Behauptung von *J. Wüst* (1941 b, S. 8), daß die magnetischen Störungen "über Wassergerinnen bei schönem Wetter regelmäßig stärker ausgeprägt sind, als bei schlechtem Wetter oder gar bei Regen". Die Feldänderungen des erdmagnetischen Feldes haben absolut nichts mit dem meteorologisch verfolgtem Wetter zu tun. Ein "magnetischer Sturm" oder ein magnetisches "Gewitter" steht in keiner Beziehung zu den in der Wetterkunde so bezeichneten Vorgängen. Es kann darum auch nicht die Rede davon sein, daß, wie *J. Wüst* (1941 d, S. 7) berichtet, es einen, "für Grundwasserströmungen unterirdischer Wasserläufe charakteristischen Verlauf" von Kurven der magnetischen Feldstärke gibt. Ebensowenig gibt es "für Verwerfungen kennzeichnende Formen" solcher Kurven. Gerade mit diesem

Problem habe ich mich bei Versuchen der Verwendung der magnetischen Feldwaage für geologische Fragen sehr eingehend beschäftigt. Änderungen des magnetischen Feldes an Verwerfungen treten nur dort auf, wo magnetische Gesteine von solchen tektonischen Störungen betroffen sind. Über Verwerfungen im Bereich normaler unmagnetischer Sedimentgesteine haben weder ich noch einer der mir bekannten Fachkollegen auf dem Gebiet magnetischer Messungen, eine meßbare und reproduzierbare Änderung des Erdfeldes gefunden. Die von *E. Brüche* (1954, S. 374) zitierten Messungen russischer Physiker, die mir im Original nicht zugänglich waren, müssen sich nach diesen Mitteilungen auf Brüche und Spalten in magnetischen Gesteinen bezogen haben. Auch die von *R. Lauterbach* (1954) bei seinen mikromagnetischen Messungen gefundenen höheren Störungswerte sind nur in Bereichen stark magnetischer Gesteine (Serpentin usw.) gefunden worden.

In den Schriften von *J. Wüst* spielen die zeitlichen Änderungen des erdmagnetischen Feldes eine große Rolle. Es handelt sich dabei um Feldstärkeänderungen, die z. T. auf luftelektrischen Vorgängen und Erdströmen beruhen sollen, die je nach der Witterung dauernden Änderungen unterliegen. Nun werden die zeitlichen Änderungen bekanntlich an vielen Observatorien, z. B. bei München im magnetischen Observatorium in Fürstfeldbruck, genauestens beachtet. An normalen Tagen erreichen diese zeitlichen Änderungen nicht die Größe, daß sie mit einem so primitiven Instrument, wie es das *Wüstsche* Lokalvariometer ist, — einer Feldänderung in H um 50γ entspricht etwa eine Ableseänderung von 1° bei dem *Wüstschen* Instrument — überhaupt angezeigt werden können. Aber eine andere Störungursache wirkt sich in München, wie in allen Städten mit elektrischen Strassenbahnen sehr ungünstig auf magnetische Messungen aus. Es sind das die magnetischen Feldstärkeänderungen, die durch die mit Gleichstrom betriebenen elektrischen Bahnen hervorgerufen werden. Im Stadttinneren betragen diese Feldänderungen, die mit jeder normalen magnetischen Feldwaage beobachtet werden können, einige 100γ und machen so selbst primitive magnetische Intensitätsmessungen unmöglich. Aber auch die Bereiche am Stadtrand, von denen *J. Wüst* über Messungen mit seinem Lokalvariometer berichtet, sind sehr stark gestört. Im Herzogpark (München-Bogenhausen), wo die von *E. Brüche* mitgeteilten Messungen vorgenommen wurden, waren diese Störungen, obwohl die nächste elektrische Bahn nur 600 bis 700 m von dem Meßplatz entfernt ist, überraschend gering. Die Feldänderungen, die durch die elektrische Bahn bedingt sind, betragen hier nur $\pm 30 \gamma$. Wesentlich stärker sind diese Störungen in Großhesselohe gewesen, von wo magnetische Messungen im folgenden Absatz behandelt werden sollen. Hier waren die zeitlichen Änderungen des magnetischen Feldes trotz eines seitlichen Abstandes der elektrischen Bahn von 800 m, recht hoch, nämlich ± 60 bis 90γ , also von der Größenordnung der, nach den Veröffentlichungen von *J. Wüst* (1941, b, S. 6) mit seinem Lokalvariometer z. B. in der Lamontstraße in München-Bogenhausen gemessenen Störungen.

Die in den Veröffentlichungen von 1941 (a-d) von *J. Wüst* mitgeteilten Messungen in und bei München und sonst in Oberbayern, und ebenso die Messungen bei Gnadewald in Tirol, haben alle in Bereichen stattgefunden, in denen bis zu großen Tiefen keine magnetischen Gesteine vorkommen können. Soweit die gemessenen Störungen wirklich vorhanden sind, können sie nur auf ganz oberflächennahe, magnetische Gegenstände (Eisen, oder magnetische Eisenverbindungen), zurückgeführt werden. Durch die vielen 1000 magnetischen Messungen, die in diesem Gebiet sowohl durch die Wissenschaftler der BMI, wie von anderen Wissenschaftler in diesem weiten Bereich vorgenommen worden sind, sind nirgends magnetische Störungen gefunden worden, die durch oberflächennahe magnetische Körper hervorgerufen sind und die Störungswerte bei oder über 100 γ erreichen.

Als Ergebnis dieser Betrachtungen können die folgenden Feststellungen gemacht werden: Der Vergleich der mit der Askania-Feldwaage festgestellten Störungen des magnetischen Feldes mit den durch das Lokalvariometer nach *J. Wüst* gemessenen, zeigt, daß man mit Hilfe des *Wüst*-schen Instrumentes wohl imstande ist, starke örtliche Störungen der Horizontal-Komponente des magnetischen Feldes mit hinreichender Sicherheit festzustellen. Diese Messungen sind darum brauchbarer, als die mit dem sog. Gerameter durchgeführten. Von der Untauglichkeit des letzteren Instrumentes, selbst für ganz grobe Messungen, habe ich mich auch seinerzeit selbst bei den Versuchen, über die *R. Bock* (1936) berichtet hat und die von *O. Prokop* (1955, S. 119, Abb. 31) angeführt sind, überzeugt. Es mußte ebenso festgestellt werden, daß auch das *Wüst*-sche Lokalvariometer für feinere Beobachtungen untauglich ist. So konnten die magnetischen Feldstärkeänderungen, die durch die elektrische Bahn hervorgerufen wurden, von *J. Wüst* nicht entsprechend berücksichtigt werden.

Die von *J. Wüst* behaupteten magnetischen Störungen über unterirdischen Wassergerinnen sind der angewandten Geophysik unbekannt geblieben. Der Nachweis, daß es solche Störungen überhaupt gibt, müßte durch exakte Feldmessungen und Feldexperimente einwandfrei erbracht werden, wenn dies Problem überhaupt diskutiert werden soll.

3. Versuche im Jahre 1955

Nachdem so die Messungen im Herzogpark bei Bogenhausen eine einwandfreie Klärung gefunden hatten, teilte mir Herr *J. Wüst* mit, daß er mir auch eine Stelle angeben könne, wo keine Eisengegenstände als störende Ursache in Frage kämen, da das eingesetzte Metallsuchgerät keine Indikationen ergeben hatte. Die Untersuchung und Nachprüfung der *Wüst*-schen Messungen fand im Herbst 1955, am 4., 6. und 14. Oktober statt. Die dabei gefundenen Feststellungen sind in mehrfacher Beziehung so interessant, daß es sich schon lohnt, ihre Durchführung näher zu beschreiben und die

Schlußfolgerungen, die daraus m. E. zu ziehen sind, mitzuteilen. Das Versuchsgelände liegt unweit von der Großhesseloher Bahnbrücke, etwa 350 m nordwestlich vom Westanfang der Brücke, auf der westlichen Hochterasse des Isartales. Es liegen dort in großer flächenhafter Verbreitung die bekannten fluvioglazialen Würmschotter, die allerdings längs der schmalen, ebenen Fläche, auf der die magnetischen Messungen ausgeführt worden sind, offenbar durch menschliche Eingriffe im wesentlichen entfernt worden sind. Bei der im Folgenden beschriebenen Aufgrabung wurden nur noch Reste dieser Schotter, dann eine einige dm mächtige Lehmschicht und darunter die losen, bzw. verfestigten Schotter (Nagelfluh) des Altdiluviums, (Geol.-Hydrolog. Karte von München 1 : 50 000 von *H. Killmann*, 1953) gefunden. Diese alten Schotter reichen bis zum Talgrund der Isar-Aluvionen herunter.

Diese Ablagerungen (die jüngeren sowie die älteren diluvialen Schotter und die Lehme) sind unmagnetisch. Selbst wenn das eine oder andere kristalline Geröll in den diluvialen Schottern vorkommt, das eine geringe Magnetisierung haben könnte, so reichen die Wirkungen dieser wenigen magnetischen Bestandteile nicht aus, um auch nur eine leichte Unregelmäßigkeit des Magnetfeldes zu verursachen. Magnetische Wirkungen durch diese Ablagerungen sind ausgeschlossen. Es ist hier ein schmaler ebener Rasenstreifen vorhanden, der im Osten von einem Steilabfall zur Isar hinab begrenzt ist und der im Westen, Norden und Süden an Gebüsch mit Schutt-
ablagerungen und altem Gemäuerwerk sein Ende findet. An der Geländekante zur Isar hinab stehen einige Buchen, deren Alter ich auf mindestens 100 Jahre schätze. Diese Stelle hat *J. Wüst* mit seinem magnetischen Lokalvariometer untersucht und dabei sehr erhebliche Störungen der H-Komponente des Erdfeldes gefunden. Ein eingesetztes Metallsuchgerät zeigt dort keine Indikationen, so daß ein Gegenstand aus Eisen oder Stahl als Störungsursache nicht in Frage kommen kann.

Die von *J. Wüst* ausgemessene magnetische Störung wurde dann in meinem Beisein von Herrn Dr. *M. Tröster* mit der mir von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellten Askania-Feldwaage näher untersucht. Es ergab sich das in den Abbildungen (1 u. 2) wiedergegebene Störungsbild. Es liegt hier eine ganz lokale magnetische negative Z-Anomalie vor, die nur durch ganz oberflächennah liegende magnetische Gegenstände erklärt werden kann. Auf der glatten, lehmigen und mit Rasen bewachsenen Oberfläche war nichts zu sehen, was auf das Vorkommen magnetischer Gegenstände schließen ließ. Eisengegenstände fielen nach dem negativen Ergebnis der Untersuchungen von *J. Wüst* mit dem Metallsuchgerät als Ursache aus. Also konnte nur eine kleine Aufgrabung das Rätsel lösen. Diese Aufgrabung wurde 2 Tage später vorgenommen. Sie ergab unter 20 cm Lehm eine 60 cm breite und ebenso tiefe "Tasche" (Einlagerung) einer lockeren schwarzen Erde, in der größere Schlackenstücke

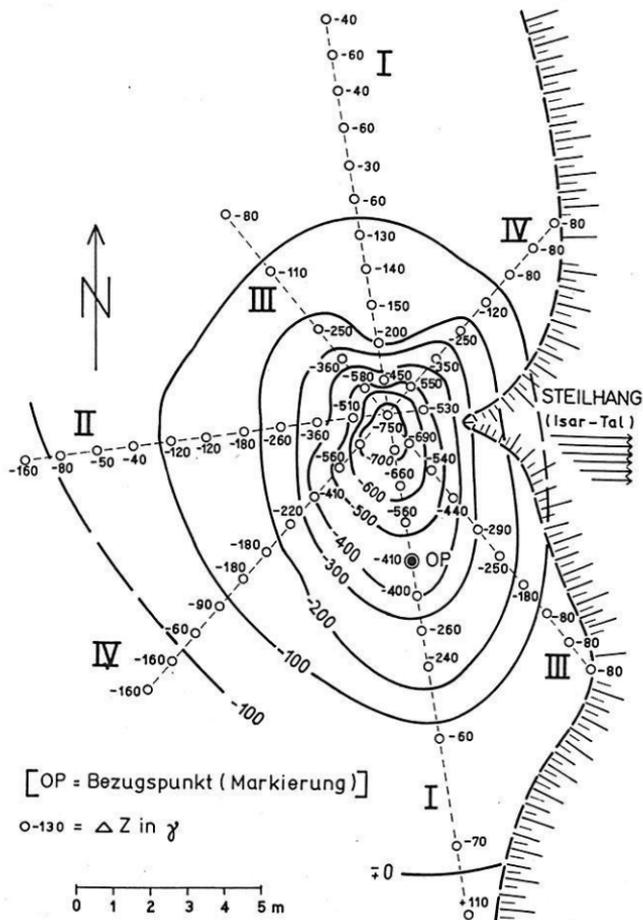


Abb. 1: Lageplan einer lokalen magnetischen Störung bei Großhesselohe (südlich München).

eingebettet waren. Es konnte schon im Gelände mit der Feldwaage festgestellt werden, daß diese Schlackenstücke verhältnismäßig stark magnetisch waren. Ein in die getrocknete, schwarze Erde eingeführter Hufeisenmagnet zog eine Menge schwarzer Partikelchen wie Eisenfeilspäne an. Das magnetische Material, das die lokale Anomalie verursacht hat, war damit gefunden. Eine genaue petrographische Untersuchung der Schlackenerde verdanke ich den Herrn Dr. J. Nothhaft und Dr. P. Ney, denen 2 Dünnschliffe der Schlacken übergeben werden konnten. Sie fanden in einer farblosen bis bräunlichen Glasbasis mit vielen Luftblasen im Schliff 6818 reichlich isometrische Magnetitkörner, Trichite, Plagioglasleisten und

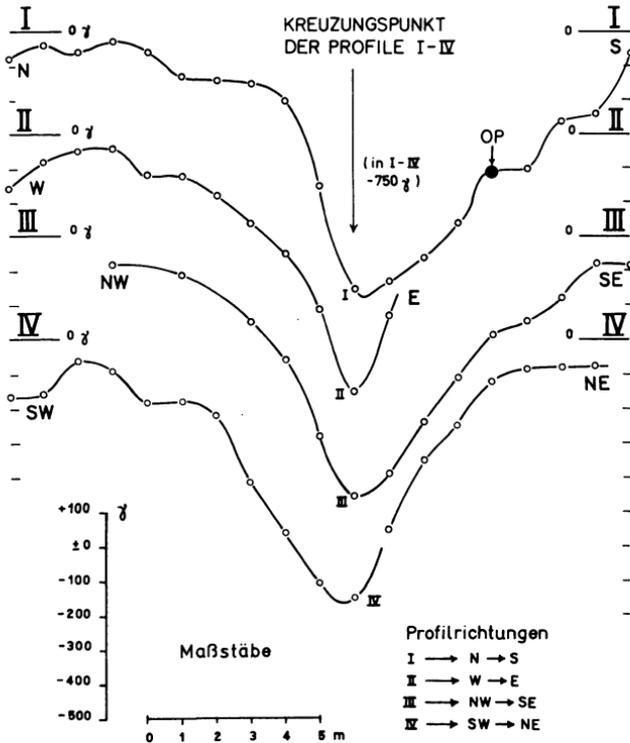


Abb. 2: Z-Profile durch eine lokale magnetische Störung bei Großhesselohe (südlich München).

Wollastonitfasern. Im Schliff 6817 in dunklerer Glasbasis ebenfalls Plagioglasleisten und Wollastonit und reichlich isometrische Magnetitkörper. Daß diese Schlacken aus einem Rennfeuer stammen, ist einmal wegen des Fehlens von Aluminiummineralien (wie Mullit, Korund, Hedenbergit und Herzynit), wie sie sonst in Schlacken von Steinkohlen und Oberpfälzer Braunkohlen vorkommen, wahrscheinlich. Weiter wurde in dem Schliff 6818 verkohltes Holz gefunden. Träger der ungewöhnlich hohen Magnetisierung dieser schwarzen Erde und Schlacken ist ohne Zweifel der von beiden Beobachtern festgestellte reichliche Gehalt an Magnetit.

Die starke, dem heutigen Erdfeld entgegengesetzte Magnetisierung kann nur durch Blitzeinschlag entstanden sein. Die am steilen Abfall zur Isar stehenden alten Buchen in unmittelbarer Nachbarschaft der ganz lokalen magnetischen Anomalie zeigen deutlich die bekannten Spuren von Blitzeinschlägen. Damit ist die Magnetisierung dieser Erden und Schlacken durch Blitzeinschlag überzeugend bestätigt.

4. Versuche im Jahre 1956

Eine weitere Stelle, an der *J. Wüst* mit seinem Lokalvariometer starke magnetische Störungen gefunden und darüber (1941 c, S. 7) berichtet hat, befindet sich bei Gnadenwald (St. Martin in der Nähe von Hall in Tirol). Die Messungen mit seinem Gerät hat *J. Wüst* (1941 c) in 2 Abbildungen wiedergegeben (S. 4, Kurve 5-8, S. 5 Kurve 11-13). Er gibt dort eine maximale Differenz in H ("Feldstärkeänderung") von 1480γ an. Als Störungsursache sah er die durch Blitzeinschlag magnetisierten Ablagerungen des Untergrundes an und schreibt dazu auf Seite 8: "Einigermaßen verwunderlich ist nur, daß der vorwiegend aus Kalkschottern bestehende Boden den vom Blitz erzeugten Magnetismus trotz seiner geringen Magnetisierbarkeit und Koerzitivkraft in solchem Ausmaß festhält. Möglicherweise sind dafür eingelagerte Urgesteinsschotter, die besser magnetisch sind, sowie der Eisengehalt des Moränenlehms verantwortlich zu machen". Die Stelle wurde am 22.10.1956 von mir zusammen mit Herrn Dr. Dr. *J. Wüst* und Herrn Dr. *A. Korschunow* besucht. Es wurde mit dem Askania-Gerät und zwar mit einer Z -Waage – um den vermuteten Störkörper genau festlegen zu können – auf der von *J. Wüst* näher bezeichneten Stelle gemessen. Das Ergebnis ist in der Abbildung 3 wiedergegeben. Es ist ersichtlich, daß an der von *J. Wüst* angegebenen Stelle eine starke Änderung in Z von der Amplitude 1510γ ($+1180$ bis -330γ) vorliegt. Die von *J. Wüst* veröffentlichte Störungskurve in H (Horizontalkomponente) paßt gut zu den gemessenen Werten in Z (Vertikalkomponente). Aus der raschen Änderung der Störungswerte kann gefolgert werden, daß sich der die Störung verursachende magnetische Körper in ganz geringer Tiefe unter der Oberfläche befindet. Eine Ausschachtung für einen Hausbau in der Nähe der magnetischen Störung, und an der Stelle der größten Störung selbst vorgenommene Ausgrabungen zeigten, daß, so wie *J. Wüst* das richtig schildert, glaziale Schotter mit vorwiegend Kalkgeröllen den Untergrund bilden. Das sind Ablagerungen in denen niemals – auch nicht durch Blitzschlag – eine so starke Magnetisierung erzeugt werden kann, daß sie zu den gemessenen Störwerten von über 1000γ führen könnte. Die tatsächlichen Ursachen dieser starken magnetischen Störung wurden dann sehr rasch ermittelt. Herr *J. Wüst* hatte, wie im Herzogpark, sein Metallsuchgerät mitgenommen und es stellte sich sehr bald heraus, daß in ganz geringer Tiefe an dieser Örtlichkeit Metallgegenstände gelegen sind. Ein ortskundiger Landwirt, der bei diesen Messungen vorbeikam, gab bald die einwandfreie Aufklärung. Es kreuzt genau an der durch die höchsten Störungswerte bezeichneten Stelle des magnetischen Profils in nur $0,8$ m Tiefe eine Wasserleitung den Weg. Auf diese Wasserleitung sind sowohl die Indikationen des Metallsuchgerätes wie die Indikationen des magnetischen Meßgerätes zurückzuführen. Während das Querprofil SW-SE die Wasserleitung beinahe senkrecht überquert, sind die Meßpunkte auf dem NW-SW-Profil auf einer Strecke angelegt, die die Wasserleitung unter einem spitzen Winkel schneidet. Einzelheiten über den Verlauf

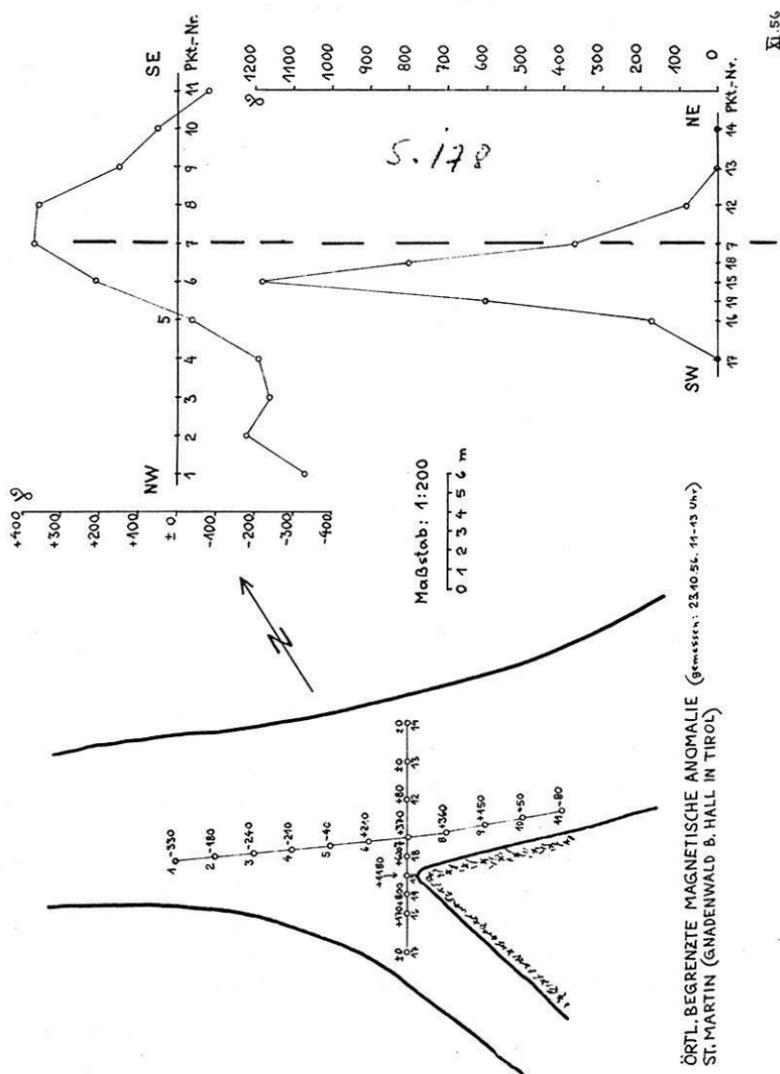


Abb. 3: Lageplan (links) und Z-Profile (rechts) einer lokalen magnetischen Störung in Gnadewald (Tirol).

der magnetischen Störung wurden nicht mehr ermittelt, da sie für das vorliegende Problem uninteressant sind.

Die mit der Askania-Waage ermittelten Störungswerte in Z sind wesentlich höher als die nach meiner langjährigen Erfahrung sonst beim Überqueren von Wasserleitungen festgestellten Störungswerte. Derartige Störungen-

werte in Z sind im allgemeinen nicht höher als 100 bis 200 γ , gegenüber 1500 γ , wie sie in Gnadewald gemessen wurden. Die Ursache für die hohe Magnetisierung der Wasserleitung an dieser Stelle mag darin liegen, daß hier das Eisen der Wasserleitung über den durch das Erdfeld induzierten Betrag hinaus, durch einen Blitzschlag eine erhöhte Magnetisierung erfahren hat. Schon *J. Wüst* (1941 c) berichtet von dieser Stelle, daß sie an einem Ort gelegen ist, an der ein kleiner Transformator durch Blitzeinschlag zerstört wurde. Die Aussage von *J. Wüst* wurde von dem einheimischen Bauern bestätigt, der uns über den Verlauf der Wasserleitung unterrichtet hatte. Die ungewöhnlich hohe Magnetisierung der Wasserleitung in Gnadewald hatte dadurch eine durchaus natürliche Erklärung gefunden.

5. Zusammenfassung

An drei, von *J. Wüst* angegebenen, z. T. in früheren Veröffentlichungen angeführten Stellen, wurden mit seinem Lokalvariometer gemessene magnetische Störungen mit modernen Askania-Geräten nachgeprüft. Es ergab sich, daß die mit dem *Wüstschen* Instrument gefundenen, starken lokalen magnetischen Störungen tatsächlich dort wirklich vorhanden sind, wo sie von *J. Wüst* angegeben waren. Mit der Wasserführung im Untergrund haben diese magnetischen Störungen nichts zu tun. Sie waren vielmehr in einem Falle (Herzogpark, München) durch oberflächennah gelegene, verborgene Eisengegenstände, in einem weiteren Falle (Gnadewald, Tirol) durch eine eiserne Wasserleitung hervorgerufen. Im dritten Falle (Großhesselohe bei München) waren Schlacken und Schlackenerden eines alten Rennfeuers die Ursache der magnetischen Störungen. Die auffallend hohen Störwerte bei Großhesselohe und in Gnadewald waren durch die induzierende Wirkung von Blitzschlägen hervorgerufen worden. Ungewöhnlich waren die Rennfeuerschlacken als Störungsursache bei Großhesselohe. Im Bereich geologischer Schichten und Ablagerungen, die keine magnetische Gesteins- oder Mineral-Komponente enthalten, wurde unerwartet eine ganz lokale magnetische Störung entdeckt, die *W. Filchner* anschaulich als "magnetische Pustel" bezeichnen würde.

Die Versuche mit dem magnetischen Lokalvariometer von *J. Wüst* haben die Zweckmäßigkeit einfacher, leicht tragbarer Geräte für die Ausmessung starker lokaler magnetischer Störungen gezeigt. Einst wurden in Schweden Instrumente wie das *Thalén* Magnetometer, der *Tiberg* Inklinator und das *Dahlblom* Magnetometer (*Th. Dahlblom*, 1898, *P. Uhlich*, 1899) verwendet. Inzwischen wird in Schweden ein ABEM-Magnetometer hergestellt, das nach Mitteilungen von *R. E. Glitsch* (Dissertation München, 1957) auch wesentlich exaktere Messungen der magnetischen Vertikalkomponente möglich macht. In Deutschland liegen Mitteilungen der Askania-

Werke, Berlin-Friedenau, von *Fr. Haalck* (1956) vor, nach denen es ihm gelungen ist, mit Hilfe von Torsionsfäden ein leichtes, bequem und schnellarbeitendes Instrument zu entwickeln. Ebenso hat *G. Fanselau* (1957) über ein Feldmeßgerät mit Bandaufhängung berichtet, das im Geomagnetischen Observatorium Niemeck konstruiert wurde und das sich im Einsatz gut bewährt hat.

Starke magnetische Störungen, wie sie z. B. bei Vorkommen von Basalt, Diorit, Gabbro, Amphibolit und Serpentin auftreten, könnten mit solchen Instrumenten schnell und ohne großen Aufwand magnetisch vermessen werden. Das wäre ein großer Gewinn für den kartierenden Geologen, wenn er ein solches möglichst billiges und leichtes Gerät mit einem leichten Stativ etwa im Rucksack oder in der Aktentasche mit sich führen könnte. Wie weit sich die neuen Torsions-Instrumente eignen, die Präzisionsinstrumente von der Art, wie sie zur Nachprüfung der Messungen von *J. Wüst* verwendet wurden, — nämlich die *Askania-Feldwaagen* —, zu ersetzen, wird die Erfahrung lehren. *H. Imhof* (1957) teilt neuerdings mit, wie diese altbewährten Instrumente durch neue Magnetsysteme weiter vervollkommen worden sind und sich leicht für jeden in der Praxis vorkommenden Störbereich einrichten lassen.

In Gebieten, in denen magnetische Gesteine vorkommen, scheint mir ein geeignetes, leichtes und billiges Magnetometer für den Geologen ebenso unentbehrlich wie der Geologenhammer und der Geologenkompaß zu sein. Die Untersuchungen von Gesteinsvorkommen mit radioaktiven Gesteinen ist vergleichsweise heute für den Geologen ohne den Gebrauch eines Szintillometers unmöglich. Hoffen wir, daß diese Anregung bald dazu führt, daß auch für den Geologen ein geeignetes Geologen-Magnetometer zu haben ist. Dabei gehe ich auf die Anregung von *O. Meisser* (1952) ein, der gerade für den Geologen fordert, daß er bei Untersuchungen von Erzlagern neben dem von ihm zur Messung nach der Eigenpotentialmethode empfohlenen "Erzkompaß" auch ein solches magnetisches Instrument mit sich führen müßte.

Literatur

- [1] *Bock, R.*: Zur Frage der objektiven Wünschelrutenkontrolle mit magnetometrischen Apparaten. *Naturwissenschaften* 24, 1936, S. 585-587.
- [2] *Brüche, E.*: Bericht über Wünschelrute, geopathische Reize und Entstörungsggerät. *Naturw. Rundschau* 7, 1954, S. 367-377 und S. 454-465.
- [3] *Dahlblom, Th.*: Über magnetische Erzlagernstätten und deren Untersuchung durch magnetische Messungen. Falun 1898. Deutsch von *P. Uhlich*, Freiberg i. Sa., 1899.

- [4] *Fanselau, G.*: Einige Neuerungen an den geomagnetischen Feldwaagen. Geophysical Prosp. 5, 1957, S. 9-19 mit weiteren Literaturangaben.
- [5] *Haalck, Fr.*: Ein Torsionsmagnetometer zur Messung der Vertikalkomponente des erdmagnetischen Feldes. Askania-Warte 50, 1956, S. 31-50 mit weiteren Literaturangaben.
- [6] *Imkof, H.*: Ein neues Magnetsystem für die Askaniafeldwaage Typ Gf 6. Askania-Warte 51. 1957. S. 19/20.
- [7] *Lauterbach, R.*: Mikromagnetik — ein Hilfsmittel geologischer Erkundung. Wiss. Zeitschr. d. Karl-Marx-Univ. Leipzig, 1953/54, Math.-Nat. Reihe, H. 3, S. 223-238.
- [8] *Meisser, O.*: Derzeitiger Stand und einige Aufgaben der angewandten Geophysik. Freiburger Forschungshefte 8, 1952, S. 66-81.
- [9] *Prokop, O.*: Wünschelrute, Erdstrahlen und Wissenschaft. Stuttgart 1955, 183 S., 39 Abb.
- [10] *Vidal, H.*: Erdstrahlen als angebliche Ursache von Verkehrsunfällen. Zeitschr. f. Verkehrssicherheit 2, Tübingen 1954, S. 452-457.
- [11] *Wüst, J.*: Untersuchungen mit dem Gerameter. Zeitschr. f. Wünschelrutenforschung 1941 a) Nr. 1/2, S. 2-12. (10 bis 20 mal kleinere Genauigkeit als Feldwaage, nämlich ca. 100 bis 200 γ).
- [12] *Wüst, J.*: Ein einfaches, sehr empfindliches magnetisches Lokalvariometer. Zeitschr. f. Wünschelrutenforschung, 1941 b), Nr. 3/4.
- [13] *Wüst, J.*: Magnetometrische Messungen an Reaktionsstellen von Rutengängern. Zeitschr. f. Wünschelrutenforschung, 1941 c), Nr. 5/6, S. 3-8.
- [14] *Wüst, J.*: Magnetometrische Messungen an Blitzeinschlagstellen. Zeitschr. f. Wünschelrutenforschung, 1941 d) Nr. 8/9/10, S. 3-8.
- [15] *Wüst, J.*: Bemerkungen zu physikalischen Darlegungen des Buches: Wünschelrute, Erdstrahlen und Wissenschaft. (Herausgeg. v. Dozent Dr. O. Prokop). Erfahrungsheilkunde 4, 1955.

Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials

Von A. Belluigi, Rom¹⁾

(Fortsetzung)

Teil II

Das erste Kapitel dieser Abhandlung beschäftigt sich mit der Umwandlung in explizite Form der in der vorhergehenden Arbeit (Teil I) gebrauchten Ausdrücke von der Type $[f]$ oder $[f0\zeta]$ für den Fall eines geschichteten Bodens, während das zweite Kapitel der Ableitung der auf die vorher erzielten Ergebnisse sich stützenden Äquivalenzgesetze gewidmet ist; das dritte Kapitel ist der Erweiterung der Äquivalenzformeln auf Böden mit Untergrund von ungleichmäßiger Leitfähigkeit gewidmet.

Kapitel 1. —

§ 1. Die Ausdrücke die wir in explizite Form bringen wollen sind die vier folgenden

$$[\sigma] = \int_0^a \sigma(x) dx, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}, \quad \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] = \int_0^a \sigma(x) dx \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)},$$

$$\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi$$

Wir betrachten den Fall in dem der Boden, im Bereiche $(0, a)$, aus n -Schichten, von der Mächtigkeit h_i und Leitfähigkeit σ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) besteht. In allgemeinerer Weise betrachten wir vielmehr zwei Funktionen $f(x)$ und $\zeta(x)$ die in der $(i+1)$ -ten Schicht von der Mächtigkeit konstante Werte f_i und ζ_i annehmen. Wir bezeichnen außerdem mit a_i die

¹⁾ Prof. A. Belluigi, Leiter des Istituto di Fisica Terrestre an der Universität von Perugia, Italien.

Wir betrachten x im Bereiche (a_i, a_{i+1}) : dann ist

$$[\zeta]_x = \int_0^{a_i} \zeta(x) dx + \int_{a_i}^x \zeta(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k h_k + \zeta_i (x - a_i)$$

woraus man, auf Grund der Definition von $[f \circ \zeta]$ und $f(x)$, erhält

$$[f \circ \zeta] = \int_0^a f(x) [\zeta]_x dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) [\zeta]_x dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} [\zeta]_x dx$$

und infolge der vorhergehenden Beziehung für $[\zeta]_x$

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [\zeta]_x dx &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k \right) dx + \zeta_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) dx = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k \right) (a_{i+1} - a_i) + \frac{1}{2} \zeta_i (a_{i+1} - a_i)^2 = h_i \sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k + \frac{1}{2} \zeta_i h_i^2 \end{aligned}$$

woraus man schließlich, durch Einsetzen in die vorgehende Form von $[f \circ \zeta]$, in leichter Weise

$$(2) \quad [f \circ \zeta] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i h_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \zeta_i h_i^2$$

erhält.

Wenn wir für $f(x) \equiv \sigma(x)$, $\zeta(x) \equiv \frac{1}{\sigma(x)}$ (und somit $f_i = \sigma_i$, $\zeta_i = \frac{1}{\sigma_i}$) setzen, so erhalten wir aus Gl. (1) und Gl. (2)

$$(3) \quad [\sigma] = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i h_i, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{\sigma_i}$$

$$(4) \quad \left[\sigma \circ \frac{1}{\sigma} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i h_i \sum_{k=0}^{i-1} \frac{h_k}{\sigma_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{\sigma_i} \sum_{k=0}^{i-1} \sigma_k h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2.$$

Mit einigen Rechengvorgängen könnte man für die Gl. (3) und (4) die bereits in allgemeiner Weise nachgewiesene Beziehung $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = [\sigma] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}$ (siehe Gl. (17) des Teiles I der Arbeit) ableiten; wir bestehen jedoch nicht darauf.

§ 2. Wir schreiben jetzt die Gl. (3) und (4) in expliziter Form für 1, 2, 3 und 4 Schichten ($n = 1, 2, 3, 4$).

a) $n = 1$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{h_0}{\sigma_0}, \quad \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} h_0^2 = \frac{1}{2} a^2$$

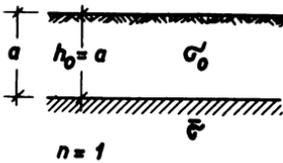


Abb. 2

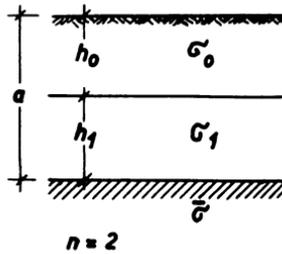


Abb. 3

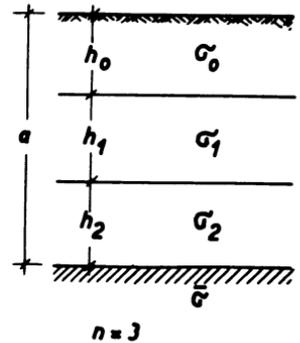


Abb. 4

b) $n = 2$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2) = \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + 2 h_0 h_1) - h_0 h_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2) = \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + 2 h_0 h_1) - h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) \end{aligned}$$

c) $n = 3$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2}$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} h_0 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_1 h_2 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + 2 h_0 h_1 + 2 h_0 h_2 + 2 h_1 h_2) + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + \\ &\quad + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_2} h_0 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) + \\ &\quad + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) \end{aligned}$$

d) $n = 4$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 + \sigma_3 h_3,$$

$$\left[\frac{1}{\sigma} \right] = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2} + \frac{h_3}{\sigma_3}$$

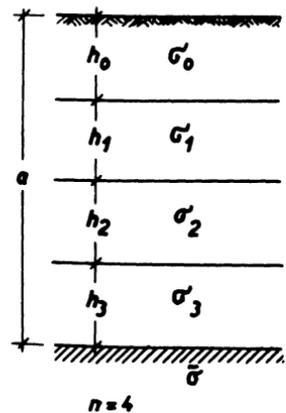


Abb. 5

$$\begin{aligned} \left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \right] &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} h_0 h_2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_0} h_0 h_3 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} h_1 h_3 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} h_2 h_3 + \\ &+ \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_0} - 1 \right) + \\ &+ h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) + h_1 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - 1 \right) + h_2 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_2} h_0 h_2 + \frac{\sigma_0}{\sigma_3} h_0 h_3 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_1 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} h_1 h_3 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} h_2 h_3 + \\ &+ \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1 \right) + h_0 h_3 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_3} - 1 \right) + \\ &+ h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) + h_1 h_3 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1 \right) + h_2 h_3 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 1 \right) \end{aligned}$$

Aus den obenangeführten Formeln ersieht man deutlich die Struktur der Ausdrücke $\left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \right]$ und $\left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]$: sie besitzen die Dimensionen des Quadrates einer Länge und enthalten in linearer Form alle Verhältnisse zwischen den Leitfähigkeiten einer Schicht und jener der vorhergehenden Schichten im Falle von $\left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \right]$ sowie jener der nachfolgenden Schichten im Falle von $\left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]$.

Kapitel 2

§ 3. Wir betrachten jetzt einen gleich geschichteten Boden wie im ersten Teil der Abhandlung; für den scheinbaren spezifischen Widerstand dieses Bodens sind zwei asymptotische Formeln nachgewiesen worden.

Für einen Boden mit schwach leitfähigem Untergrund ($\bar{\sigma} \ll \frac{1}{a} [\sigma]$) ist die Gültigkeit nachstehender Formel

$$(5) \quad \phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r \right), \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi} [H_0(x) - \gamma_0(x)]$$

gezeigt worden, während für den Fall eines Untergrundes von großer Leitfähigkeit folgende Formel abgeleitet wurde

$$(6) \quad \phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} - \left(a_m^2 - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

worin mit a die Größe

$$(7) \quad a_m = \sqrt{2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]}$$

bezeichnet wird, die wir "scheinbare Tiefe" nennen können.

Wir betrachten nun eine Schicht von der (konstanten) Leitfähigkeit σ^* , Tiefe a^* und einem Untergrund von der Leitfähigkeit $\bar{\sigma}^*$. Wenn man die im ersten Teil dieser Abhandlung (Fall a) für eine Schicht festgelegte Formeln berücksichtigt, so erhält man $[\sigma] = \sigma^* a^*$, $2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] = a^{*2}$, $a_m = a^*$ und somit

$$(5') \quad \phi(r) \sim \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}^*}{a^* \sigma^*} r \right)$$

$$(6') \quad \phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \left[\frac{1}{r} + a^{*2} \left(1 - \frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*2}} \right) \frac{1}{r^3} \right]$$

Wir betrachten nunmehr einen beliebigen Boden bestehend aus einer Schicht von der Leitfähigkeit $\sigma(x)$, die im allgemeinen Funktion der Tiefe ist, und aus einem Untergrund von der Leitfähigkeit $\bar{\sigma}$, und suchen die Bedingungen welche die soeben untersuchte Schichtentype (Formeln (5') und (6')) erfüllen muß, um mit dem in Frage kommenden Boden gleichwertig zu sein. Die Äquivalenz ist selbstverständlich in asymptotischer Weise zu verstehen, d. h. für Messungen in ziemlich großen Entfernungen.

§ 4. Wir untersuchen zuerst den Fall eines schwach leitenden (insbesondere isolierenden) Untergrundes: für den in Frage kommenden Boden gilt die Gl. (5) und für die äquivalente Schicht fördern wir die Gültigkeit

der Gl. (5'). Infolgedessen muß, zumindest für ziemlich große Werte von r , folgende Beziehung gelten

$$\frac{1}{[\sigma]} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r \right) \equiv \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}^*}{a^* \sigma^*} r \right)$$

woraus man [A. 1]

$$(8) \quad \frac{1}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^*}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$$

erhält.

Demzufolge kann man auch schreiben [A. 1]

$$[\sigma]^2 = a^{*2} \sigma^{*2}$$

(8')

$$[\sigma] = a^* \sigma^*$$

Die Gl. (8) und (8') sind somit für die Identität der zwei asymptotischen Entwicklungen (5) und (5') notwendig; es ist klar, daß sie auch genügen. Die Gl. (8) und (8') stellen die Beziehungen dar, welche die Parameter a^* und σ^* des fiktiven, mit dem gegebenen Boden gleichwertigen, Bodens liefern.

Die Gl. (8) und (8') drücken das bekannte Resultat aus, daß man nämlich asymptotisch einen Boden mit schwach leitfähigen Untergrund durch einen fiktiven Boden ersetzen kann,* bestehend aus einem Untergrund von derselben Leitfähigkeit und aus einer Schicht von beliebiger Mächtigkeit a , deren Leitfähigkeit mit dem *Kirchhoffschen* Gesetz für Nebeneinanderschaltung berechnet wird.

§ 5. Dagegen im Falle eines Bodens mit einem Untergrund von mittlerer, nicht kleiner, Leitfähigkeit, d. h. für eine Gestaltung bei der $a \bar{\sigma}$ nicht als klein angesehen werden kann im Vergleich zu $[\sigma]$, müssen wir die Gl. (6) und Gl. (6') identifizieren. Mit einer gleichen Überlegung, wie im vorhergehenden Falle, erhalten wir folgende Beziehungen

$$\bar{\sigma}^* = \sigma$$

$$a^{*2} \left(1 - \frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*2}} \right) = a_m^2 - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}^2}$$

woraus man, falls man a^* und σ^* von $\bar{\sigma}$ unabhängig haben will, folgende Beziehungen ableitet

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* &= \bar{\sigma} \\ (9) \quad a^* \sigma^* &= [\sigma] \\ a^* &= a_m = \sqrt{2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]} \end{aligned}$$

Man gelangt somit zu einem analogen Ergebnis, wie im Falle eines schwach leitenden Bodens, mit dem Unterschied jedoch, daß die Mächtigkeit der gleichwertigen Schicht nicht beliebig festgesetzt werden darf, sondern daß sie gleich der scheinbaren Tiefe sein muß. Wir beachten ferner, daß während die Gleichwertigkeit im Falle eines beinahe isolierenden Untergrundes das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung betrifft, interessiert sie in diesem Falle auch das zweite Glied und um sie deshalb in der Deutung einer spezifischen Widerstandskurve ausnützen zu können, muß die Kurve eher genau sein. Jedenfalls ist ihre Verwendung hier weniger einfach als im vorhergehenden Falle.

Kapitel 3

§ 6. Bisher haben wir uns mit der Substitution einer beliebigen Schichtenverteilung durch eine Schicht beschäftigt, wobei diese Verteilung einen Untergrund von gleichförmiger Leitfähigkeit hatte. Wir werden jetzt zeigen, daß die gleichen Äquivalenzformeln auch im Falle eines Untergrundes von beliebiger (auch von nicht konstanter) Leitfähigkeit angewandt werden können; und zwar werden wir zeigen, daß man auch in diesem Falle für Entfernungen $r \gg a$ die Leitfähigkeitsverteilung in der Schicht $(0, a)$ durch jene einer gleichförmigen, mittels der Gl. (8) oder (9) berechneten Schicht ersetzen kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir einen Boden von der Leitfähigkeit $\sigma(x)$ die für $x > b > a$ den konstanten Wert $\bar{\sigma}$ annehme. Mit den Bezeichnungen des ersten Teiles dieser Abhandlung erhält man, durch Einsetzen von b an Stelle von a

$$(10) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \Omega(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

worin

$$\Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(b) z'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(b, \lambda)}{\sigma(b) y'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(b, \lambda)}$$

Wir geben jetzt der $\Omega(\lambda)$ eine neue Form die den Teil hervorhebt der nur von den Werten $\sigma(x)$ im Bereiche $(0, a)$ abhängt und den Teil der von $\sigma(x)$ für $x > a$ abhängig ist.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die zwei Sonderlösungen $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ der Gleichung (1) des ersten Teiles der Abhandlung, welche folgende Bedingungen erfüllen

$$(11) \quad \begin{aligned} \eta(a, \lambda) &= 1, & \sigma(a) \eta'(a, \lambda) &= 0 \\ \zeta(a, \lambda) &= 0, & \sigma(a) \zeta'(a, \lambda) &= 1 \end{aligned}$$

Wie im Falle der $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ des ersten Teiles, beweist man daß

$$\sigma(x) [\eta(x, \lambda) \zeta'(x, \lambda) - \eta'(x, \lambda) \zeta(x, \lambda)] = \text{konstant}$$

ist, woraus man durch Einsetzen von $x = a$ und durch Berücksichtigung der Gl. (11), folgende Beziehung erhält

$$(12) \quad \sigma(x) [\eta(x, \lambda) \zeta'(x, \lambda) - \eta'(x, \lambda) \zeta(x, \lambda)] = 1$$

Nachdem die $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ Lösungen derselben linearen homogenen Gleichung sind, können sie durch lineare Kombinationen von $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ erhalten werden: man erhält somit [A. 2]

$$(13) \quad \begin{aligned} y(x, \lambda) &= y(a, \lambda) \eta(x, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(x, \lambda) \\ z(x, \lambda) &= z(a, \lambda) \eta(x, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(x, \lambda) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\bar{\Omega}(\lambda)$ den analogen Ausdruck von $\Omega(\lambda)$ der mittels $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ gebildet wird und zwar

$$(14) \quad \bar{\Omega}(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)}$$

Um diesen Ausdruck zu bilden kann man wie bei der Bildung von $\Omega(\lambda)$ (siehe Teil I) vorgehen, indem wir 0 durch a und a durch b ersetzen. Dieserhalb kann die $\bar{\Omega}(\lambda)$ wie die $\Omega(\lambda)$ des gegebenen Bodens gedeutet werden aus dem die Schicht $(0, a)$ herausgenommen sei: sie hängt somit ausschließlich vom Verhalten der $\sigma(x)$ für $x > a$ ab.

Durch Einsetzen der Gl. (13) in $\Omega(\lambda)$ und bei Berücksichtigung der Gl. (14) erhalten wir [A. 3]

$$(14') \quad \Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \Omega(\lambda) + \lambda y(a, \lambda)}$$

In diesem Ausdruck sind $y(a, \lambda)$, $z(a, \lambda)$, $y'(a, \lambda)$, $z'(a, \lambda)$ unabhängig vom Verhalten der $\sigma(x)$ für $x > a$, während $\bar{\Omega}(\lambda)$ unabhängig von $\sigma(x)$ für $x < a$ ist.

Durch geeignete Umformung der Gl. (14') [A. 4] gelangt man zur folgenden Beziehung

$$(15) \quad \Omega(\lambda) = \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} + \frac{\lambda}{y(a, \lambda) [\lambda y(a, \lambda) \omega(\lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda)]}$$

$$\left(\omega(\lambda) = \frac{1}{\bar{\Omega}(\lambda)} \right)$$

woraus man

$$(16) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{y(a, \lambda) \left[y(a, \lambda) \omega(\lambda) + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda)}{\lambda} \right]} d\lambda$$

erhält.

Das erste Glied stellt den von der Verteilung $\sigma(x)$ im Bereiche $(0, a)$ und von einem Untergrunde von unendlich großer Leitfähigkeit herrührenden scheinbaren Widerstand dar. Wie bereits erwähnt nimmt dieser scheinbare Widerstand exponentiell mit der Entfernung ab und liefert infolgedessen bei großen Entfernungen ($r \gg a$) einen vernachlässigbaren Beitrag zu $\phi(r)$. Ferner können, stets für $r \gg a$, $y(a, \lambda)$, $z(a, \lambda)$ durch ihre im zweiten Glied abgebrochene Reihenentwicklungen ersetzt werden und man kann somit in das zweite Integral der Gl. (16) folgende Beziehungen einsetzen

$$y(a, \lambda) \sim 1 + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 = 1 + \frac{1}{2} a_m^2 \lambda^2$$

(17)

$$\frac{1}{\lambda} \sigma(a) y'(a, \lambda) \sim [\sigma] \lambda$$

(Siehe Gl. (19), (20) des Teiles I).

Nachdem bei diesen Entfernungen und in dieser Näherungsfolge die Schicht $(0, a)$ nur durch $[\sigma]$ und a_m eintritt, ist es zulässig sie durch eine gleichwertige homogene Schicht zu ersetzen und zwar so, daß

$$a^* = a_m, \quad a^* \sigma^* = [\sigma]$$

ist und dies sind eben die bereits früher gefundenen Beziehungen.

Im Falle ferner, daß $\sigma(x)$ sehr klein für $x > a$ ist, so wird auch $\omega(\lambda)$ eher klein sein. $\omega(\lambda)$ hat die Dimensionen einer Leitfähigkeit und nimmt im allgemeinen Werte in der Größenordnung von $\sigma(x)$ für $x > b$ an. Es besteht in der Tat $\sigma(0) = \bar{\sigma}$; $\sigma(\infty) = \sigma(a)$; infolgedessen wird man $y(a, \lambda) \sim 1$ setzen können und die $\phi(r)$ wird nur von $[\sigma]$ abhängig sein. Man wird somit die Schicht $(0, a)$ durch eine homogene Schicht ersetzen können, so daß

$$\sigma^* a^* = [\sigma]$$

ist und die eine beliebige Tiefe hat (man kann z. B. $a^* = a$ setzen). Man muß aber bemerken, daß das Einsetzen von $a^* = a_m$ in diesem Falle zu keiner erheblichen Verbesserung der Äquivalenz beiträgt.

Im Falle, daß für $x > a$ leitfähige Schichten vorhanden sind, so ist beim Gebrauch der Äquivalenz, wie bereits erwähnt, größere Vorsicht notwendig als wie im Falle von aufeinanderfolgenden weniger leitfähigen Schichten.

Anhang

[A. 1]

Aus der Beziehung

$$\frac{1}{[\sigma]} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r \right) \equiv \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi \left(\frac{\sigma^*}{a^* \sigma^*} r \right)$$

geht man, für sehr großes r , zu folgenden über

$$\frac{1}{[\sigma]} \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \frac{1}{r} - \frac{[\sigma]^3}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{r^3} \right) \equiv \frac{1}{a^* \sigma^*} \left(\frac{a^* \sigma^*}{\bar{\sigma}^*} \frac{1}{r} - \frac{a^{*3} \sigma^{*3}}{\bar{\sigma}^{*3}} \frac{1}{r^3} \right)$$

bzw. wenn man jedes Glied mit r multipliziert

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{r^2} \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^*} - \frac{a^{*2} \sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*3}} \frac{1}{r^2}$$

woraus man, bei Grenzübergang für $r \rightarrow \infty$, die Gl. (8) erhält.

[A. 2]

Wenn wir

$$y(x, \lambda) = c_1 \eta(x, \lambda) + c_2 \zeta(x, \lambda)$$

$$z(x, \lambda) = c'_1 \eta(x, \lambda) + c'_2 \zeta(x, \lambda), \quad (c_1, c_2, c'_1, c'_2 = \text{Konstante})$$

setzen (was zulässig ist, denn $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$, wie aus den Gl. (11) sofort ersichtlich ist, bilden ein Grundsystem von Integralen) und wenn wir in dieselben $x = a$ einsetzen, so erhalten wir, bei Berücksichtigung der Gl. (11)

$$y(a, \lambda) = c_1, \quad z(a, \lambda) = c'_1$$

und wenn wir differenzieren und nochmals $x = a$ einsetzen, so erhalten wir

$$y'(a, \lambda) = \frac{c_2}{\sigma(a)}, \quad z'(a, \lambda) = \frac{c'_2}{\sigma(a)}$$

woraus sich sofort die Gl. (13) ergeben.

[A. 3]

Aus den Gl. (13) folgt

$$y(b, \lambda) = y(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)$$

$$y'(b, \lambda) = y(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)$$

$$z(b, \lambda) = z(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)$$

$$z'(b, \lambda) = z(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)$$

und durch Einsetzen in $\Omega(\lambda)$ erhält man

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda) = & \lambda \frac{\sigma(b) [z(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)] +}{\sigma(b) [y(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)] +} \\ & \frac{+\lambda \bar{\sigma} [z(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)]}{+\lambda \bar{\sigma} [y(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)]} \end{aligned}$$

$$= \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) [\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)] + \sigma(a) y'(a, \lambda) [\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)] + z(a, \lambda) [\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)]}{\sigma(a) y'(a, \lambda) [\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)] + y(a, \lambda) [\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)]}$$

woraus, wenn Zähler und Nenner durch $\frac{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)}{\lambda}$ dividiert werden, sich ergibt

$$\Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)} + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)} + \lambda y(a, \lambda)}$$

Durch Berücksichtigung der Gl. (14) erhält man dann sofort die Gl. (14').

[A. 4]

Aus Gl. (14') erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda) &= \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda y(a, \lambda)} = \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \cdot \frac{\lambda + \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \\ &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \cdot \frac{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)} + \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} - \\ &\quad \frac{\frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \\ &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda) \sigma(a) [y(a, \lambda) z'(a, \lambda) - z(a, \lambda) y'(a, \lambda)]}{y(a, \lambda) z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \right\} \end{aligned}$$

Wegen der Gl. (3') des ersten Teiles der Abhandlung ist jedoch

$$\sigma(a) [y(a, \lambda) z'(a, \lambda) - z(a, \lambda) y'(a, \lambda)] = 1$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \Omega(\lambda) &= \lambda \frac{\sigma(\mathbf{a}) z'(\mathbf{a}, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(\mathbf{a}, \lambda)}{\sigma(\mathbf{a}) y'(\mathbf{a}, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda y(\mathbf{a}, \lambda)} \\
 &= \lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda) z(\mathbf{a}, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(\mathbf{a}) y'(\mathbf{a}, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)}} \right\} \\
 &= \lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)} + \lambda \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)}}{\lambda y(\mathbf{a}, \lambda) + \sigma(\mathbf{a}) y'(\mathbf{a}, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)} \\
 &= \lambda \frac{z(\mathbf{a}, \lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda)} + \frac{\lambda \bar{\Omega}(\lambda)}{y(\mathbf{a}, \lambda) [\lambda y(\mathbf{a}, \lambda) + \sigma(\mathbf{a}) y'(\mathbf{a}, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)]}
 \end{aligned}$$

woraus man schließlich die Gl. (15) erhält, wenn Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch $\bar{\Omega}(\lambda)$ dividiert werden und wenn $\omega(\lambda) = \frac{1}{\bar{\Omega}(\lambda)}$ gesetzt wird.

Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien ¹⁾

Dt. Ak. d. Wiss. zu Berlin, Geomagn. Inst. Potsdam, Mitteilung Nr. 63

Von O. Lucke, Potsdam ²⁾

Zusammenfassung: In diesem Bericht, der eine Fortsetzung einer Arbeit von Prof. Dr. G. Fanselau und dem Verfasser darstellt, wird gezeigt,

a) daß die Westwärtsdrift der verschiedenen Multipole, die das erdmagnetische Hauptfeld darstellen, verschieden groß ist. Die größte Drift zeigt das Quadrupolfeld, die zweitgrößte das Oktupolfeld usw.

b) daß im Erdkern neben Silikaten auch metallisches Eisen vorhanden sein muß. W. H. Ramseys Hypothese kann nicht völlig richtig sein. Mit Hilfe der Theorie des Schmelzens von J. J. Gilvarry wird eine Temperaturverteilung im Inneren der Erde berechnet und mit anderen Angaben verglichen. Die Hydromagnetik der ausgeglichenen Strömungen zeigt, daß ν_m die magnetische Zähigkeit durch einen antimetrischen Tensor zu ersetzen ist, während in der Hydrodynamik $\nu^* = \frac{\eta}{\rho}$, der kinematischen Zähigkeit bekanntlich ein symmetrischer Tensor entspricht. Es ist aber kaum möglich, auf diesem Ergebnis eine Theorie des erdmagnetischen Hauptfeldes aufzubauen. Es zeigt sich, daß eine Dynamtheorie nur in der Gestalt möglich ist, die ihr E. N. Parker gegeben hat.

c) daß man auf dem Tolman-Effekt in der Grenzschicht zwischen Erdkern und Erdmantel eine Theorie des erdmagnetischen Hauptfeldes nur dann aufbauen kann, wenn man am Äquator des Erdkerns eine ostwärtige Zirkulation mit einer höheren Geschwindigkeit annehmen kann, als sie aus der Westwärtswanderung des Hauptfeldes und der Variation der Tageslängen erschlossen wird.

Abstract: This account is a continuation of a paper of G. Fanselau and this author. It is shown:

a) that the westward drift of the various multipoles, representing the geomagnetic main field, has various magnitudes. The strongest drift is shown by field of the quadrupole, the next one being that of the octupole etc.

b) that in the core of the earth there must be olivine and metallic iron. W. H. Ramsey's hypothesis cannot be quite right. Using J. J. Gilvarry's theory of fusion a distribution of temperature within the earth is found. It is compared with results

¹⁾ Vortrag auf der Geophysiker Tagung 1956 am 27.9.1956. Da die Korrekturbogen ein Jahr später in die Hand des Verfassers gelangten, sei es gestattet, einige Anmerkungen zu machen.

²⁾ Dr. O. Lucke, Geomagn. Inst. d. Dt. Ak. d. Wiss., Potsdam, Telegrafenberg.

of other authors. In hydromagnetics of the smoothed velocity field the magnetic viscosity ν_m is to be replaced by an antimetric tensor, while in familiar hydrodynamics the viscosity $\nu^* = \frac{\eta}{\rho}$ must be replaced by symmetric tensor. It seems not possible to build up on this result a theory of the geomagnetic main field. A dynamo-theory of the field seems only to be allowable in *E. N. Parker's* manner.

c) that a theory of the geomagnetic main field can build on the Tolman-effekt provided, that there is at the equator of the earth's core a circulation, eastward drifting with velocities greater than those that are found by the westward drift of the geomagnetic main field and the variation of the earth's rotation.

In der Zeitschrift für Geophysik ist in Jahrg. 22 (1956) Heft 3/4 eine Arbeit von Herrn Prof. *Fanselau* und mir mit dem oben genannten Titel erschienen. Sie wurde 1955 abgeschlossen. Inzwischen habe ich weiter an dem Thema gearbeitet und will jetzt einige Resultate vortragen. Sie seien zu drei Gruppen zusammengefaßt.

- a) Über die Veränderung des erdmagnetischen Feldes in den letzten hundert Jahren.
- b) Über hydromagnetische Theorien vom Ursprung des Feldes.
- c) Über mögliche Plasmatheorien vom Ursprung des Feldes.

Zu a)

Über die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Hauptfeldes liegen eine Reihe von Arbeiten vor. Die wichtigsten stammen von *E. C. Bullard* [1] und von *E. H. Vestine* [6].

E. C. Bullard hat sehr genaue Karten des Nichtdipolfeldes zu den Epochen 1907.5 und 1945 verglichen und erhält als Westwärtswanderung

$$18 \pm 2 \text{ [}^\circ\text{/100 Jahre]}$$

E. H. Vestine nimmt als Maß für die Westwärtswanderung die Wanderung des Durchstoßpunktes durch die Erdoberfläche des Radiusvektors, der vom Mittelpunkt der Erde zum Mittelpunkt des exzentrischen Dipols führt. Er erhält eine Wanderung von etwa

$$30^\circ \text{ nach Westen und } 25^\circ \text{ nach Norden} \\ \text{für die vergangenen 100 Jahre.}$$

Uns scheint dieses Maß nicht glücklich gewählt zu sein und zu große Werte zu liefern, wie wir sogleich sehen werden.

Über die von mir vorgeschlagene Methode hat Herr Prof. *Fanselau* im vorigen Jahr schon in München berichtet. Wir gehen ebenfalls von den vorliegenden Entwicklungen des skalaren Potentials des erdmagnetischen Hauptfeldes nach Kugelfunktionen aus und nehmen wegen der großen Un-

sicherheit der Unterlagen des vorigen Jahrhunderts an, daß es seinen Ursprung vollständig im Erdinneren hat und daß das Nichtdipolfeld vernachlässigt werden kann.

$$\mathfrak{F} = -\nabla V$$

$$(1) \frac{1}{a} V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \quad V_n = \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi] P_n^m(\cos\theta)$$

Man kann leicht zeigen, daß V_n in kartesischen Koordinaten eine homogene Funktion, eine Form n -ten Grades, darstellt. Die Elemente ihrer Matrix, deren Anzahl 3^n ist, erfüllen gewisse Symmetriebedingungen, die daraus folgen, daß \mathfrak{F} als analytische Funktion des Ortes aufgefaßt wird und daß $\text{rot } \mathfrak{F} = 0$ gelten muß. Darüber hinaus muß die Bedingung $\text{div } \mathfrak{F} \equiv -\nabla^2 V = 0$ erfüllt sein.

Sind die H_i , $i = 1, 2, 3$, die kartesischen Komponenten von \mathfrak{F} , so geht man von folgenden Taylorreihen aus:

$$(2) H_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{r} \cdot \nabla)^{n-1}}{(n-1)!} H_i / \mathbf{r} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} H_i^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jedes $H_i^{(n-1)}$ ist eine Form $(n-1)$ -ten Grades und enthält, da es aus einer trinomischen Entwicklung entsteht, $\frac{1}{2} n(n+1)$ verschiedene Terme.

Also enthalten alle 3 $H_i^{(n-1)}$ $N_1(n) = \frac{3}{2} n(n+1)$ verschiedene Terme.

Auf diese Zahl reduziert sich die Anzahl 3^n der Elemente der Matrix von V_n , wenn man annimmt, daß \mathfrak{F} eine analytische Funktion des Ortes ist. Die Bedingung $\text{rot } \mathfrak{F} = 0$ legt den Parametern weitere Symmetriebedingungen auf. Man findet zunächst, daß ihre Anzahl der Zahl der Terme von ∇V_{n-1} , also gleich $N_2(n) = \frac{3}{2}(n-1)n$ sein muß. Die Parameter von ∇V_{n-1} sind aber nicht alle unabhängig voneinander, weil $\nabla^2 V_{n-1} = 0$ gelten muß. Man findet leicht, daß die Anzahl der Bedingungen, die aus $\nabla^2 V_n = 0$ für V_n folgen, gleich der Anzahl der Parameter von V_{n-2} ist. Für V_n ergeben sich

$$\frac{N_2(n)}{3} = \frac{1}{2}(n-1)n$$

für V_{n-1}

$$N_3(n) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

Man erhält also als Anzahl der freien Parameter von V_n ohne Divergenzbedingungen $N_1(n) - N_2(n) + N_2(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n + 1$.

Wenn man davon $\frac{N_2(n)}{3} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ abzieht, erhält man die bekannte Zahl der freien Parameter für $V_n : 2n + 1$, (wenn V_n der Laplaceschen Differentialgleichung genügt).

Um die säkulare Veränderung des erdmagnetischen Hauptfeldes zu erfassen, studieren wir die Lage der Maxima, Minima und auch der Sattelpunkte der durch Flächen über der Einheits-Kugel dargestellten Funktionen V_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Die Werte der Maxima von V_6 sind nur ein kleines Vielfaches der Größenordnung der Fehler, die wir als möglich zulassen müssen. Hierbei zeigen sich einige Unregelmäßigkeiten. Bei den übrigen ist die Zahl der Maxima gleich der Zahl der Minima und zwar gleich $n - 1$, mit Ausnahme $n = 1$; V_1 hat ein Maximum und ein Minimum und keinen Sattelpunkt. Die Anzahl der Sattelpunkte der übrigen V_n , $n = 2, 3, 4, 5$, ist gleich der Anzahl der Parameter von V_{n-2} , also gleich $2n - 3$.

Es ist ein Wort der Rechtfertigung notwendig, daß wir die säkulare Veränderung jeder der Flächen V_n für sich studieren. Man findet sie, wenn man die mittlere Energiedichte des Feldes, das zu $a \cdot V_n$ gehört, berechnet. Vor einigen Jahren habe ich die Formel abgeleitet:

$$(3) \quad \bar{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n, \quad \bar{e}_n = \frac{(n+1)}{8\pi} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] = \frac{1}{8\pi} (n+1)(2n+1) \bar{V}_n^2$$

im Gauß'schen Maßsystem mit $h_n^0 \equiv 0$ und $\bar{V}_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} V^2 d\omega$.

Dabei wird über dem vollen Raumwinkel ω (die Einheitskugel E.K.) integriert. Die Formel folgt aus den Mittelwerten

$$(4) \quad \bar{X}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} X^2 d\omega, \quad \bar{Y}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} Y^2 d\omega, \quad \bar{Z}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} Z^2 d\omega$$

der Komponenten des magnetischen Feldvektors in der folgenden Weise:

$$\bar{Z}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]$$

$$\bar{Y}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n 2m [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n$$

$$[g_{\nu}^m g_n^m + h_{\nu}^m h_n^m] m \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} (1 - (-1)^{\nu+n+1})$$

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \left[\frac{4n(n+1)}{2n+1} - 2m \right] - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n$$

$$[g_{\nu}^m g_n^m + h_{\nu}^m h_n^m] m \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} (1 - (-1)^{\nu+n+1})$$

Es gilt nach der Ausgleichung von P. Mauersberger [4] der bisher vorliegenden Potentialentwicklungen:

Tabelle 1

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3	\bar{e}_4	\bar{e}_5	\bar{e}_6	$\bar{e}_{\nu m} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \cdot 10^3$
1850	8,5554	0,1206	0,0850	0,0239	0,0091	0,0014	
1950	7,6331	0,1951	0,1124	0,0451	0,0055	0,0032	

In der überragenden Größe der Energiedichte des Dipols scheint sich die Tatsache auszudrücken, daß das erdmagnetische Hauptfeld ein Produkt der Erdrotation ist. Sie ist noch immer im Abnehmen begriffen, während die übrigen Multipole bis auf V_5 an Energiedichte zunehmen. Genauere Angaben siehe Abb. 1 und 2.

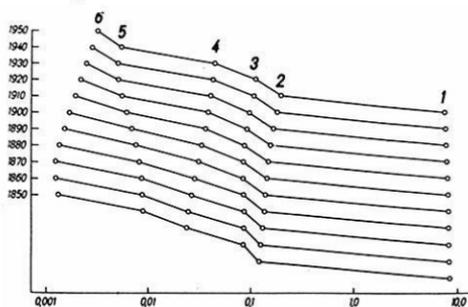


Abb. 1: Die mittleren Energiedichten für die Abschnitte der Potentialentwicklungen V_1 bis V_6 als Funktion der Zeit. Die Energiedichten sind im logarithmischen Maßstab aufgetragen. \bar{e}_1 ist gegenüber \bar{e}_2 um 10 Jahre zurückversetzt, entsprechend \bar{e}_2 gegenüber \bar{e}_3 usw. fort.

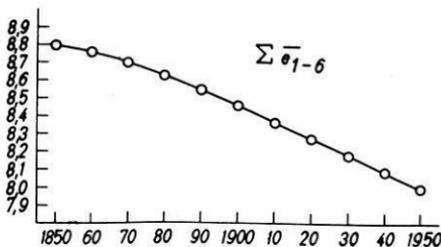


Abb. 2: Die mittlere Energiedichte der Multipole 1 bis 6 als Funktion der Zeit.

Die Abschnitte der Potentialentwicklungen haben ferner deshalb eine gewisse selbständige Bedeutung, weil die elektrischen Ströme, die wahr-

scheinlich die dazugehörigen Felder erzeugen, auf den kugelförmigen Erdkern mit dem Radius $a_1 = 3472 \pm 4$ [km] beschränkt sind.

Die genaue Auswertung zeigt, daß die Extrempunkte des Dipols und Quadrupols in den letzten 100 Jahren Wege beschrieben haben, deren sphärische Koordinaten im wesentlichen monotone Funktionen der Zeit sind. Bei den höheren Multipolen kommen auch schleifenförmige Wege vor. Beispiele sind in den Abbildungen 3, 4, 5, 6 zu finden. Wenn man nur die

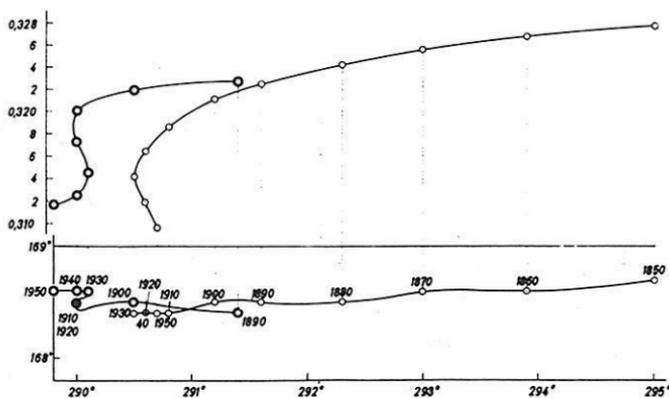


Abb. 3: Darstellung des Dipols als Funktion der Zeit.

Westwärtswanderung der Extremwerte betrachtet, erhält man folgende Daten:

Tabelle 2

V_1 (Dipol)	+ $4,5^\circ$
V_2 (Quadrupol)	+ $24,5^\circ$
V_3 (Oktupol)	+ $9,4^\circ$
V_4 (12er Pol)	+ 8°
V_5 (16er Pol)	- 50°

Wir haben einen Teil der Rechnungen auch nach den Unterlagen durchgeführt, die in [6] zu finden sind und haben befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach [4] gefunden. Man kann sich vorstellen, daß als Ergebnis der Übereinanderlagerung dieser Westwärtswanderungen der Wert von *E. C. Bullard* herauskommt, während der von *E. H. Vestine* als zu groß erscheint.

Das Problem, die Extremwerte der Formen n -ter Ordnung zu finden, führt zu der Aufgabe, ihre Hauptachsen zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe bei quadratischen Formen ist lange bekannt. Formen höherer Ordnung scheinen wenig bearbeitet zu sein. Als ein Ergebnis soll erwähnt werden, daß man die Formen V_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$, darstellen kann.

$$(5) \quad V_n = \sum_{\nu=1}^{n'} c_{\nu}^{(n)} P_n(\cos \Theta_{\nu})$$

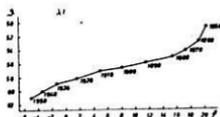


Abb. 4: Die Lage des Pols P_1 (λ_1) des Quadrupols als Funktion der Zeit.

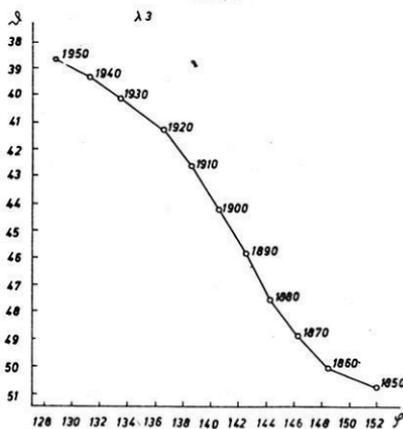


Abb. 5: Die Lage des Pols P_3 (λ_3) des Quadrupols als Funktion der Zeit.

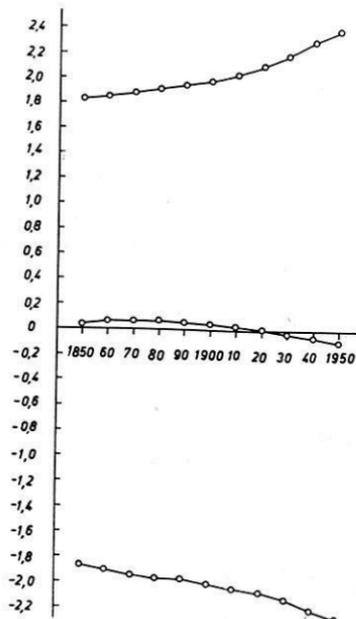


Abb. 6: $c_{\nu}^2 (1, 2, 3) = 2/3 \lambda_{\nu}^2$ in $[8 \cdot 10^3]$ als Funktion der Zeit. $\lambda_{\nu}^2 (1, 2, 3)$ sind die Eigen-Werte des Quadrupols.

Tabelle 3

Zu n	= 2	3	4	5	...	gehören
n'	= 3	7	11	15	...	Achsen; von diesen sind
n''	= 2	4	6	8	...	Achsen von Extremwerten,

die übrigen sind Achsen der Sattelpunkte. Die graphischen Darstellungen von V_n legen gewisse Konfigurationen der Achsen nahe. Sie schneiden z. B. für den Quadrupol auf der Einheitskugel die Ecken eines Oktaeders, für den Oktupol die Ecken eines Rhombendodekaeders aus. Wenn man die Achsen der Extremwerte für V_4 betrachtet, so schneiden sie auf der Einheitskugel die Ecken einer 6-eckigen Säule aus; zu jeder ihrer rechteckigen Seitenflächen gehört außerdem eine Sattelpunktsachse, zu jeder ihrer beiden Deckflächen, gehören je 2 Sattelpunktsachsen. Die $c_\nu^{(n)}$ Werte sind nicht sämtlich freie Parameter, sie genügen für n

$$n = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

$$m' = 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots \quad \text{Bedingungen, die mit der Zahl der}$$

Sattelpunkte übereinstimmen. Man bilde

$$n' - m' = 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots \quad (\text{Anzahl der Extremachsen})$$

$$+ 3 = 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad \dots \quad \text{und addiere 3, dann erhält man die}$$

Anzahl der freien Parameter von V_n . Die $c_\nu^{(n)}$ hängen mit den Eigenwerten von V_n , (mit ihren Extremwerten) zusammen.

Man kann sich jeden Teil $c_\nu^{(n)} P_n(\cos \Theta_\nu)$ als durch ein einfaches Stromsystem entstanden denken, das an der Oberfläche des Erdkerns fließt.

Tabelle 4

Dipol	$\tilde{j}_\phi^{(1)}$	$= \frac{d a^3}{\text{Vol}(a_1)} \sin \theta$	$\tilde{j}_{\phi_m}^{(a)} = 4,493$ [Amp cm ⁻¹]	für 1950
Quadrupol	$\tilde{j}_{\phi_i}^{(2)}$ $i = 1, 2, 3$	$= \frac{5 a}{4 a_1} \frac{a^3 c_i^{(2)}}{\text{Vol}(a_1)} \sin 2 \theta,$		
		Pol 1 Pol 2 Pol 3		
		$\tilde{j}_{\phi_{m_i}}^{(2)} : 0,785 \quad 0,025 \quad 0,760$ [Amp cm ⁻¹]		
		$c_i^{(2)} = \frac{2}{3} \lambda_i^{(2)}$ (Eigenwert)		
Oktupol	$\tilde{j}_{\phi_i}^{(3)}$	$= \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} \frac{a^2}{a_1^2} \frac{a^3 c_\nu^{(3)}}{\text{Vol}(a_1)} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{10} \right) \sin \theta$		
				$\text{Vol}(a_1) = \frac{4}{3} \pi a_1^3$

Allgemein gehört zu V_n ein Stromsystem

$$\tilde{j}_{\phi_i}^{(n)} \sim f_{n-1}(\cos \theta) \sin \theta,$$

wobei $f_{n-1}(\cos \theta)$ ein Polynom $(n-1)$ ten Grades ist ³⁾.

Diese Veranschaulichungen erscheinen uns einleuchtender als die, die *H. G. Macht* für den exzentrischen Dipol gegeben hat [2]. Sie gewinnen eine gewisse Berechtigung, wenn man den Skineneffekt der relativ schnell sich ändernden elektrischen Ströme betrachtet. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die Materie des Erdkerns sich gegenüber der Kruste in Ruhe befindet.

Zu b)

E. C. Bullard [3] hat überzeugend gezeigt, daß die elektrischen Ströme, die das erdmagnetische Hauptfeld erzeugen, durch Konvektionsströme der Materie des Erdkerns unterhalten werden. Der mit ihnen verbundene Wärmestrom braucht nur etwa 1/10 der Wärmestromdichte zu haben, die von den radioaktiven Gesteinen der Erdkruste stammt. $\left(1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}\right)$. Es

wird für möglich gehalten, daß im festen inneren Erdkern, mit seinem schwachen Gravitationsfeld, der Differenzierungsprozeß, der die radioaktiven Elemente in die Erdkruste beförderte, nicht im gleichen Maße wirksam war wie im äußeren Erdkern und im Erdmantel. Diese Annahme wird durch thermochemische Betrachtungen weniger gestützt als die, daß der Differenzierungsprozeß Silikat-Eisen im äußeren Erdkern noch anhält und zu Konvektionsströmungen Anlaß gibt [13]. Das Vorhandensein von Konvektionsströmungen im äußeren Erdkern scheint die *erste notwendige Voraussetzung* für die Existenz des erdmagnetischen Hauptfeldes zu sein.

Die zweite ist das Vorhandensein einer genügenden elektrischen Leitfähigkeit. Aus verschiedenen Überlegungen ergibt sich

$$\kappa_0 = (1 \div 4) \cdot 10^3 [\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}] = (1 \div 4) 10^{-6} [\text{e m E}],$$

wahrscheinlich 1/10 der Leitfähigkeit flüssigen Eisens bei 3000°K. Man erhält diese Leitfähigkeit auf theoretischem Wege nach *H. Miki* [5] aus einer bekannten Formel der statistischen Mechanik, wenn man für die Leitungselektronen genügend wenig besetzte Energiebänder annimmt.

3) Weitere Angaben über die Analyse der vorliegenden Potentialentwicklungen siehe: Probleme der Geophysik, herausgegeben von G. Fanselau, Magnetismus III, Kapitel 11: Veränderungen des erdmagnetischen Hauptfeldes ... von O. Lucke. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (im Druck).

Man kommt zu dieser Auffassung, wenn man von der Hypothese von *W. H. Ramsey* ausgeht, wonach das Material des Erdkerns nichts anderes ist als eine metallische Phase des Minerals Olivin. Über die Einwände hinaus, die *Fr. Birch* [7] gegen die *Ramseysche* Hypothese gemacht hat, wäre es schwer zu verstehen, inwiefern ein Ionenkristall metallischen Charakter bekommen könnte. Um "freie" Elektronen zu postulieren, müßte man schon annehmen, daß die abgeschlossene L-Schale des Sauerstoffions O^{2-} vollkommen zerquetscht würde, d. h., daß am Rande von O^{2-} die potentielle Energie des Kernfeldes neben der kinetischen Energie der Elektronen verschwinden würde. In der Physik der hohen Drucke von $10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$,

die etwa 130 mal größer sind als die Drucke im Erdkern, benutzt man zweckmäßig das *Thomas-Fermi* statistische Modell des Atoms [20], das das Kernfeld berücksichtigt, so daß man die *Ramseysche* Hypothese für Drucke von $10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ kaum zulassen kann.

Um einen Einblick in die chemische Zusammensetzung der Erde zu bekommen, kann man folgendermaßen argumentieren. In der Tabelle 4 sind die 16 häufigsten Elemente des Kosmos aufgeführt und zwar mit Ausnahme von ${}^1_1\text{H}$ und ${}^2_1\text{D}$ die Summe über alle Isotopen, relativ zu 100 Si-Atome.

Tabelle 4

Die häufigsten Elemente des Kosmos \odot , der Tiefengesteine $[]$ und der Meteorite $\langle \rangle$ nach [14]

a) Kosmos

\odot							
${}^1_1\text{H}$	He	O	Ne	N	${}^2_1\text{D}$	C	Si
$4,00 \cdot 10^6$	$3,08 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^3$	860	660	570	350	100
$\langle \rangle$							
Mg	Fe	S	A	Al	Ca	Na	Ni
91,2	60	37,5	15	9,48	4,9	4,38	2,74

b) Tiefengesteine

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
0	Si	Al	Na	Ca	Fe	Mg	K
296	100	30,5	12,4	9,17	9,13	8,76	4,42
③	⑦	⑫	⑭	⑬	⑨	⑧	

c) Meteorite

<1>	<2>	<3>	<4>	<5>	<6>	<7>	<8>
O	Si	Fe	Mg	S	Al	Ca	Ni
347	100	89,1	87,2	11,4	8,79	5,71	4,60
③	⑧	⑩	⑨	⑪	⑬	⑭	⑯

Außerdem sind in Tabelle 4 die 8 häufigsten Elemente der Tiefengesteine und der Meteorite aufgeführt. Wenn man die Reihen für den Kosmos und die Tiefengesteine vergleicht, kommt man zu dem Schluß, daß die chemische Zusammensetzung der Erdkruste, von den Sedimentgesteinen abgesehen, das Ergebnis zweier wesentlicher Prozesse in der Entwicklung der Erde ist.

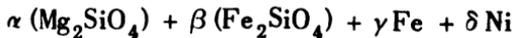
1. Der erste Prozeß besteht in einer starken Entgasung des Protoplaneten "Erde", der ursprünglich wohl die kosmische Verteilung der Elemente und eine etwa 1000-fache Masse der jetzigen Erde aufwies. Nach *G. P. Kuiper* [15] begann der Entgasungsprozeß, als die Sonne schon so weit kondensiert war, daß sie ihre volle Leuchtkraft erreichte, die Gravitationsfelder der Protoplaneten aber noch schwach entwickelt waren. Dabei sind nicht nur Wasserstoff, Stickstoff und die Edelgase flüchtig geworden, sondern auch andere Elemente wie Schwefel und Kohlenstoff, die bei hinreichender Kondensation des Protoplaneten und einer Erwärmung bis zu einigen 1000°K gasförmige Verbindungen wie CH_4 , H_2S , NH_3 usw. bildeten. Genaueres siehe *H. C. Urey* [16]. Die chemische Zusammensetzung der inneren Planeten kann man als die von Schlacken dieses Prozesses ansehen. Es ist zu bemerken, daß der geschilderte Prozeß kaum relativ so seltene Elemente wie Al, Na und K in dem Maße in der Erdkruste anreichern konnte, wie aus Tabelle 4b hervorgeht.

2. Der zweite Prozeß besteht darin, daß die flüssige Materie des Erdkörpers mit einer Temperatur von einigen 1000°K sich in der Weise zu differenzieren versucht, wie es dem Minimum der freien Enthalpie (dem *Gibbsschen Potential*) entspricht. Der Prozeß dürfte eine gewisse Ähnlichkeit mit der Schichtung der Schmelzen in einem Hochofen aufweisen. Man darf annehmen, daß er noch nicht völlig abgeschlossen ist.

Weil eine Thermodynamik der Materie unter Drucken von der Größenordnung $10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ noch in den Anfängen steckt, bedeuten die Verhältnisse

in den Meteoriten eine starke Stütze dieser Ansicht [13]. Schon *Farrington* [17] hat eine Reihe von Gründen angegeben, weshalb die Meteoriten als Bruchstücke eines Planeten angesehen werden müssen. Allein die Tatsache, daß es, wenn man die selteneren Troilite (FeS) unterschlägt, in der Hauptsache zwei Arten von Meteoriten gibt, die Steinmeteorite (Silikate, Aerolite) und die Eisenmeteorite (Siderite), spricht für einen Differenzierungsprozeß in einem, vielleicht kleineren, Planeten. Darüber hinaus ist es *Reasbeck* und *Mayne* gelungen [18], das Alter der festen Aerolite zu $(2 \div 3) \cdot 10^9$ Jahre, das der festen Siderite zu $3 \cdot 10^8$ Jahre zu bestimmen. Ferner haben die Arbeiten von *Herb. H. Uhlig* [19] gezeigt, daß die *Widmannstättenschen* Figuren der Eisenmeteorite durch den Übergang der γ -Phase des Eisens (mit kubischflächenzentriertem Gitter) in die α -Phase (mit kubischraumzentriertem Gitter) bei hohem Druck und Temperaturen über 300°K entstehen. Der Prozeß ging bei zunehmender Abkühlung immer weiter vor sich. Da das kubischraumzentrierte Gitter nicht so dicht gepackt ist wie das kubischflächenzentrierte, mußte die Spannung im Kern des Planeten wachsen, bis er zersprang. Davon sprechen die *Neumannschen* Bänder, die, wie sich experimentell zeigen läßt, die Spuren von Stoßwellen im Material sind.

Man muß also schließen, daß die inneren Planeten einem Differenzierungsprozeß unterlagen, der einen Silikatmantel von einem Kern trennte, der mehr oder minder aus metallischen Eisen besteht. Die weitere Differenzierung, die zur Bildung der Erdkruste führte, soll hier nicht betrachtet werden. Die Häufigkeit der Elemente, die in der Hauptsache die inneren Planeten bilden, muß deshalb durch Tabelle 4 c gegeben werden. Man kann schließen, daß O, Mg, Fe und Si die hauptsächlichsten Elemente sind, die den Erdball aufbauen und daß sie in Form von $(\text{Mg}, \text{Fe})_2\text{SiO}_4$, metallischem Eisen (und etwas Nickel) vorkommen. Wir machen also den Ansatz



für die chemische Zusammensetzung der Erde und setzen

im Erdmantel $6371 \text{ km} \geq r \geq 3473 \text{ km}$. $\gamma = \delta = 0$

im äußeren Erdkern $3473 \text{ km} > r > 1250 \text{ km}$

Modell I $\beta = \delta = 0$

Modell II $\alpha = \delta = 0$

im inneren Erdkern $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Diese Annahmen werden durch eine Arbeit von *L. Knopoff* und *R. Uffen* [8] (Siehe Abb. 7) nahegelegt. Die Abb. 7 enthält die Zustandskurven der obengenannten Bestandteile im (p, ρ) -Diagramm bei $T = 0^\circ\text{K}$ als Extrapolationen der von *P. Bridgman* gemessenen Werte, extrapoliert mit Hilfe der Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen von *Birch-Murnaghan*, die sich den (p, ρ) -Diagrammen des *Thomas-Fermi*-Modells bei $p \approx 10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ asymptotisch nähern. Außerdem ist in Abb. 7 die von *K. Bul-*

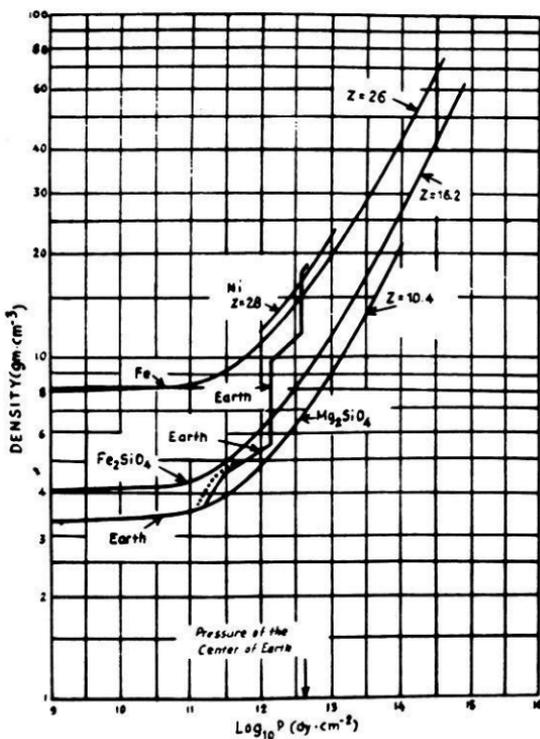


Abb. 7: Die Zustandskurven der hauptsächlichsten chemischen Verbindungen und metallischen Elemente des Erdkörpers im (p, ρ) Diagramm.

len berechnete Druck-Dichtekurve für das Innere der Erde (Modell A) [21] enthalten. Die punktierte Kurve soll ihre Reduktion von einer noch zu besprechenden Temperaturverteilung auf 0°K darstellen. Wir haben nach den Ansätzen der genannten Arbeit von *Knopoff* und *Uffen* die α , β , γ , δ -Werte ausgerechnet und erhalten die Werte der Tabelle 5

Tabelle 5

Tiefe	α		
0,300 · 10 ³ km	1,00		
0,413	0,637		
0,60	0,030		
0,80	0,017		
1,00	0,299		
1,40	0,33		
2,00	0,58		
2,40	0,71		
2,898	0,83		
		Modell I	Modell II
		α	β
2,898		0,23	0,49
3,4		0,16	0,53
4,0		0,22	0,46
4,4		0,27	0,55
4,980		0,29	0,43
5,12		0,27	0,44

Bemerkenswert ist die starke Abnahme des Forsteritsgehaltes in der Schicht zwischen 400 ÷ 1000 km Tiefe, die mit *H. Jeffreys* 20° Diskontinuität der Erdbebenwellen zusammenhängt.

Y. Shimazu [22] kommt zu demselben Ergebnis auf Grund thermodynamischer Betrachtungen unter der Annahme, daß das thermodynamisch-chemische Gleichgewicht im Erdmantel erreicht ist.

Die α , β , γ , δ -Werte als Funktion des Radius setzen uns in die Lage, die chemische Zusammensetzung der Erde zu berechnen. Man erhält in Massenanteilen die Werte der Tabelle 6.

Tabelle 6

	Modell I	Modell II	Meteorite (n. <i>Urey</i>)
O	27%	26%	35%
Fe	41%	43%	23,8%
Si	11%	11%	17,8%
Mg	10%	9%	13,5%
	89%	89%	90,1%
Ni	2%	2%	1,9%
	91%	91%	92,0%

Die restlichen 9% stellen die Masse der Erdkruste dar.

In der Erde ist offenbar zu wenig Mg_2SiO_4 vorhanden. Das kann in der Natur der Sache liegen oder seinen Grund darin haben, daß von einer bestimmten Tiefe ab, etwa in der Schicht zwischen 400 und 1000 km Tiefe, der Olivin zu einem kubischen Spinellkristallgitter übergeht. Die Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit bei 400 km Tiefe von 10^{-5} [$\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] auf 10^{-2} [$\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] und andere Gründe würden dafür sprechen [23]. Die vorstehend erwähnten Rechnungen wären dann zu modifizieren.

Die Temperaturen im Erdinneren habe ich wie üblich unter der Annahme berechnet, daß sowohl im Erdkern als auch im Erdmantel Konvektionen vorkommen und daß dort das Temperaturgefälle das adiabatische wenig übersteigt. Die Annahme wird gestützt, wenn man die Schmelzpunkttemperaturen auf Grund der *Lindemann-Gilvarryschen* Theorie [9] neu berechnet. Diese Theorie setzt die mittlere Amplitude der thermischen Schwingungen der Atome beim Schmelzpunkt proportional der Entfernung der nächsten Nachbarn im Kristall-Gitter. Man nimmt allgemein an, daß das Eisen des äußeren Erdkerns in der δ -Phase, das des inneren in der γ -Phase kristallisiert. Um den Dichtewerten von *K. E. Bullen* gerecht zu werden, habe ich zusätzlich angenommen, daß der innere Erdkern aus Nickel (das in der γ -Phase kristallisiert) besteht. Es ist klar, daß ein Wechsel des Kristallsystems die Höhe der Schmelzpunkttemperatur beeinflußt. Die *Gilvarrysche* Theorie scheint den Rechnungen von *Jacobs* und *Simon* überlegen zu sein. Meine vorläufigen Ergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt ⁴⁾.

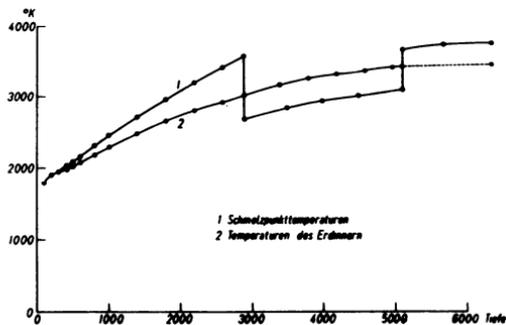


Abb. 8: Die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers.

⁴⁾ Mit einer aktuellen Temperatur von $T_0 = 3000^\circ\text{K}$ an der Grenze zwischen Erdkern und -mantel liegt die vorgeschlagene Temperatur in der Mitte zwischen $T_0 \approx 4600^\circ\text{K}$ [J. J. Gilvarry: Temp. in the earth's interior. J. Atm. Terr. Physics Vol. 10, No. 1 S. 24 (1957)] und $T_0 \approx 2500$ [J. Verhoegen: Thermal expansion of Solids and the Temp. at the Boundary of the core. Trans. Atm. Geophys. Union, Vol. 36, No. 5, S. 866 (1955)], während J. A. Jacobs $T_0 = 3600^\circ$ erhält. [J. A. Jacobs: The earth's interior im Hdb. d. Physik, Bd. XLVII, Geophysik I, herausgegeben von J. Bartels, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956].

Die Theorie der elektrischen Leitfähigkeit im gesamten Erdkern ist nach den soeben dargelegten Ergebnissen die der Übergangsmetalle Eisen und Nickel bei Temperaturen von etwa 3000°K und den Drucken von mehr als $1 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$. Es erscheint möglich, die bisherigen Ergebnisse der

Theorie auf Grund des Bändermodells dieser Metalle auszudehnen und H. Mikis Ansatz zu sichern.

Eine dritte notwendige Voraussetzung für die Existenz des erdmagnetischen Hauptfeldes ist wahrscheinlich die, daß die Erde rotiert.

Eine einfache Unterscheidung kann man in der folgenden Weise gewinnen. Man kann nach E.C. Bullard ([31] S. 110) den Wärmestrom, der aus dem Erdkern an die Oberfläche der Erde gelangt, günstigstenfalls zu $0,3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$ annehmen. Davon kann die Hälfte

als die Kondensations- und Schmelzwärme des Silikats an der Oberfläche des Erdkerns angenommen werden, während die andere Hälfte aus dem Wachstum des inneren Erdkerns stammen dürfte. Wenn man $1,5 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$ in erg für die obersten Schichten des

äußeren Erdkerns ausdrückt, erhält man $\frac{6,3}{(0,547)^2} = 19 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$. Diese Energiestrom-

dichte erhält man auch, wenn man das Wiedemann-Franzsche Gesetz [S. Chapman and T.G. Cowling: The math. Theory of nonuniform gases, Cambridge 1953, S. 316] in der folgenden Weise benutzt. Die Wärmeleitfähigkeit ist: $\kappa_{\omega} = 2,44 \cdot 10^{-1} T \cdot \kappa_e \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$,

wenn T [°K] und κ_e [$\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$] gegeben sind. $\kappa_e = 3 \cdot 10^3$ [$\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$]. $\vec{j}_{\omega} = \kappa_{\omega} \frac{\partial T}{\partial r} = 0,244 \cdot \kappa_e T \frac{\partial T}{\partial r} = 0,73 \cdot 10^3 T \frac{\partial T}{\partial r}$.

Für die vom Verfasser vorgeschlagene Temperaturverteilung ergibt sich $T = 3000^{\circ}\text{K}$, $\frac{\partial T}{\partial r} = 3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{^{\circ}\text{K}}{\text{cm}} \right]$

$$|\vec{j}_{\omega}| = 7 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$$

für die von J. Gilvarry errechnete dagegen

$$T = 4600^{\circ}\text{K}, \frac{\partial T}{\partial r} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\frac{^{\circ}\text{K}}{\text{cm}} \right]$$

$$|\vec{j}_{\omega}| = 34 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$$

Die wirkliche Temperaturverteilung scheint mehr der des Verfassers zu ähneln, aber etwas größere Werte aufzuweisen, während die von J. Gilvarry zu große Werte liefert, wenn nicht die elektrische Leitfähigkeit $\kappa_e = 3 \cdot 10^3$ [$\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$] zu hoch angenommen wird.

Verschiedene Autoren (ich nenne *H. Takeuchi* und *Y. Shimazu* [24] und *E. C. Bullard* und *H. Gellman* [25]) haben versucht, unter Annahme konstanter elektrischer Leitfähigkeit und geeigneter Randbedingungen im Erdkern die Existenz des erdmagnetischen Hauptfeldes im Sinn einer Dynamotheorie aus den hydromagnetischen Differentialgleichungen heraus zu beweisen. Die hydromagnetischen Differentialgleichungen sind eine Kombination der *Maxwellschen* Gleichungen für mäßig bewegte leitende Materie mit den *Eulerschen* Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

$$(5a) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathfrak{F} + [\mathbf{j} \times \mathfrak{B}] - 2\rho [\vec{\Omega} \times \mathbf{v}] + \nabla \cdot \mathfrak{S}$$

S = Spannungstensor

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(5b) \quad [\nabla \times \mathfrak{E}] = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad [\nabla \times \mathfrak{H}] = \vec{j}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathfrak{D} = \rho_e \quad (\text{el. Raumladungsdichte})$$

$$\vec{j} = \kappa_e (\mathfrak{E} + [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}])$$

Bei den hier zu betrachtenden Feldern kann man den Verschiebungsstrom \mathfrak{D} und den Konvektionsstrom $\rho_e \mathbf{v}$ vernachlässigen [10], [27]. Das System der elektromagnetischen Gleichungen kann man zu dem folgenden zusammenfassen:

$$(6) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}] + \nu_m \nabla^2 \mathfrak{B}$$

mit $\nu_m = \frac{1}{\mu \kappa_e}$, nach *Elsasser* [10] die magnetische Zähigkeit genannt.

Das Problem der Entstehung des erdmagnetischen Feldes fordert eine großräumige Betrachtung. Wir formen deshalb um:

$$(6a) \quad [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}]] = (\nabla \cdot \{ \mathfrak{B} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathfrak{B} \})$$

$\mathfrak{B} \circ \mathbf{v}$ ist das tensorielle Produkt von \mathfrak{B} und \mathbf{v} , $\mathbf{v} \circ \mathfrak{B}$ dasjenige von \mathbf{v} und \mathfrak{B} . In der geschweiften Klammer von (6a) befindet sich der antisymmetrische Teil von $[\mathfrak{B} \circ \mathbf{v}]$. Wir wenden auf die umgeformte Gleichung

$$(6) \text{ den Operator } \bar{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} f(\mathbf{r}, t + \Theta) d\Theta \text{ an, wobei } t_0 \text{ von der}$$

Größenordnung von 1 – 10 Tagen aus noch zu besprechenden Gründen sein soll.

Man erhält bei konstant angenommenem ν_m

$$(6b) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathfrak{B}}]] + \nu_m \cdot \{ \overline{\mathfrak{B}' \circ \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \circ \mathfrak{B}'} \} + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Wenn man kartesische Koordinaten einführt, $\mathfrak{B} = \{ B_i \}$, $i = 1, 2, 3$ und $\mathbf{v} = \{ v_k \}$, $k = 1, 2, 3$, so enthält die geschweifte Klammer Ausdrücke der Form $\overline{B'_i v'_k - B'_k v'_i} = m_{ik}^2(0) - m_{ki}^2(0)$, die also einen antisymmetrischen Tensor bilden. Die Produkte sind über das Zeitintervall t_0 gemittelt.

Eine bestimmte Kombination der Zusatzvektoren \mathfrak{B}' und $\mathbf{v}' B'_i v'_k$ ist nicht unabhängig von den vorangegangenen. Man kommt zu ihrer durchschnittlichen Lebensdauer auf statistischem Wege. Man glättet die statistische Verbindung der Wertevorräte B'_i und v'_k im Intervall t_0 , wenn man im Zeitpunkt t_1 die folgenden Integrale bildet.

$$B'_i(g) = \frac{1}{g} \int_0^g B'_i(t_1 + \theta_1) d\theta_1 \quad v'_k(g) = \frac{1}{g} \int_0^g v'_k(t_1 + \theta_2) d\theta_2$$

Nun bildet man wieder

$$\overline{B'_i(g) v'_k(g)} = m_{ik}^2(g)$$

und es gilt

$$m_{ik}^2(g) < m_{ik}^2(0)$$

Der Ausdruck

$$r_{ik}(g) = \frac{g m_{ik}^2(g)}{m_{ik}^2(0)}$$

würde nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für diskrete Wertevorräte (bei denen die Integrale durch Summen zu ersetzen wären), die keine Erhaltungstendenz haben, gleich eins sein. Das kann man für die physikalischen Größen \mathfrak{B}' und \mathbf{v}' nicht annehmen, schon weil wir sie als kontinuierliche Funktionen ansetzen müssen. Man wird also für $r_{ik}(g)$ Werte größer als eins erhalten. Wir postulieren nach dem Vorbilde von *J. Bartels* [28], daß die $r_{ik}(g)$ mit bis g_m wachsendem g , wobei $g_m < t_0$ bleibt, praktisch einem Grenzwert zustreben.

$$r_{ik}(g_m) \rightarrow r_{ik}(g_m) \equiv r_{ik}$$

$$g \rightarrow g_m$$

Diese Annahme setzt über die Struktur der strömenden Flüssigkeit voraus, daß die Turbulenzkörper (= einigermaßen homogene, laminar-strömende Bereiche) mit bestimmten Ausmaßen, die mit den τ_{ik} zusammenhängen, weit häufiger als die übrigen vorkommen. Innerhalb solcher Bereiche ist \mathbf{v}' und damit \mathbf{v} , weil sich \mathbf{v} räumlich (außerhalb von Grenzschichten) wenig veränderlich zeigen dürfte, einigermaßen konstant. Im allgemeinen wird gelten $|\mathbf{v}'| > |\mathbf{v}|$. Die Zeitdauer, in der sich der Aufpunkt r_a in einem solchen Bereich befindet, wird im Durchschnitt etwa von der Größenordnung der τ_{ik} sein. Während dieser Zeit wird sich die Dichte der Materie innerhalb des Bereiches wenig ändern, so daß auch der $\text{div } \mathbf{v} = 0$ angenommen werden kann. Im Inneren solcher Bereiche können an der Gleichung (6) einige Vereinfachungen vorgenommen werden. Wir schreiben sie:

$$(6c) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mathbf{v} \underbrace{(\nabla \cdot \mathfrak{B})}_0 + \underbrace{(\mathfrak{B} \cdot \nabla)}_0 \mathbf{v} - \mathfrak{B} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_0 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathfrak{B} + \nu_m \nabla^2 \mathfrak{B}$$

Die Elemente der lokalen Dyade $\{ \nabla \circ \mathbf{v} \}$ sind nach dem soeben Gesagten wenig von null verschieden, so daß auch der zweite Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Es erscheint daher vernünftig zu sein, den folgenden Ansatz zu machen:

$$(7) \quad \mathfrak{B}' = - \mathbf{v}' (\overline{\tau_{ik}}) \{ \nabla \circ \mathfrak{B} \}$$

Man erhält ihn, wenn man in (6c) zur Differenzgleichung übergeht. Die $\overline{\tau_{ik}}$ sind sicher kleiner als die soeben definierten τ_{ik} , weil das letzte Glied der Gleichung (6c) auf der rechten Seite ein Dämpfungsglied ist. Es wird $|\mathfrak{B}'| < |\mathfrak{B}|$ angenommen:

Wenn man mit dem Ansatz (7), der in Turbulenzkörpern des Erdinneren vom vertikalen Ausmaß von etwa 1 km sicher noch erlaubt ist, in (6b) ein- geht, erhält man

$$(8) \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathfrak{B}}]] - \nabla \cdot \mathfrak{A}'' \{ \nabla \circ \mathfrak{B} \} + \nu_m \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}},$$

$\mathfrak{A}'' =$ antimetr. Teil des kinemat. Austauschensors.

Wenn man noch annimmt, daß in Schichten gewissen Ausmaßes \mathfrak{A}'' eine räumlich konstante Größe ist, so erhält man, wenn man außerdem $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ setzt

$$(8a) \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathfrak{B}}]] - (\mathfrak{A}'' - \nu_m E) \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}}$$

E soll den Einheitstensor bezeichnen.

Man findet, daß in Gebieten, in denen der Austauschtensor ausgesprochen unsymmetrische Gestalt hat, also in der Nähe der Grenzschichten, die Wirkung des Dämpfungsgliedes, das für die Erzeugung der *Jouleschen* Wärme verantwortlich ist, kompensiert oder sogar überkompensiert werden kann. Mit anderen Worten:

Man könnte wahrscheinlich einen Verstärkermechanismus finden, der zum Aufbau großräumiger Magnetfelder führt, wenn in den Turbulenzelementen Zusatzfelder \mathfrak{B}' von einer nicht zu vernachlässigenden Größe vorkommen. Anfängliche äußerst schwache Magnetfelder sind immer vorhanden. Die Frage ist nur, ob sie durch einen Mechanismus, wie ihn wohl *G. K. Batchelor* [27] zuerst geschildert hat, so verstärkt werden können, daß sie als Vektor \mathfrak{B}' der Gleichung (8) angesehen werden können. Wir wollen diesen Mechanismus hier als "hydromagnetischen Effekt" bezeichnen. Er besteht darin, daß ein bedeutender Teil der Bewegungsenergie der turbulenten Strömung in die turbulenten Magnetfelder fließt. Dieser Effekt scheint im äußeren Erdkern nicht einzutreten. Sein Auftreten hat nach *G. K. Batchelor* als Voraussetzung (wegen des exakten Beweises siehe [26]), daß die "*Batchelorsche*" Kennzahl

$$(9) \quad B_a = \frac{\nu^*}{\nu_m} > 1 \quad \text{gilt.}$$

Es ist $B_a = 4 \pi \kappa_e \nu^*$, wenn $\mu' = 1$ ($\frac{\mu}{\mu_0} = \mu'$) und wenn die Leitfähigkeit in [e m E] und ν^* in [c g s]-Einheiten angegeben wird. $\nu^* = 1 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$ nach [5] und $\kappa_e \approx 1 \cdot 10^{-6}$ [e m E]. Auf keine Weise kann im Inneren der Erde der hydromagnetische Effekt eintreten. Man kann also die $\bar{\tau}_{ik}$ von \mathfrak{A}' sämtlich gleich null setzen, so daß die Gleichung (8a) sich auf die folgende reduziert:

$$(8b) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\bar{\mathfrak{v}} \times \bar{\mathfrak{B}}]] + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Die meisten Autoren sind der Ansicht, daß in Räumen mit den Ausmaßen des äußeren Erdkerns ein hydromagnetischer Effekt eintritt, obwohl das Spectrum von \mathfrak{B}' in den kleineren Dimensionen keine Werte hat. Um diese Ansicht klar zu machen, soll über die von (8b) dargestellten Vektorfelder eine erneute zeitliche und räumliche Mittelung über Räume mit den Ausmaßen von etwa $10 \div 100$ [km] vorgenommen werden. Die gemittelten Vektorfelder sollen durch einen doppelten Querstrich gekennzeichnet werden. In ihnen ist wahrscheinlich das Vorhandensein von Grenzschichten nicht mehr zu erkennen. Wir setzen voraus, was aber nicht vollständig erfüllt sein dürfte, daß gilt: $\text{div } \bar{\mathfrak{v}} = 0$, und erhalten, weil jetzt der Austauschtensor als symmetrisch angenommen werden kann,

$$(8c) \quad \frac{d \bar{\mathfrak{B}}}{dt} = (\bar{\mathfrak{B}} \cdot \nabla) \bar{\mathfrak{v}} + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt einen Vorgang, bei dem die Kraftlinien des ausgeglichenen Magnetfeldes durch die ausgeglichenen Bewegungen der Materie entweder gereckt oder gestaucht werden, so daß ihr Energieinhalt auf Kosten desjenigen der mechanischen Energie verstärkt wird, wenn die Energiedissipation der Magnetfelder durch Erzeugung Joulescher Wärme genügend schwach ist. Das ist der Fall, wenn nach *Batchelor*

$$(9a) \quad \frac{\bar{v} L}{\nu_m} >> 1 \quad \text{gilt.}$$

Man kann diese Größe auch als *Batchelorsche* Zahl auffassen in einer ausgeglichenen Strömung $\bar{\mathfrak{v}}$, bei der die Mittelwerte über Räume von den Ausmaßen $(a_1 - a_2)$, der radialen Erstreckung des äußeren Erdkerns, gebildet werden. Man kann sie deshalb auch schreiben

$$(9b) \quad \frac{\bar{v}^2 r}{\nu_m} >> 1$$

Solche turbulenten Schwankungen größten Ausmaßes sind wahrscheinlich im Erdinneren vorhanden. Man kann sie erstens aus den schönen Modellversuchen von *R. Hide* erschließen. Danach müßte eine Strahlströmung in einigen Mäandern (oder auch nur einer Schwingung) zwischen dem wärmpendenden inneren Erdkern und der Untergrenze des Erdmantels vorhanden sein. Man kann zweitens folgende Feststellung als Beweis für ihre Existenz ansehen:

Die irreguläre säkulare Änderung der Tageslänge kann man wahrscheinlich nur erklären, wenn man annimmt, daß sich die Zirkulationsströmung im äußeren Erdkern ändert [29].

Wenn der Erdkern ebenso starr wie der Erdmantel rotieren würde, wäre der Durchschnitt des Wirbelvektors

$$\bar{\omega}_d = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{\mathfrak{v}}_d,$$

über alle Flächen $R = r \sin \theta = \text{const}$, die im Inneren des Erdkerns liegen, genommen, konstant. Er ist indessen eine Funktion von R . Eine Zunahme der Konvektionsströmungen senkrecht zur Drehachse der Erde hat zur Folge, daß $\bar{\omega}_d$ in der Nähe des inneren Erdkerns zunimmt, in der Nähe des Erdmantels dagegen abnimmt. Er ist also eine monoton abnehmende Funktion

von R , die im Intervall zwischen $0 \leq R \leq a_1 \sin \theta$ einmal den Wert $\vec{\omega}_1$ annimmt, den der Erdkern haben müßte, wenn er wie eine starre Kugel rotieren würde.

Wir nehmen an, daß bei diesem konvektiven Austausch die Reibungswärme zu vernachlässigen ist und daß gilt:

$$(10) \quad \mathfrak{D}_{1m} = \int_{(E.K.)} (\mathbf{r} \times \vec{v}_d) dm = \text{Const}$$

dm = Massenelement,
(E.K.) = Erdkern,

wobei also vorausgesetzt wird, daß die Kopplung zwischen den Bewegungen des Erdkerns und denen des Erdmantels zu vernachlässigen ist. Wir können (10) auch schreiben:

$$(10a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D}_{1m} = 0 = \int_{(E.K.)} \vec{\omega}_d \cdot (R) ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{E} - \{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\}) dm = \int_{(E.K.)} \vec{\omega}_d \cdot dI_1 \\ = \vec{\omega} \cdot I_1$$

wobei R den Abstand von der Drehachse und I_1 die Trägheitsdyade des Erdkerns bezeichnen soll.

Wenn die zeitlichen Schwankungen von \mathfrak{D}_{1m} die Ursache der irregulären säkularen Schwankungen sein sollen, muß eine Kopplung zwischen den Bewegungen des Erdkerns und denen des Erdmantels vorhanden sein. Diese Kopplung kann, wie *S. K. Runcorn* ansetzt, mechanischer Natur sein; sie könnte auch, wie *E. C. Bullard* annimmt, elektromagnetischer Natur sein. Wir werden sehen, daß sich die *Bullardsche* Annahme kaum halten läßt, während die von *Runcorn* plausible Aussagen über den Austauschtensor der Strömungen des äußeren Erdkerns und damit über die Größe der Zusatzgeschwindigkeiten erlaubt.

Der gesamte Drehimpuls der Erde \mathfrak{D}_m setzt sich additiv zusammen aus dem des Erdkerns \mathfrak{D}_{2m} und dem des Erdmantels \mathfrak{D}_{3m} , und es muß gelten

$$(11) \quad \mathfrak{D}_{2m} \dot{} + \mathfrak{D}_{3m} \dot{} = 0$$

ganz abgesehen von der Kopplung und der sie charakterisierenden Relaxationszeit. Wir denken uns dabei, daß wir über Zeiträume gemittelt haben, die groß sind gegenüber der Relaxationszeit (etwa über einige Jahre). Das muß möglich sein, weil sonst ein detaillierter Verlauf der Änderung der Länge des Jahres (Abb. 9) nicht zu erwarten ist. \mathfrak{D}_{2m} ist nicht mit \mathfrak{D}_{1m} zu identifizieren. Es gelten nach (10 a) und (11)

$$(11a) \quad \bar{\bar{\omega}}_2 \cdot I_1 + \bar{\bar{\omega}}_3 \cdot I_3 = 0$$

und

$$|\bar{\bar{\omega}}_2| > |\bar{\bar{\omega}}_3|,$$

wegen der Reaktion des Erdmantels.

Wir interessieren uns hier nur für die axialen Komponenten $\bar{\bar{\omega}}_2$ und $\bar{\bar{\omega}}_3$ von $\bar{\bar{\omega}}_2$ bzw. $\bar{\bar{\omega}}_3$ und nehmen ferner an, daß die Rotationsachse eine Hauptachse der Trägheitsdyade ist. Für eine genügend kleine Zeiteinheit δt kann man dann für Gleichung (11 a) schreiben:

$$(11b) \quad \delta v_{\phi_{\mathfrak{A}}} \equiv a_1 \delta \bar{\bar{\omega}}_2 = - a_1 \delta \bar{\bar{\omega}}_3 \frac{I_{31}}{I_{11}}$$

wobei I_{31} und I_{11} die axialen Trägheitsmomente von Erdmantel bzw. Erdkern sind. Um ihr Verhältnis zu berechnen, nehmen wir ganz grob an, daß die Dichte ρ des Erdmantels eine konstante Größe und $3,5 \rho$ die Dichte des Erdkerns sei [31].

Dann ist

$$(11c) \quad \frac{I_{31}}{I_{11}} = \frac{1}{3,5} \left(\left(\frac{a}{a_1} \right)^5 - 1 \right) \approx 5,5$$

Ferner gilt

$$(11d) \quad \delta \bar{\bar{\omega}}_3 = - \frac{2\pi \delta r}{(8,54)^2 \cdot 10^8} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right], \quad \text{rad} = \text{Radiant},$$

wenn δr die Anzahl von Sekunden ist, die den mittleren Tag von 86 400 sec verlängern. $a_1 = 3,473 \cdot 10^8$ cm.

Wenn man (11c) und (11d) in (11b) einsetzt, erhält man für die Änderung der tangentialen Geschwindigkeit am Äquator des Erdkerns

$$(11e) \quad \delta v_{\phi_{\mathfrak{A}}} = + \frac{2\pi \cdot 3,473}{(8,64)^2} \frac{I_{31}}{I_{11}} \delta r \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right], \quad [\delta r] = [\text{sec}]$$

$$\delta v_{\phi_{\mathfrak{A}}} = 1,6 \delta r \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right],$$

wenn δr in Sekunden der Änderung der Tageslänge angegeben wird.

Nach Abbildung 9 können Änderungen der Länge des Jahres bis $\pm 1,9$ sec, also Änderungen der Länge des Tages bis $\pm 7 \cdot 10^{-3}$ [sec] vorkommen, das sind Geschwindigkeitsänderungen bis

$\delta v_{\phi_{\text{E}}} \approx \pm 1,1 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right] \approx \pm 0,11 \left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}} \right]$. Die Geschwindigkeit selbst kann um eine oder höchstens um zwei Größenordnungen größer sein. Wegen (11a), d. h. wegen der monotonen Abnahme von $\bar{\omega}_d(R)$ mit wachsendem R ist sie relativ zum Erdmantel ebenfalls nach Osten gerichtet. Ihre Richtung stimmt nicht überein mit den Richtungen an der Oberfläche des Erdkerns.

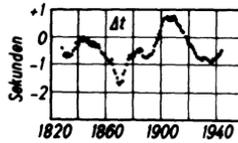


Abb. 9: Änderungen der Länge des Jahres in Sekunden als Funktion der Zeit.

Über die westwärtige Drift der Schichten am oberen Erdkernrand kann man Aufschluß erhalten, wenn man annimmt, daß der hydromagnetische Effekt für Strömungen großen Stils im Erdkern wirklich vorhanden ist. Die Gleichung (8c) mit zu vernachlässigendem v_m hat nämlich die Gestalt der Wirbelgleichung für reibungsfreie, kompressible Flüssigkeitsströmungen. Aus ihr muß sich also ein Analogon zu dem *Helmholtz*schen Wirbelsatz ableiten, das aussagen muß, daß die Materie an den magnetischen Kraftlinien haftet oder daß diese in die Materieströmung eingefroren sind. Dann kann man aus der westwärtigen Wanderung des erdmagnetischen Feldes von 18 ± 2 [°/100 Jahre] auf die Geschwindigkeit der Materie am Äquator des Erdkerns schließen.

$$v_{\phi_{\text{E}m}} = 0,34 \pm 0,04 \left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}} \right].$$

Diese Geschwindigkeit müßte mit den durchschnittlichen Bewegungen des Erdkerns zu tun haben, wenn das Eintreten des hydromagnetischen Effektes vorausgesetzt wird. Eine Verstärkung der Konvektion müßte sich in der Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes ausdrücken. Es müßte also eine Korrelation zwischen der Änderung der Tageslänge und den Wanderungen des erdmagnetischen Feldes bestehen. In Abb. 10 wurde versucht, die Änderungen der Stärke und der Lage des erdmagnetischen Dipols mit δr zu korrelieren. Auch die Lage und die Stärken des Quadrupols wurden mit δr korreliert und im Gegensatz zu *E. H. Vestine* kein von null verschiedener Korrelationskoeffizient gefunden. Die Größenordnungen der auftretenden Geschwindigkeiten sind aber so beschaffen, daß eine gegenseitige Beziehung zu erkennen sein müßte. Es ist allerdings zu bemerken, daß $v_{\phi_{\text{E}}}$ nach Osten, $v_{\phi_{\text{E}m}}$ nach Westen gerichtet ist. Ferner müßten, wenn

der hydromagnetische Effekt im Erdkern vorhanden wäre, alle Bewegungen in Ebenen senkrecht zur Rotationsachse verlaufen, worüber noch gesprochen werden wird. Die Analyse der Bewegungen des Magnetfeldes der Erde zeigt aber, daß besonders beim Quadrupolfeld auch meridionale Wanderungen vorkommen. Außerdem ist zu bemerken, daß die Konvergenz der Reihen, die *E. C. Bullard* und *H. Gellman* als Lösung des Problems gewinnen, unbefriedigend konvergieren⁵⁾.

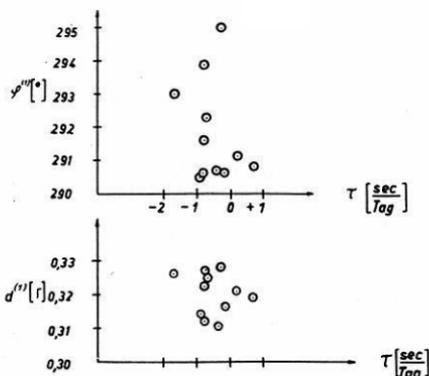


Abb. 10: Korrelationstabelle der Änderungen der Tageslänge und der Lage der Intensität des geomagnetischen Dipols.

Zu c)

Der Schluß, der aus den bisherigen Ausführungen zu ziehen ist, ist vielleicht der folgende:

Die Entstehung des erdmagnetischen Hauptfeldes beruht nicht auf dem

5) Zu dem selben Schluß gelangt man auf Grund einer neuen Arbeit von *H. Takeuchi*: The Dynamo theorie of the Earth' main magnetic field. *J. Phys. Earth* Vol. 4, No. 1, S. 11 (1956). Der Grund liegt wohl darin, daß die in den Dynamotheorien angenommenen Geschwindigkeitsverteilungen nicht den wirklichen Verhältnissen entsprechen. Eine andere Fassung der Induktionstheorie stammt von *E. N. Parker*: Hydromagnetic Dynamo modells *Ap. J.* 122 S. 293 (1955). Siehe auch [10]. Danach entsteht das Dipolfeld durch eine Zyklonentätigkeit in den tieferen Schichten des Erdkerns. Das vorausgesetzt, wird es auch möglich, die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes auf dem Boden der Induktionstheorien zu verstehen. Siehe *H. Takeuchi* and *W. M. Elsasser*: Fluid motions near the earth's core boundary. *J. Phys. Earth* Vol. 2, S. 39 (1955), *W. M. Elsasser* und *H. Takeuchi*: Nonuniform rotation of the Earth and geomagnetic drift. *Trans. Am. Geophys. Union* Vol. 36, No. 4, S. 584 (1955) und Probleme der Geophysik, herausgegeben von *G. Fanslau*, Magnetismus III, 12. Kapitel: Ein Abriß der Physik des Erdinnern, hydromagnetische und andere Theorien des erdmagnetischen Hauptfeldes von *O. Lucke*. Dt. Verlag der Wiss. Berlin (im Druck).

hydromagnetischen Effekt und betrifft nicht den ganzen Erdkern. Das Feld entsteht vielmehr in einer sehr seichten Schicht an seiner Oberfläche. Dort wird noch eine Zirkulationsbewegung angenommen, die wesentlich größere Geschwindigkeiten als die bisher betrachteten aufweist. Sie muß zustande kommen, weil die großräumigen Konvektionsbewegungen im wesentlichen auf Ebenen senkrecht zur Rotationsachse der Erde beschränkt sind. Das folgt daraus, daß die Coriolis-Kraftdichten bei weitem die größten Kraftdichten auf der rechten Seite der erweiterten *Eulerschen* Gleichungen sind (*Taylor-Effekt*). Die Richtigkeit dieser Folgerung ist überall in den Atmosphären der Planeten und der Sonne bestätigt.

Die Konvektionsströmungen werden also Wärme am Äquator der Obergrenze des äußeren Erdkerns ansammeln. Dort wird auch der Transport von Impuls stattfinden. In der Grenzschicht des sehr scharfen Überganges zwischen Erdmantel und Erdkern sind die Reibungskräfte etwa von der Größenordnung der Coriolis-Kräfte. Dort kann sich eine seichte Zirkulation ausbilden, die den Wärmetransport zwischen dem Äquator und den Polen des äußeren Erdkerns besorgt. Sie ist außerhalb der Äquatorbereiche nach Osten und Norden bzw. Süden gerichtet und weist vielleicht nur ein Blatt (im Sinne *R. Hides*) auf. Wo das flüssige Metall an die Gesteine des Erdmantels grenzt, macht sich eine Art *Tolman-Effekt* bemerkbar, wie ihn Prof. *Lochte-Holtgreven* und Mitarbeiter an hochionisierten Plasmen studiert hat [12]. Die Elektronen des Materials folgen der Bremsung des Metalls in der Grenzschicht nicht. Wenn man Geschwindigkeiten von einigen cm/sec zuläßt, kommt nach einer einfachen Rechnung auf Grund der *Schlüterschen* Gleichungen für hochionisierte Plasmen ein genügend starker Effekt heraus. Er würde Stromelemente hervorbringen, die sich innerhalb der Turbulenzelemente nicht schließen, weil außerhalb der Grenzschicht Elektronen und Ionen die gleiche Geschwindigkeit haben. Sie würden zu großräumigen Magnetfeldern, wie es das Erdfeld eins ist, Anlaß geben. Man könnte auf diese Weise erklären, warum der Magnetpol der Erde nicht mit dem geographischen Pol übereinstimmt. Ferner könnte man einige Ergebnisse der Hydrodynamik der Atmosphären auf den äußeren Erdkern anwenden. Z. B. würde die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes, insbesondere die des Quadrupolfeldes, als Westwärtswanderung langer hydrodynamischer Wellen im Sinne von *Rossby* verstanden werden ⁶⁾.

⁶⁾ Die quantitative Begründung des Vorschlages mit Hilfe der Dynamik der Plasmen, deren Elektronengas entartet ist, stößt auf Schwierigkeiten, solange nicht Geschwindigkeiten von $10 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$ und mehr und eine ostwärts gerichtete Zirkulation angenommen werden können. Da auch die anderen plasmatheoretischen Effekte zu schwach sind, um ein Feld wie das Dipolfeld der Erde zu erklären, (siehe D.R. Inglis: *Theories of the Earth's Magnetism*. Rev. Mod. Physics 27, No. 2, S. 212 (1955), erscheinen die Entwicklungen von E.N. Parker und W.M. Elsasser zur Zeit die besten Erklärungen für seine Existenz zu sein.

Literatur

- [1] Bullard, E. C. u. a.: Phil. Transact. Roy. Soc. 273, S. 67 (1950).
- [2] Macht, H. G.: Transact. Am. Geophys. Union 32, S. 555 (1951).
- [3] Bullard, E. C.: Proc. Roy. Soc. London 197, S. 433 (1949).
- [4] Mauersberger, P.: Abh. Nr. 5 des geophysik. Inst. Potsdam, (1952).
- [5] Miki, H.: J. Phys. of the Earth 1, S. 67 (1952).
- [6] Vestine, E. H.: J. of Geophys. Res. 58, S. 127 (1953).
- [7] Birch, Francis: J. Geophys. Res. 57, S. 227 (1952).
- [8] Knopoff, L. und Uffen, R. J.: J. Geophys. Res. 59, S. 471 (1954).
- [9] Gilvarry, J. J.: Phys. Rev. 102, S. 308 ff. (1956).
- [10] Elsasser, W. M.: Rev. Mod. Phys. 28, S. 135 (1956).
- [11] Hide, R.: Quarterly Journal of Roy. Met. Soc. London 79, S. 161.
- [12] Lochte-Holtgreven, u. a.: Die Naturw. 40, S. 387 (1953).
- [13] Urey, H. C.: Ann. d. Géophys. Tome II Nr. 1, S. 65 (1955).
- [14] Suess, H. E. and Urey, H. C.: Rev. Mod. Phys. 28, Nr. 1, S. 53 (1956).
- [15] Kuiper, G. P.: The origin of earth and planets, J. Geophys. Res. 61, Nr. 2, S. 398 (1956).
- [16] Urey, H. C.: Astrophys. J. Suppl. Ser. 1, S. 147 (1955).
- [17] Gutenberg, B.: Internal Constitution of the Earth, Dover Publ. 1951.
- [18] Reasbeck, P. u. Mayne, K. I.: Nature 176, S. 186 (1955).
- [19] Uhlig, H. H.: Geochim. et Cosmochim. acta Vol 6, S. 282 (1954), Vol 7, S. 24 (1955).
- [20] Gombás, P.: Die statist. Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Vol 7, S. 34 (1955), Wien 1949.
- [21] Bullen, K. E.: An introduction of the Theory of Seismology, Cambridge 1953.
- [22] Shimazu, Y.: The J. Earth Sciences, Nagoya Univ. 3, Nr. 2, S. 85 (1955).
- [23] Jeffreys, H.: The Earth, Cambridge 1952.
- [24] Takeuchi, H. u. Shimazu, Y.: J. Phys. Earth 2, 39 (1954).
- [25] Bullard, E. C. u. Gellman, H.: Phil. Transact. Roy. Soc. 247, 213 (1954).

- [26] *Lundquist, S.*: Arkiv för Fysik 5, Nr. 5, S. 297 (1953).
- [27] *Batchelor, S. K.*: Proc. Roy. Soc. (London) 201, S. 405 (1950).
- [28] *Bartels, J.*: Naturf. u. Medizin in Deutschland, Bd. 7, Teil V.
- [29] *Spencer-Jones, H.*: Hdb. der Physik, Bd. XLVII, Geophys. I., Herausgegeben von S. Flügge. Springer 1956.
- [30] *Runcorn, S. K.*: Transact. Am. Geophys. Union Vol. 35, S. 49 (1954).
- [31] *Kuiper, B. G.*: The Earth as a Planet, Chicago 1954, S. 94.