

Werk

Jahr: 1957

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:23

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0023

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0023

LOG Id: LOG_0034

LOG Titel: Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials (Fortsetzung)

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions. Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Asymptotische Formeln zur Bestimmung des von einer oder von mehreren Elektroden im geschichteten Boden hervorgerufenen Potentials

Von A. Belluigi, Rom ¹⁾

(Fortsetzung)

Teil II

Das erste Kapitel dieser Abhandlung beschäftigt sich mit der Umwandlung in explizite Form der in der vorhergehenden Arbeit (Teil I) gebrauchten Ausdrücke von der Type $[f]$ oder $[f0\zeta]$ für den Fall eines geschichteten Bodens, während das zweite Kapitel der Ableitung der auf die vorher erhaltenen Ergebnisse sich stützenden Äquivalenzgesetze gewidmet ist; das dritte Kapitel ist der Erweiterung der Äquivalenzformeln auf Böden mit Untergrund von ungleichmäßiger Leitfähigkeit gewidmet.

Kapitel 1. —

§ 1. Die Ausdrücke die wir in explizite Form bringen wollen sind die vier folgenden

$$[\sigma] = \int_0^a \sigma(x) dx, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)}, \quad \left[\sigma 0 \frac{1}{\sigma} \right] = \int_0^a \sigma(x) dx \int_0^x \frac{d\xi}{\sigma(\xi)},$$

$$\left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] = \int_0^a \frac{dx}{\sigma(x)} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi$$

Wir betrachten den Fall in dem der Boden, im Bereiche $(0, a)$, aus n -Schichten, von der Mächtigkeit h_i und Leitfähigkeit σ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) besteht. In allgemeinerer Weise betrachten wir vielmehr zwei Funktionen $f(x)$ und $\zeta(x)$ die in der $(i+1)$ -ten Schicht von der Mächtigkeit konstante Werte f_i und ζ_i annehmen. Wir bezeichnen außerdem mit a_i die

¹⁾ Prof. A. Belluigi, Leiter des Istituto di Fisica Terrestre an der Universität von Perugia, Italien.

Tiefe der $(i + 1)$ -ten Schicht, d. h. wir setzen

$$a_i = \sum_{k=0}^{i-1} h_k = h_0 + h_1 + \dots + h_{i-1}$$

Wie ersichtlich ist $a_0 = 0$ und $a_n = a$.

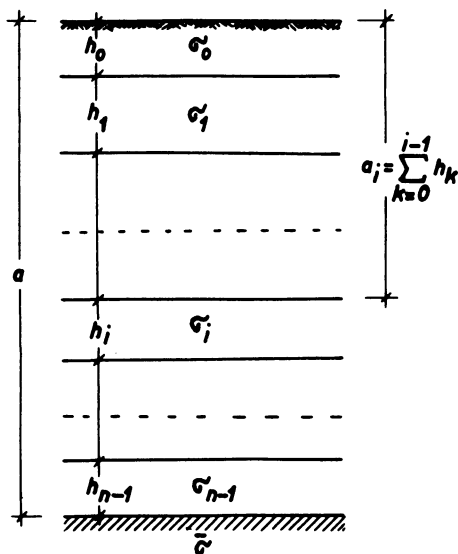


Abb. 1

Vor allem erhält man sofort

$$(1) \quad [f] = \int_0^a f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i h_i$$

Um $[f \circ \zeta] = \int_0^a f(x) dx \int_0^x \zeta(\xi) d\xi$ zu bestimmen, berechnen wir vor-

erst das Integral $[\zeta]_x = \int_0^x \zeta(\xi) d\xi$.

Wir betrachten x im Bereiche (a_i, a_{i+1}) : dann ist

$$[\zeta]_x = \int_0^{a_i} \zeta(x) dx + \int_{a_i}^x \zeta(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k h_k + \zeta_i (x - a_i)$$

woraus man, auf Grund der Definition von $[f \circ \zeta]$ und $f(x)$, erhält

$$[f \circ \zeta] = \int_0^a f(x) [\zeta]_x dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) [\zeta]_x dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} [\zeta]_x dx$$

und infolge der vorhergehenden Beziehung für $[\zeta]_x$

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [\zeta]_x dx &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k \right) dx + \zeta_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) dx = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k \right) (a_{i+1} - a_i) + \frac{1}{2} \zeta_i (a_{i+1} - a_i)^2 = h_i \sum_{k=1}^{i-1} h_k \zeta_k + \frac{1}{2} \zeta_i h_i^2 \end{aligned}$$

woraus man schließlich, durch Einsetzen in die vorgehende Form von $[f \circ \zeta]$, in leichter Weise

$$(2) \quad [f \circ \zeta] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i h_i \sum_{k=0}^{i-1} \zeta_k h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \zeta_i h_i^2$$

erhält.

Wenn wir für $f(x) \equiv \sigma(x)$, $\zeta(x) \equiv \frac{1}{\sigma(x)}$ (und somit $f_i = \sigma_i$, $\zeta_i = \frac{1}{\sigma_i}$) setzen, so erhalten wir aus Gl. (1) und Gl. (2)

$$(3) \quad [\sigma] = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i h_i, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{\sigma_i}$$

$$(4) \quad \left[\sigma \circ \frac{1}{\sigma} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i h_i \sum_{k=0}^{i-1} \frac{h_k}{\sigma_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{\sigma_i} \sum_{k=0}^{i-1} \sigma_k h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2.$$

Mit einigen Rechengvorgängen könnte man für die Gl. (3) und (4) die bereits in allgemeiner Weise nachgewiesene Beziehung $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = [\sigma] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}$ (siehe Gl. (17) des Teiles I der Arbeit) ableiten; wir bestehen jedoch nicht darauf.

§ 2. Wir schreiben jetzt die Gl. (3) und (4) in expliziter Form für 1, 2, 3 und 4 Schichten ($n = 1, 2, 3, 4$).

a) $n = 1$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{h_0}{\sigma_0}, \quad \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} h_0^2 = \frac{1}{2} a^2$$

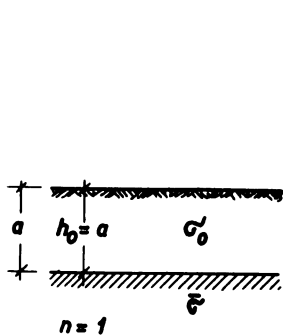


Abb. 2

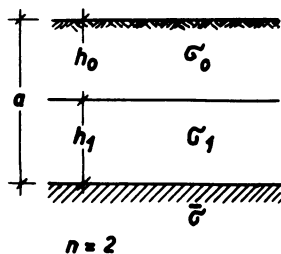


Abb. 3

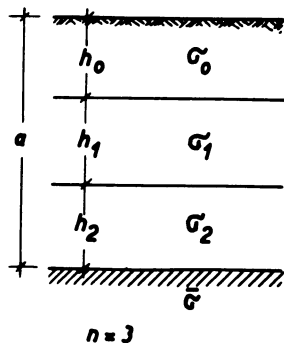


Abb. 4

b) $n = 2$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2) = \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + 2 h_0 h_1) - h_0 h_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2) = \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + 2 h_0 h_1) - h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) \end{aligned}$$

c) $n = 3$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2}$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma \ 0 \ \frac{1}{\sigma} \right] &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} h_0 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_1 h_2 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + 2 h_0 h_1 + 2 h_0 h_2 + 2 h_1 h_2) + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + \\ &\quad + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_2} h_0 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) + \\ &\quad + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1 \right) + h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) \end{aligned}$$

d) $n = 4$

$$[\sigma] = \sigma_0 h_0 + \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 + \sigma_3 h_3,$$

$$\left[\frac{1}{\sigma} \right] = \frac{h_0}{\sigma_0} + \frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{h_2}{\sigma_2} + \frac{h_3}{\sigma_3}$$

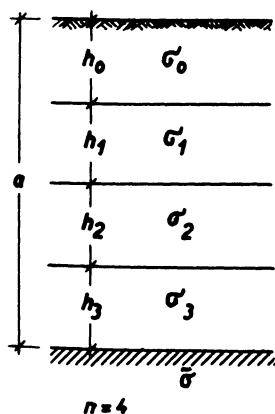


Abb. 5

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \sigma \\ 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{array} \right] &= \frac{\sigma_1}{\sigma_0} h_0 h_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} h_0 h_2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_0} h_0 h_3 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} h_1 h_3 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} h_2 h_3 + \\
&+ \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = \\
&= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 \right) + h_0 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_0} - 1 \right) + \\
&+ h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) + h_1 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - 1 \right) + h_2 h_3 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma} \\ 0 \\ \sigma \end{array} \right] &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} h_0 h_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_2} h_0 h_2 + \frac{\sigma_0}{\sigma_3} h_0 h_3 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} h_1 h_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} h_1 h_3 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} h_2 h_3 + \\
&+ \frac{1}{2} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = \\
&= \frac{1}{2} a^2 + h_0 h_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) + h_0 h_2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1 \right) + h_0 h_3 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_3} - 1 \right) + \\
&+ h_1 h_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) + h_1 h_3 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1 \right) + h_2 h_3 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Aus den obenangeführten Formeln ersieht man deutlich die Struktur der Ausdrücke $\left[\begin{array}{c} \sigma \\ 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{array} \right]$ und $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma} \\ 0 \\ \sigma \end{array} \right]$: sie besitzen die Dimensionen des Quadrates einer Länge und enthalten in linearer Form alle Verhältnisse zwischen den Leitfähigkeiten einer Schicht und jener der vorhergehenden Schichten im Falle von $\left[\begin{array}{c} \sigma \\ 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{array} \right]$ sowie jener der nachfolgenden Schichten im Falle von $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma} \\ 0 \\ \sigma \end{array} \right]$.

Kapitel 2

§ 3. Wir betrachten jetzt einen gleich geschichteten Boden wie im ersten Teil der Abhandlung; für den scheinbaren spezifischen Widerstand dieses Bodens sind zwei asymptotische Formeln nachgewiesen worden.

Für einen Boden mit schwach leitfähigem Untergrund ($\bar{\sigma} \ll \frac{1}{a} [\sigma]$) ist die Gültigkeit nachstehender Formel

$$(5) \quad \phi(r) \sim \frac{1}{[\sigma]} \psi\left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r\right), \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi} [H_0(x) - \gamma_0(x)]$$

gezeigt worden, während für den Fall eines Untergrundes von großer Leitfähigkeit folgende Formel abgeleitet wurde

$$(6) \quad \phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{1}{r} - \left(a_m^2 - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{1}{r^3} \right\}$$

worin mit a die Größe

$$(7) \quad a_m = \sqrt{2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]}$$

bezeichnet wird, die wir "scheinbare Tiefe" nennen können.

Wir betrachten nun eine Schicht von der (konstanten) Leitfähigkeit σ^* , Tiefe a^* und einem Untergrund von der Leitfähigkeit $\bar{\sigma}^*$. Wenn man die im ersten Teil dieser Abhandlung (Fall a) für eine Schicht festgelegte Formeln berücksichtigt, so erhält man $[\sigma] = \sigma^* a^*$, $2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right] = a^{*2}$, $a_m = a^*$ und somit

$$(5') \quad \phi(r) \sim \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi\left(\frac{\bar{\sigma}^*}{a^* \sigma^*} r\right)$$

$$(6') \quad \phi(r) \sim \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \left[\frac{1}{r} + a^{*2} \left(1 - \frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*2}} \right) \frac{1}{r^3} \right]$$

Wir betrachten nunmehr einen beliebigen Boden bestehend aus einer Schicht von der Leitfähigkeit $\sigma(x)$, die im allgemeinen Funktion der Tiefe ist, und aus einem Untergrund von der Leitfähigkeit $\bar{\sigma}$, und suchen die Bedingungen welche die soeben untersuchte Schichtentype (Formeln (5') und (6')) erfüllen muß, um mit dem in Frage kommenden Boden gleichwertig zu sein. Die Äquivalenz ist selbstverständlich in asymptotischer Weise zu verstehen, d. h. für Messungen in ziemlich großen Entfernungen.

§ 4. Wir untersuchen zuerst den Fall eines schwach leitenden (insbesondere isolierenden) Untergrundes: für den in Frage kommenden Boden gilt die Gl. (5) und für die äquivalente Schicht fördern wir die Gültigkeit

der Gl. (5'). Infolgedessen muß, zumindest für ziemlich große Werte von r , folgende Beziehung gelten

$$\frac{1}{[\sigma]} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r \right) = \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}^*}{a^* \sigma^*} r \right)$$

woraus man [A. 1]

$$(8) \quad \frac{1}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^*}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$$

erhält.

Demzufolge kann man auch schreiben [A. 1]

$$[\sigma]^2 = a^{*2} \sigma^{*2}$$

(8')

$$[\sigma] = a^* \sigma^*$$

Die Gl. (8) und (8') sind somit für die Identität der zwei asymptotischen Entwicklungen (5) und (5') notwendig; es ist klar, daß sie auch genügen. Die Gl. (8) und (8') stellen die Beziehungen dar, welche die Parameter a^* und σ^* des fiktiven, mit dem gegebenen Boden gleichwertigen, Bodens liefern.

Die Gl. (8) und (8') drücken das bekannte Resultat aus, daß man nämlich asymptotisch einen Boden mit schwach leitfähigen Untergrund durch einen fiktiven Boden ersetzen kann,* bestehend aus einem Untergrund von derselben Leitfähigkeit und aus einer Schicht von beliebiger Mächtigkeit a , deren Leitfähigkeit mit dem *Kirchhoffschen* Gesetz für Nebeneinanderschaltung berechnet wird.

§ 5. Dagegen im Falle eines Bodens mit einem Untergrund von mittlerer, nicht kleiner, Leitfähigkeit, d. h. für eine Gestaltung bei der $a \bar{\sigma}$ nicht als klein angesehen werden kann im Vergleich zu $[\sigma]$, müssen wir die Gl. (6) und Gl. (6') identifizieren. Mit einer gleichen Überlegung, wie im vorhergehenden Falle, erhalten wir folgende Beziehungen

$$\bar{\sigma}^* = \sigma$$

$$a^{*2} \left(1 - \frac{\sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*2}} \right) = a_m^2 - \frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}^2}$$

woraus man, falls man a^* und σ^* von $\bar{\sigma}$ unabhängig haben will, folgende Beziehungen ableitet

$$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}$$

$$(9) \quad a^* \sigma^* = [\sigma]$$

$$a^* = a_m = \sqrt{2 \left[\frac{1}{\sigma} \ 0 \ \sigma \right]}$$

Man gelangt somit zu einem analogen Ergebnis, wie im Falle eines schwach leitenden Bodens, mit dem Unterschied jedoch, daß die Mächtigkeit der gleichwertigen Schicht nicht beliebig festgesetzt werden darf, sondern daß sie gleich der scheinbaren Tiefe sein muß. Wir beachten ferner, daß während die Gleichwertigkeit im Falle eines beinahe isolierenden Untergrundes das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung betrifft, interessiert sie in diesem Falle auch das zweite Glied und um sie deshalb in der Deutung einer spezifischen Widerstandskurve ausnützen zu können, muß die Kurve eher genau sein. Jedenfalls ist ihre Verwendung hier weniger einfach als im vorhergehenden Falle.

Kapitel 3

§ 6. Bisher haben wir uns mit der Substitution einer beliebigen Schichtenverteilung durch eine Schicht beschäftigt, wobei diese Verteilung einen Untergrund von gleichförmiger Leitfähigkeit hatte. Wir werden jetzt zeigen, daß die gleichen Äquivalenzformeln auch im Falle eines Untergrundes von beliebiger (auch von nicht konstanter) Leitfähigkeit angewandt werden können; und zwar werden wir zeigen, daß man auch in diesem Falle für Entfernungen $r \gg a$ die Leitfähigkeitsverteilung in der Schicht $(0, a)$ durch jene einer gleichförmigen, mittels der Gl. (8) oder (9) berechneten Schicht ersetzen kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir einen Boden von der Leitfähigkeit $\sigma(x)$ die für $x > b > a$ den konstanten Wert $\bar{\sigma}$ annehme. Mit den Bezeichnungen des ersten Teiles dieser Abhandlung erhält man, durch Einsetzen von b an Stelle von a

$$(10) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \Omega(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

worin

$$\Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(b) z'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} z(b, \lambda)}{\sigma(b) y'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} y(b, \lambda)}$$

Wir geben jetzt der $\Omega(\lambda)$ eine neue Form die den Teil hervorhebt der nur von den Werten $\sigma(x)$ im Bereiche $(0, a)$ abhängt und den Teil der von $\sigma(x)$ für $x > a$ abhängig ist.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die zwei Sonderlösungen $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ der Gleichung (1) des ersten Teiles der Abhandlung, welche folgende Bedingungen erfüllen

$$(11) \quad \begin{aligned} \eta(a, \lambda) &= 1, & \sigma(a) \eta'(a, \lambda) &= 0 \\ \zeta(a, \lambda) &= 0, & \sigma(a) \zeta'(a, \lambda) &= 1 \end{aligned}$$

Wie im Falle der $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ des ersten Teiles, beweist man daß

$$\sigma(x) [\eta(x, \lambda) \zeta'(x, \lambda) - \eta'(x, \lambda) \zeta(x, \lambda)] = \text{konstant}$$

ist, woraus man durch Einsetzen von $x = a$ und durch Berücksichtigung der Gl. (11), folgende Beziehung erhält

$$(12) \quad \sigma(x) [\eta(x, \lambda) \zeta'(x, \lambda) - \eta'(x, \lambda) \zeta(x, \lambda)] = 1$$

Nachdem die $y(x, \lambda)$ und $z(x, \lambda)$ Lösungen derselben linearen homogenen Gleichung sind, können sie durch lineare Kombinationen von $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ erhalten werden: man erhält somit [A. 2]

$$(13) \quad \begin{aligned} y(x, \lambda) &= y(a, \lambda) \eta(x, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(x, \lambda) \\ z(x, \lambda) &= z(a, \lambda) \eta(x, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(x, \lambda) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\bar{\Omega}(\lambda)$ den analogen Ausdruck von $\Omega(\lambda)$ der mittels $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$ gebildet wird und zwar

$$(14) \quad \bar{\Omega}(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)}$$

Um diesen Ausdruck zu bilden kann man wie bei der Bildung von $\Omega(\lambda)$ (siehe Teil I) vorgehen, indem wir 0 durch a und a durch b ersetzen. Dieserhalb kann die $\bar{\Omega}(\lambda)$ wie die $\Omega(\lambda)$ des gegebenen Bodens gedeutet werden aus dem die Schicht $(0, a)$ herausgenommen sei: sie hängt somit ausschließlich vom Verhalten der $\sigma(x)$ für $x > a$ ab.

Durch Einsetzen der Gl. (13) in $\Omega(\lambda)$ und bei Berücksichtigung der Gl. (14) erhalten wir [A. 3]

$$(14') \quad \Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \Omega(\lambda) + \lambda y(a, \lambda)}$$

In diesem Ausdruck sind $y(a, \lambda)$, $z(a, \lambda)$, $y'(a, \lambda)$, $z'(a, \lambda)$ unabhängig vom Verhalten der $\sigma(x)$ für $x > a$, während $\bar{\Omega}(\lambda)$ unabhängig von $\sigma(x)$ für $x < a$ ist.

Durch geeignete Umformung der Gl. (14') [A. 4] gelangt man zur folgenden Beziehung

$$(15) \quad \Omega(\lambda) = \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} + \frac{\lambda}{y(a, \lambda) [\lambda y(a, \lambda) \omega(\lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda)]}$$

$$\left(\omega(\lambda) = \frac{1}{\bar{\Omega}(\lambda)} \right)$$

woraus man

$$(16) \quad \phi(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} J_0(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{y(a, \lambda) \left[y(a, \lambda) \omega(\lambda) + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda)}{\lambda} \right]} d\lambda$$

erhält.

Das erste Glied stellt den von der Verteilung $\sigma(x)$ im Bereiche $(0, a)$ und von einem Untergrunde von unendlich großer Leitfähigkeit herrührenden scheinbaren Widerstand dar. Wie bereits erwähnt nimmt dieser scheinbare Widerstand exponentiell mit der Entfernung ab und liefert infolgedessen bei großen Entfernungen ($r \gg a$) einen vernachlässigbaren Beitrag zu $\phi(r)$. Ferner können, stets für $r \gg a$, $y(a, \lambda)$, $z(a, \lambda)$ durch ihre im zweiten Glied abgebrochene Reihenentwicklungen ersetzt werden und man kann somit in das zweite Integral der Gl. (16) folgende Beziehungen einsetzen

$$y(a, \lambda) \sim 1 + \left[\frac{1}{\sigma} 0 \sigma \right] \lambda^2 = 1 + \frac{1}{2} a_m^2 \lambda^2$$

(17)

$$\frac{1}{\lambda} \sigma(a) y'(a, \lambda) \sim [\sigma] \lambda$$

(Siehe Gl. (19), (20) des Teiles I).

Nachdem bei diesen Entfernungen und in dieser Näherungsfolge die Schicht $(0, a)$ nur durch $[\sigma]$ und a_m eintritt, ist es zulässig sie durch eine gleichwertige homogene Schicht zu ersetzen und zwar so, daß

$$a^* = a_m, \quad a^* \sigma^* = [\sigma]$$

ist und dies sind eben die bereits früher gefundenen Beziehungen.

Im Falle ferner, daß $\sigma(x)$ sehr klein für $x > a$ ist, so wird auch $\omega(\lambda)$ eher klein sein. $\omega(\lambda)$ hat die Dimensionen einer Leitfähigkeit und nimmt im allgemeinen Werte in der Größenordnung von $\sigma(x)$ für $x > b$ an. Es besteht in der Tat $\sigma(0) = \bar{\sigma}$; $\sigma(\infty) = \sigma(a)$; infolgedessen wird man $y(a, \lambda) \sim 1$ setzen können und die $\phi(r)$ wird nur von $[\sigma]$ abhängig sein. Man wird somit die Schicht $(0, a)$ durch eine homogene Schicht ersetzen können, so daß

$$\sigma^* a^* = [\sigma]$$

ist und die eine beliebige Tiefe hat (man kann z. B. $a^* = a$ setzen). Man muß aber bemerken, daß das Einsetzen von $a^* = a_m$ in diesem Falle zu keiner erheblichen Verbesserung der Äquivalenz beiträgt.

Im Falle, daß für $x > a$ leitfähige Schichten vorhanden sind, so ist beim Gebrauch der Äquivalenz, wie bereits erwähnt, größere Vorsicht notwendig als wie im Falle von aufeinanderfolgenden weniger leitfähigen Schichten.

Anhang

[A. 1]

Aus der Beziehung

$$\frac{1}{[\sigma]} \psi \left(\frac{\bar{\sigma}}{[\sigma]} r \right) \equiv \frac{1}{a^* \sigma^*} \psi \left(\frac{\sigma^*}{a^* \sigma^*} r \right)$$

geht man, für sehr großes r , zu folgenden über

$$\frac{1}{[\sigma]} \left(\frac{[\sigma]}{\bar{\sigma}} \frac{1}{r} - \frac{[\sigma]^3}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{r^3} \right) \equiv \frac{1}{a^* \sigma^*} \left(\frac{a^* \sigma^*}{\bar{\sigma}^*} \frac{1}{r} - \frac{a^{*3} \sigma^{*3}}{\bar{\sigma}^{*3}} \frac{1}{r^3} \right)$$

bzw. wenn man jedes Glied mit r multipliziert

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{[\sigma]^2}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{r^2} \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^*} - \frac{a^{*2} \sigma^{*2}}{\bar{\sigma}^{*3}} \frac{1}{r^2}$$

woraus man, bei Grenzübergang für $r \rightarrow \infty$, die Gl. (8) erhält.

[A. 2]

Wenn wir

$$y(x, \lambda) = c_1 \eta(x, \lambda) + c_2 \zeta(x, \lambda)$$

$$z(x, \lambda) = c'_1 \eta(x, \lambda) + c'_2 \zeta(x, \lambda), \quad (c_1, c_2, c'_1, c'_2 = \text{Konstante})$$

setzen (was zulässig ist, denn $\eta(x, \lambda)$ und $\zeta(x, \lambda)$, wie aus den Gl. (11) sofort ersichtlich ist, bilden ein Grundsystem von Integralen) und wenn wir in dieselben $x = a$ einsetzen, so erhalten wir, bei Berücksichtigung der Gl. (11)

$$y(a, \lambda) = c_1, \quad z(a, \lambda) = c'_1$$

und wenn wir differenzieren und nochmals $x = a$ einsetzen, so erhalten wir

$$y'(a, \lambda) = \frac{c_2}{\sigma(a)}, \quad z'(a, \lambda) = \frac{c'_2}{\sigma(a)}$$

woraus sich sofort die Gl. (13) ergeben.

[A. 3]

Aus den Gl. (13) folgt

$$y(b, \lambda) = y(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)$$

$$y'(b, \lambda) = y(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)$$

$$z(b, \lambda) = z(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)$$

$$z'(b, \lambda) = z(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)$$

und durch Einsetzen in $\Omega(\lambda)$ erhält man

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda) = & \lambda \frac{\sigma(b) [z(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)] +}{\sigma(b) [y(a, \lambda) \eta'(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta'(b, \lambda)] +} \\ & + \lambda \bar{\sigma} [z(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) z'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)] \\ & + \lambda \bar{\sigma} [y(a, \lambda) \eta(b, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \zeta(b, \lambda)] \end{aligned}$$

$$= \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) [\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)] + \sigma(a) y'(a, \lambda) [\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)] + z(a, \lambda) [\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)]}{\sigma(a) y'(a, \lambda) [\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)]}$$

woraus, wenn Zähler und Nenner durch $\frac{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)}{\lambda}$ dividiert werden, sich ergibt

$$\Omega(\lambda) = \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)} + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \lambda \frac{\sigma(b) \zeta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \zeta(b, \lambda)}{\sigma(b) \eta'(b, \lambda) + \lambda \bar{\sigma} \eta(b, \lambda)} + \lambda y(a, \lambda)}$$

Durch Berücksichtigung der Gl. (14) erhält man dann sofort die Gl. (14').

[A. 4]

Aus Gl. (14') erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} \Omega(\lambda) &= \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda y(a, \lambda)} = \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \cdot \frac{\lambda + \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \\ &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \cdot \frac{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)} + \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \\ &\quad - \frac{\frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \\ &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda) \sigma(a) [y(a, \lambda) z'(a, \lambda) - z(a, \lambda) y'(a, \lambda)]}{y(a, \lambda) z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \right\} \end{aligned}$$

Wegen der Gl. (3') des ersten Teiles der Abhandlung ist jedoch

$$\sigma(a) [y(a, \lambda) z'(a, \lambda) - z(a, \lambda) y'(a, \lambda)] = 1$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \Omega(\lambda) &= \lambda \frac{\sigma(a) z'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda z(a, \lambda)}{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda) + \lambda y(a, \lambda)} \\
 &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda) z(a, \lambda)}}{\lambda + \frac{\sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}} \right\} \\
 &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} + \lambda \frac{\frac{\bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda)}}{\lambda y(a, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)} \\
 &= \lambda \frac{z(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} + \frac{\lambda \bar{\Omega}(\lambda)}{y(a, \lambda) [\lambda y(a, \lambda) + \sigma(a) y'(a, \lambda) \bar{\Omega}(\lambda)]}
 \end{aligned}$$

woraus man schließlich die Gl. (15) erhält, wenn Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch $\bar{\Omega}(\lambda)$ dividiert werden und wenn $\omega(\lambda) = \frac{1}{\bar{\Omega}(\lambda)}$ gesetzt wird.