

Werk

Jahr: 1957

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:23

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0023

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0023

LOG Id: LOG_0035

LOG Titel: Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien ¹⁾

Dt. Ak. d. Wiss. zu Berlin, Geomagn. Inst. Potsdam, Mitteilung Nr. 63

Von O. Lucke, Potsdam ²⁾

Zusammenfassung: In diesem Bericht, der eine Fortsetzung einer Arbeit von Prof. Dr. G. Fanselau und dem Verfasser darstellt, wird gezeigt,

a) daß die Westwärtsdrift der verschiedenen Multipole, die das erdmagnetische Hauptfeld darstellen, verschieden groß ist. Die größte Drift zeigt das Quadrupolfeld, die zweitgrößte das Oktupolfeld usw.

b) daß im Erdkern neben Silikaten auch metallisches Eisen vorhanden sein muß. W. H. Ramseys Hypothese kann nicht völlig richtig sein. Mit Hilfe der Theorie des Schmelzens von J. J. Gilvarry wird eine Temperaturverteilung im Inneren der Erde berechnet und mit anderen Angaben verglichen. Die Hydromagnetik der ausgeglichenen Strömungen zeigt, daß ν_m die magnetische Zähigkeit durch einen antimetrischen Tensor zu ersetzen ist, während in der Hydrodynamik $\nu^* = \frac{\eta}{\rho}$, der kinematischen Zähigkeit bekanntlich ein symmetrischer Tensor entspricht. Es ist aber kaum möglich, auf diesem Ergebnis eine Theorie des erdmagnetischen Hauptfeldes aufzubauen. Es zeigt sich, daß eine Dynamotheorie nur in der Gestalt möglich ist, die ihr E. N. Parker gegeben hat.

c) daß man auf dem Tolman-Effekt in der Grenzschicht zwischen Erdkern und Erdmantel eine Theorie des erdmagnetischen Hauptfeldes nur dann aufbauen kann, wenn man am Äquator des Erdkerns eine ostwärtige Zirkulation mit einer höheren Geschwindigkeit annehmen kann, als sie aus der Westwärtswanderung des Hauptfeldes und der Variation der Tageslängen erschlossen wird.

Abstract: This account is a continuation of a paper of G. Fanselau and this author. It is shown:

a) that the westward drift of the various multipoles, representing the geomagnetic main field, has various magnitudes. The strongest drift is shown by field of the quadrupole, the next one being that of the octupole etc.

b) that in the core of the earth there must be olivine and metallic iron. W. H. Ramsey's hypothesis cannot be quite right. Using J. J. Gilvarry's theory of fusion a distribution of temperature within the earth is found. It is compared with results

¹⁾ Vortrag auf der Geophysiker Tagung 1956 am 27.9.1956. Da die Korrekturbogen ein Jahr später in die Hand des Verfassers gelangten, sei es gestattet, einige Anmerkungen zu machen.

²⁾ Dr. O. Lucke, Geomagn. Inst. d. Dt. Ak. d. Wiss., Potsdam, Telegrafenberg.

of other authors. In hydromagnetics of the smoothed velocity field the magnetic viscosity ν_m is to be replaced by an antimetric tensor, while in familiar hydrodynamics the viscosity $\nu^* = \frac{\eta}{\rho}$ must be replaced by symmetric tensor. It seems not possible to build up on this result a theory of the geomagnetic main field. A dynamo-theory of the field seems only to be allowable in *E. N. Parker's* manner.

c) that a theory of the geomagnetic main field can build on the Tolman-effekt provided, that there is at the equator of the earth's core a circulation, eastward drifting with velocities greater than those that are found by the westward drift of the geomagnetic main field and the variation of the earth's rotation.

In der Zeitschrift für Geophysik ist in Jahrg. 22 (1956) Heft 3/4 eine Arbeit von Herrn Prof. *Fanselau* und mir mit dem oben genannten Titel erschienen. Sie wurde 1955 abgeschlossen. Inzwischen habe ich weiter an dem Thema gearbeitet und will jetzt einige Resultate vortragen. Sie seien zu drei Gruppen zusammengefaßt.

- a) Über die Veränderung des erdmagnetischen Feldes in den letzten hundert Jahren.
- b) Über hydromagnetische Theorien vom Ursprung des Feldes.
- c) Über mögliche Plasmatheorien vom Ursprung des Feldes.

Zu a)

Über die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Hauptfeldes liegen eine Reihe von Arbeiten vor. Die wichtigsten stammen von *E. C. Bullard* [1] und von *E. H. Vestine* [6].

E. C. Bullard hat sehr genaue Karten des Nichtdipolfeldes zu den Epochen 1907.5 und 1945 verglichen und erhält als Westwärtswanderung

$$18 \pm 2 \text{ [}^\circ\text{/100 Jahre]}$$

E. H. Vestine nimmt als Maß für die Westwärtswanderung die Wanderung des Durchstoßpunktes durch die Erdoberfläche des Radiusvektors, der vom Mittelpunkt der Erde zum Mittelpunkt des exzentrischen Dipols führt. Er erhält eine Wanderung von etwa

$$30^\circ \text{ nach Westen und } 25^\circ \text{ nach Norden} \\ \text{für die vergangenen 100 Jahre.}$$

Uns scheint dieses Maß nicht glücklich gewählt zu sein und zu große Werte zu liefern, wie wir sogleich sehen werden.

Über die von mir vorgeschlagene Methode hat Herr Prof. *Fanselau* im vorigen Jahr schon in München berichtet. Wir gehen ebenfalls von den vorliegenden Entwicklungen des skalaren Potentials des erdmagnetischen Hauptfeldes nach Kugelfunktionen aus und nehmen wegen der großen Un-

sicherheit der Unterlagen des vorigen Jahrhunderts an, daß es seinen Ursprung vollständig im Erdinneren hat und daß das Nichtdipolfeld vernachlässigt werden kann.

$$\Phi = -\nabla V$$

$$(1) \frac{1}{a} V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \quad V_n = \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi] P_n^m(\cos \theta)$$

Man kann leicht zeigen, daß V_n in kartesischen Koordinaten eine homogene Funktion, eine Form n -ten Grades, darstellt. Die Elemente ihrer Matrix, deren Anzahl 3^n ist, erfüllen gewisse Symmetriebedingungen, die daraus folgen, daß Φ als analytische Funktion des Ortes aufgefaßt wird und daß $\text{rot } \Phi = 0$ gelten muß. Darüber hinaus muß die Bedingung $\text{div } \Phi = -\nabla^2 V = 0$ erfüllt sein.

Sind die H_i , $i = 1, 2, 3$, die kartesischen Komponenten von Φ , so geht man von folgenden Taylorreihen aus:

$$(2) H_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{r} \cdot \nabla)^{n-1}}{(n-1)!} H_i / \mathbf{r} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} H_i^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jedes $H_i^{(n-1)}$ ist eine Form $(n-1)$ -ten Grades und enthält, da es aus einer trinomischen Entwicklung entsteht, $\frac{1}{2}n(n+1)$ verschiedene Terme.

Also enthalten alle 3 $H_i^{(n-1)}$ $N_1(n) = \frac{3}{2}n(n+1)$ verschiedene Terme.

Auf diese Zahl reduziert sich die Anzahl 3^n der Elemente der Matrix von V_n , wenn man annimmt, daß Φ eine analytische Funktion des Ortes ist. Die Bedingung $\text{rot } \Phi = 0$ legt den Parametern weitere Symmetriebedingungen auf. Man findet zunächst, daß ihre Anzahl der Zahl der Terme von ∇V_{n-1} , also gleich $N_2(n) = \frac{3}{2}(n-1)n$ sein muß. Die Parameter von

∇V_{n-1} sind aber nicht alle unabhängig voneinander, weil $\nabla^2 V_{n-1} = 0$ gelten muß. Man findet leicht, daß die Anzahl der Bedingungen, die aus $\nabla^2 V_n = 0$ für V_n folgen, gleich der Anzahl der Parameter von V_{n-2} ist. Für V_n ergeben sich

$$\frac{N_2(n)}{3} = \frac{1}{2}(n-1)n$$

für V_{n-1}

$$N_3(n) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

Man erhält also als Anzahl der freien Parameter von V_n ohne Divergenzbedingungen $N_1(n) - N_2(n) + N_2(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n + 1$.

Wenn man davon $\frac{N_2(n)}{3} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ abzieht, erhält man die bekannte Zahl der freien Parameter für $V_n : 2n + 1$, (wenn V_n der Laplaceschen Differentialgleichung genügt).

Um die säkulare Veränderung des erdmagnetischen Hauptfeldes zu erfassen, studieren wir die Lage der Maxima, Minima und auch der Sattelpunkte der durch Flächen über der Einheits-Kugel dargestellten Funktionen V_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Die Werte der Maxima von V_6 sind nur ein kleines Vielfaches der Größenordnung der Fehler, die wir als möglich zulassen müssen. Hierbei zeigen sich einige Unregelmäßigkeiten. Bei den übrigen ist die Zahl der Maxima gleich der Zahl der Minima und zwar gleich $n - 1$, mit Ausnahme $n = 1$; V_1 hat ein Maximum und ein Minimum und keinen Sattelpunkt. Die Anzahl der Sattelpunkte der übrigen V_n , $n = 2, 3, 4, 5$, ist gleich der Anzahl der Parameter von V_{n-2} , also gleich $2n - 3$.

Es ist ein Wort der Rechtfertigung notwendig, daß wir die säkulare Veränderung jeder der Flächen V_n für sich studieren. Man findet sie, wenn man die mittlere Energiedichte des Feldes, das zu $a \cdot V_n$ gehört, berechnet. Vor einigen Jahren habe ich die Formel abgeleitet:

$$(3) \quad \bar{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n, \quad \bar{e}_n = \frac{(n+1)}{8\pi} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] = \frac{1}{8\pi} (n+1)(2n+1) \bar{V}_n^2$$

im Gauß'schen Maßsystem mit $h_n^0 \equiv 0$ und $\bar{V}_n^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} V^2 d\omega$.

Dabei wird über dem vollen Raumwinkel ω (die Einheitskugel E.K.) integriert. Die Formel folgt aus den Mittelwerten

$$(4) \quad \bar{X}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} X^2 d\omega, \quad \bar{Y}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} Y^2 d\omega, \quad \bar{Z}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(E.K.)} Z^2 d\omega$$

der Komponenten des magnetischen Feldvektors in der folgenden Weise:

$$\bar{Z}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]$$

$$\bar{Y}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n 2m [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n$$

$$[g_{\nu}^m g_n^m + h_{\nu}^m h_n^m] m \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} (1 - (-1)^{\nu+n+1})$$

$$\bar{X}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \left[\frac{4n(n+1)}{2n+1} - 2m \right] - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\nu-1} \sum_{m=0}^n$$

$$[g_{\nu}^m g_n^m + h_{\nu}^m h_n^m] m \left[\frac{(\nu-m)!}{(\nu+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} (1 - (-1)^{\nu+n+1})$$

Es gilt nach der Ausgleichung von P. Mauersberger [4] der bisher vorliegenden Potentialentwicklungen:

Tabelle 1

	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_4$	$\bar{e}_5$	$\bar{e}_6$	$\bar{e}_{\nu m} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \cdot 10^3$
1850	8,5554	0,1206	0,0850	0,0239	0,0091	0,0014	
1950	7,6331	0,1951	0,1124	0,0451	0,0055	0,0032	

In der überragenden Größe der Energiedichte des Dipols scheint sich die Tatsache auszudrücken, daß das erdmagnetische Hauptfeld ein Produkt der Erdrotation ist. Sie ist noch immer im Abnehmen begriffen, während die übrigen Multipole bis auf V_5 an Energiedichte zunehmen. Genauere Angaben siehe Abb. 1 und 2.

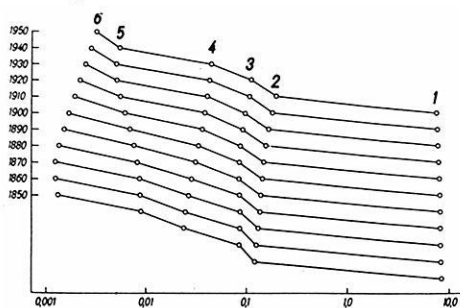


Abb. 1: Die mittleren Energiedichten für die Abschnitte der Potentialentwicklungen V_1 bis V_6 als Funktion der Zeit. Die Energiedichten sind im logarithmischen Maßstab aufgetragen. $\bar{e}_1$ ist gegenüber $\bar{e}_2$ um 10 Jahre zurückversetzt, entsprechend $\bar{e}_2$ gegenüber $\bar{e}_3$ usw. fort.

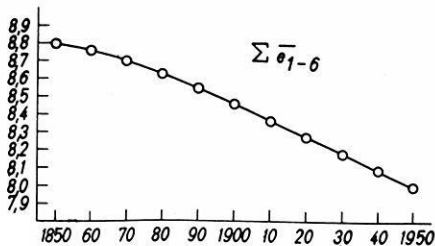


Abb. 2: Die mittlere Energiedichte der Multipole 1 bis 6 als Funktion der Zeit.

Die Abschnitte der Potentialentwicklungen haben ferner deshalb eine gewisse selbständige Bedeutung, weil die elektrischen Ströme, die wahr-

scheinlich die dazugehörigen Felder erzeugen, auf den kugelförmigen Erdkern mit dem Radius $a_1 = 3472 \pm 4$ [km] beschränkt sind.

Die genaue Auswertung zeigt, daß die Extrempunkte des Dipols und Quadrupols in den letzten 100 Jahren Wege beschrieben haben, deren sphärische Koordinaten im wesentlichen monotone Funktionen der Zeit sind. Bei den höheren Multipolen kommen auch schleifenförmige Wege vor. Beispiele sind in den Abbildungen 3, 4, 5, 6 zu finden. Wenn man nur die

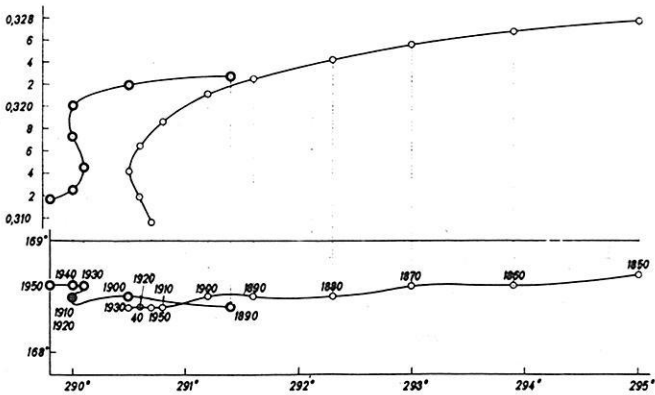


Abb. 3: Darstellung des Dipols als Funktion der Zeit.

Westwärtswanderung der Extremwerte betrachtet, erhält man folgende Daten:

Tabelle 2

V_1 (Dipol)	+ 4,5°
V_2 (Quadrupol)	+ 24,5°
V_3 (Oktupol)	+ 9,4°
V_4 (12er Pol)	+ 8°
V_5 (16er Pol)	- 50°

Wir haben einen Teil der Rechnungen auch nach den Unterlagen durchgeführt, die in [6] zu finden sind und haben befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach [4] gefunden. Man kann sich vorstellen, daß als Ergebnis der Übereinanderlagerung dieser Westwärtswanderungen der Wert von *E. C. Bullard* herauskommt, während der von *E. H. Vestine* als zu groß erscheint.

Das Problem, die Extremwerte der Formen n -ter Ordnung zu finden, führt zu der Aufgabe, ihre Hauptachsen zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe bei quadratischen Formen ist lange bekannt. Formen höherer Ordnung scheinen wenig bearbeitet zu sein. Als ein Ergebnis soll erwähnt werden, daß man die Formen V_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$, darstellen kann.

$$(5) \quad V_n = \sum_{\nu=1}^{n'} c_{\nu}^{(n)} P_n(\cos \Theta_{\nu})$$

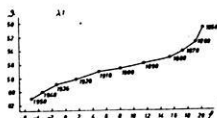


Abb. 4: Die Lage des Pols P_1 (λ_1) des Quadrupols als Funktion der Zeit.

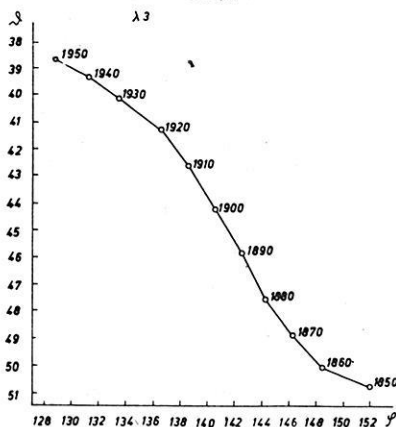


Abb. 5: Die Lage des Pols P_3 (λ_3) des Quadrupols als Funktion der Zeit.

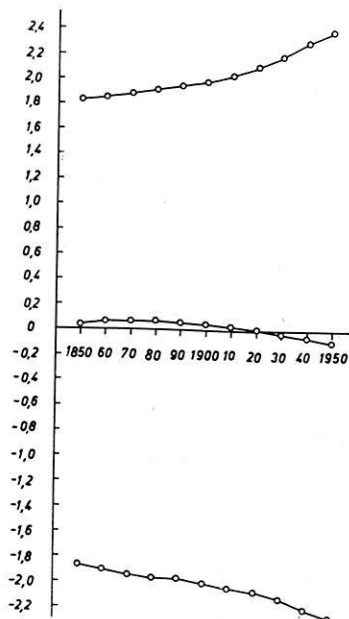


Abb. 6: $c_{\nu}^2 (1, 2, 3) = 2/3 \lambda_{\nu}^2$ in $[8 \cdot 10^3]$ als Funktion der Zeit. $\lambda_{\nu}^2 (1, 2, 3)$ sind die Eigen-Werte des Quadrupols.

Tabelle 3

Zu n	= 2	3	4	5	...	gehören
n'	= 3	7	11	15	...	Achsen; von diesen sind
n''	= 2	4	6	8	...	Achsen von Extremwerten,

die übrigen sind Achsen der Sattelpunkte. Die graphischen Darstellungen von V_n legen gewisse Konfigurationen der Achsen nahe. Sie schneiden z. B. für den Quadrupol auf der Einheitskugel die Ecken eines Oktaeders, für den Oktupol die Ecken eines Rhombendodekaeders aus. Wenn man die Achsen der Extremwerte für V_4 betrachtet, so schneiden sie auf der Einheitskugel die Ecken einer 6-eckigen Säule aus; zu jeder ihrer rechteckigen Seitenflächen gehört außerdem eine Sattelpunktsachse, zu jeder ihrer beiden Deckflächen, gehören je 2 Sattelpunktsachsen. Die $c_\nu^{(n)}$ Werte sind nicht sämtlich freie Parameter, sie genügen für n

$$n = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

$$m' = 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots \quad \text{Bedingungen, die mit der Zahl der}$$

Sattelpunkte übereinstimmen. Man bilde

$$n' - m' = 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots \quad (\text{Anzahl der Extremachsen})$$

$$+ 3 = 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad \dots \quad \text{und addiere 3, dann erhält man die}$$

Anzahl der freien Parameter von V_n . Die $c_\nu^{(n)}$ hängen mit den Eigenwerten von V_n , (mit ihren Extremwerten) zusammen.

Man kann sich jeden Teil $c_\nu^{(n)} P_n(\cos \Theta_\nu)$ als durch ein einfaches Stromsystem entstanden denken, das an der Oberfläche des Erdkerns fließt.

Tabelle 4

Dipol	$\tilde{j}_\phi^{(1)}$	$= \frac{da^3}{\text{Vol}(a_1)} \sin \theta$	$\tilde{j}_{\phi_m}^{(a)} = 4,493 \text{ [Amp cm}^{-1} \text{]}$
			für 1950
Quadrupol	$\tilde{j}_{\phi_i}^{(2)}$	$= \frac{5 a}{4 a_1} \frac{a^3 c_i^{(2)}}{\text{Vol}(a_1)} \sin 2 \theta,$	
	$i = 1, 2, 3$		
		Pol 1	Pol 2
		$\tilde{j}_{\phi_{m_i}}^{(2)} : 0,785$	0,025
			Pol 3
			0,760 [Amp cm ⁻¹]
		$c_i^{(2)} = \frac{2}{3} \lambda_i^{(2)}$	(Eigenwert)
Oktupol	$\tilde{j}_{\phi_i}^{(3)}$	$= \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} \frac{a^2}{a_1^2} \frac{a^3 c_\nu^{(3)}}{\text{Vol}(a_1)} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{10} \right) \sin \theta$	
			$\text{Vol}(a_1) = \frac{4}{3} \pi a_1^3$

Man kommt zu dieser Auffassung, wenn man von der Hypothese von *W. H. Ramsey* ausgeht, wonach das Material des Erdkerns nichts anderes ist als eine metallische Phase des Minerals Olivin. Über die Einwände hinaus, die *Fr. Birch* [7] gegen die *Ramseysche* Hypothese gemacht hat, wäre es schwer zu verstehen, inwiefern ein Ionenkristall metallischen Charakter bekommen könnte. Um "freie" Elektronen zu postulieren, müßte man schon annehmen, daß die abgeschlossene L-Schale des Sauerstoffions O^{--} vollkommen zerquetscht würde, d. h., daß am Rande von O^{--} die potentielle Energie des Kernfeldes neben der kinetischen Energie der Elektronen verschwinden würde. In der Physik der hohen Drucke von $10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$,

die etwa 130 mal größer sind als die Drucke im Erdkern, benutzt man zweckmäßig das *Thomas-Fermi* statistische Modell des Atoms [20], das das Kernfeld berücksichtigt, so daß man die *Ramseysche* Hypothese für Drucke von $10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ kaum zulassen kann.

Um einen Einblick in die chemische Zusammensetzung der Erde zu bekommen, kann man folgendermaßen argumentieren. In der Tabelle 4 sind die 16 häufigsten Elemente des Kosmos aufgeführt und zwar mit Ausnahme von ^1_1H und ^2_1D die Summe über alle Isotopen, relativ zu 100 Si-Atome.

Tabelle 4

Die häufigsten Elemente des Kosmos $\odot$, der Tiefengesteine $[]$ und der Meteorite $\langle \rangle$ nach [14]

a) Kosmos

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
^1_1H	He	O	Ne	N	^2_1D	C	Si
1					1		
$4,00 \cdot 10^6$	$3,08 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^3$	860	660	570	350	100
⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
Mg	Fe	S	A	Al	Ca	Na	Ni
91,2	60	37,5	15	9,48	4,9	4,38	2,74

b) Tiefengesteine

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
0	Si	Al	Na	Ca	Fe	Mg	K
296	100	30,5	12,4	9,17	9,13	8,76	4,42
(3)	(7)	(12)	(14)	(13)	(9)	(8)	

c) Meteorite

<1>	<2>	<3>	<4>	<5>	<6>	<7>	<8>
O	Si	Fe	Mg	S	Al	Ca	Ni
347	100	89,1	87,2	11,4	8,79	5,71	4,60
(3)	(8)	(10)	(9)	(11)	(13)	(14)	(16)

Außerdem sind in Tabelle 4 die 8 häufigsten Elemente der Tiefengesteine und der Meteorite aufgeführt. Wenn man die Reihen für den Kosmos und die Tiefengesteine vergleicht, kommt man zu dem Schluß, daß die chemische Zusammensetzung der Erdkruste, von den Sedimentgesteinen abgesehen, das Ergebnis zweier wesentlicher Prozesse in der Entwicklung der Erde ist.

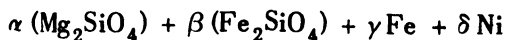
1. Der erste Prozeß besteht in einer starken Entgasung des Protoplaneten "Erde", der ursprünglich wohl die kosmische Verteilung der Elemente und eine etwa 1000-fache Masse der jetzigen Erde aufwies. Nach *G. P. Kuiper* [15] begann der Entgasungsprozeß, als die Sonne schon so weit kondensiert war, daß sie ihre volle Leuchtkraft erreichte, die Gravitationsfelder der Protoplaneten aber noch schwach entwickelt waren. Dabei sind nicht nur Wasserstoff, Stickstoff und die Edelgase flüchtig geworden, sondern auch andere Elemente wie Schwefel und Kohlenstoff, die bei hinreichender Kondensation des Protoplaneten und einer Erwärmung bis zu einigen 1000°K gasförmige Verbindungen wie CH_4 , H_2S , NH_3 usw. bildeten. Genaueres siehe *H. C. Urey* [16]. Die chemische Zusammensetzung der inneren Planeten kann man als die von Schlacken dieses Prozesses ansehen. Es ist zu bemerken, daß der geschilderte Prozeß kaum relativ so seltene Elemente wie Al, Na und K in dem Maße in der Erdkruste anreichern konnte, wie aus Tabelle 4b hervorgeht.

2. Der zweite Prozeß besteht darin, daß die flüssige Materie des Erdkörpers mit einer Temperatur von einigen 1000°K sich in der Weise zu differenzieren versucht, wie es dem Minimum der freien Enthalpie (dem *Gibbsschen Potential*) entspricht. Der Prozeß dürfte eine gewisse Ähnlichkeit mit der Schichtung der Schmelzen in einem Hochofen aufweisen. Man darf annehmen, daß er noch nicht völlig abgeschlossen ist.

Weil eine Thermodynamik der Materie unter Drucken von der Größenordnung $10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ noch in den Anfängen steckt, bedeuten die Verhältnisse

in den Meteoriten eine starke Stütze dieser Ansicht [13]. Schon *Farrington* [17] hat eine Reihe von Gründen angegeben, weshalb die Meteoriten als Bruchstücke eines Planeten angesehen werden müssen. Allein die Tatsache, daß es, wenn man die selteneren Troilite (FeS) unterschlägt, in der Hauptsache zwei Arten von Meteoriten gibt, die Steinmeteorite (Silikate, Aerolite) und die Eisenmeteorite (Siderite), spricht für einen Differenzierungsprozeß in einem, vielleicht kleineren, Planeten. Darüber hinaus ist es *Reasbeck* und *Mayne* gelungen [18], das Alter der festen Aerolite zu $(2 \div 3) \cdot 10^9$ Jahre, das der festen Siderite zu $3 \cdot 10^8$ Jahre zu bestimmen. Ferner haben die Arbeiten von *Herb. H. Uhlig* [19] gezeigt, daß die *Widmannstättenschen* Figuren der Eisenmeteorite durch den Übergang der γ -Phase des Eisens (mit kubischflächenzentriertem Gitter) in die α -Phase (mit kubischraumzentriertem Gitter) bei hohem Druck und Temperaturen über 300°K entstehen. Der Prozeß ging bei zunehmender Abkühlung immer weiter vor sich. Da das kubischraumzentrierte Gitter nicht so dicht gepackt ist wie das kubischflächenzentrierte, mußte die Spannung im Kern des Planeten wachsen, bis er zersprang. Davon sprechen die *Neumannschen* Bänder, die, wie sich experimentell zeigen läßt, die Spuren von Stoßwellen im Material sind.

Man muß also schließen, daß die inneren Planeten einem Differenzierungsprozeß unterlagen, der einen Silikatmantel von einem Kern trennte, der mehr oder minder aus metallischen Eisen besteht. Die weitere Differenzierung, die zur Bildung der Erdkruste führte, soll hier nicht betrachtet werden. Die Häufigkeit der Elemente, die in der Hauptsache die inneren Planeten bilden, muß deshalb durch Tabelle 4c gegeben werden. Man kann schließen, daß O, Mg, Fe und Si die hauptsächlichsten Elemente sind, die den Erdball aufbauen und daß sie in Form von $(\text{Mg}, \text{Fe})_2\text{SiO}_4$, metallischem Eisen (und etwas Nickel) vorkommen. Wir machen also den Ansatz



für die chemische Zusammensetzung der Erde und setzen

im Erdmantel $6371 \text{ km} \geq r \geq 3473 \text{ km} \quad \gamma = \delta = 0$

im äußeren Erdkern $3473 \text{ km} \geq r \geq 1250 \text{ km}$

Modell I $\beta = \delta = 0$

Modell II $\alpha = \delta = 0$

im inneren Erdkern $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Diese Annahmen werden durch eine Arbeit von *L. Knopoff* und *R. Uffen* [8] (Siehe Abb. 7) nahegelegt. Die Abb. 7 enthält die Zustandskurven der obengenannten Bestandteile im (p, ρ) -Diagramm bei $T = 0^\circ\text{K}$ als Extrapolationen der von *P. Bridgman* gemessenen Werte, extrapoliert mit Hilfe der Theorie der endlichen elastischen Verschiebungen von *Birch-Murnaghan*, die sich den (p, ρ) -Diagrammen des *Thomas-Fermi*-Modells bei $p \approx 10^{14} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ asymptotisch nähern. Außerdem ist in Abb. 7 die von *K. Bul-*

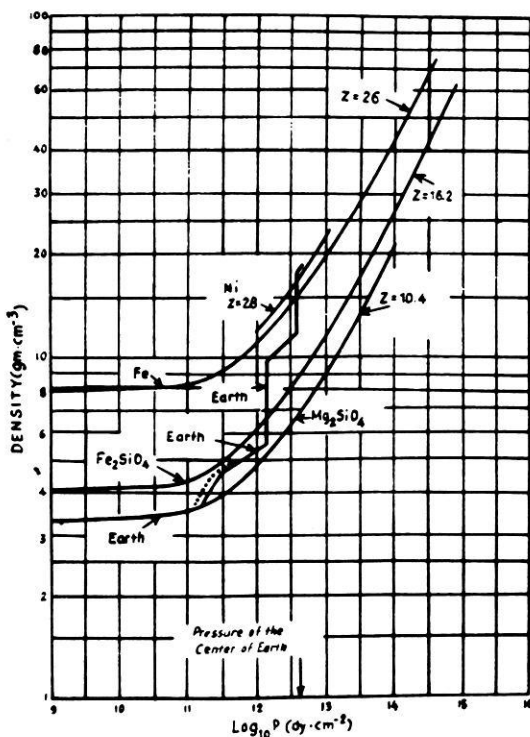


Abb. 7: Die Zustandskurven der hauptsächlichsten chemischen Verbindungen und metallischen Elemente des Erdkörpers im (p, ρ) Diagramm.

len berechnete Druck-Dichtekurve für das Innere der Erde (Modell A) [21] enthalten. Die punktierte Kurve soll ihre Reduktion von einer noch zu besprechenden Temperaturverteilung auf 0°K darstellen. Wir haben nach den Ansätzen der genannten Arbeit von *Knopoff* und *Uffen* die α , β , γ , δ -Werte ausgerechnet und erhalten die Werte der Tabelle 5

Tabelle 5

Tiefe	α		
0,300 · 10 ³ km	1,00		
0,413	0,637		
0,60	0,030		
0,80	0,017		
1,00	0,299		
1,40	0,33		
2,00	0,58		
2,40	0,71		
2,898	0,83		
	Modell I	Modell II	
	α	β	
2,898	0,23	0,49	
3,4	0,16	0,53	
4,0	0,22	0,46	
4,4	0,27	0,55	
4,980	0,29	0,43	
5,12	0,27	0,44	

Bemerkenswert ist die starke Abnahme des Forsteritsgehaltes in der Schicht zwischen 400 ÷ 1000 km Tiefe, die mit *H. Jeffreys* 20° Diskontinuität der Erdbebenwellen zusammenhängt.

Y. Shimazu [22] kommt zu demselben Ergebnis auf Grund thermodynamischer Betrachtungen unter der Annahme, daß das thermodynamisch-chemische Gleichgewicht im Erdmantel erreicht ist.

Die α , β , γ , δ -Werte als Funktion des Radius setzen uns in die Lage, die chemische Zusammensetzung der Erde zu berechnen. Man erhält in Massenanteilen die Werte der Tabelle 6.

Tabelle 6

	Modell I	Modell II	Meteorite (n. <i>Urey</i>)
O	27 %	26 %	35 %
Fe	41 %	43 %	23,8 %
Si	11 %	11 %	17,8 %
Mg	10 %	9 %	13,5 %
	89 %	89 %	90,1 %
Ni	2 %	2 %	1,9 %
	91 %	91 %	92,0 %

Die restlichen 9 % stellen die Masse der Erdkruste dar.

In der Erde ist offenbar zu wenig Mg_2SiO_4 vorhanden. Das kann in der Natur der Sache liegen oder seinen Grund darin haben, daß von einer bestimmten Tiefe ab, etwa in der Schicht zwischen 400 und 1000 km Tiefe, der Olivin zu einem kubischen Spinellkristallgitter übergeht. Die Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit bei 400 km Tiefe von $10^{-5} [\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}]$ auf $10^{-2} [\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}]$ und andere Gründe würden dafür sprechen [23]. Die vorstehend erwähnten Rechnungen wären dann zu modifizieren.

Die Temperaturen im Erdinneren habe ich wie üblich unter der Annahme berechnet, daß sowohl im Erdkern als auch im Erdmantel Konvektionen vorkommen und daß dort das Temperaturgefälle das adiabatische wenig übersteigt. Die Annahme wird gestützt, wenn man die Schmelzpunkttemperaturen auf Grund der *Lindemann-Gilvarryschen* Theorie [9] neu berechnet. Diese Theorie setzt die mittlere Amplitude der thermischen Schwingungen der Atome beim Schmelzpunkt proportional der Entfernung der nächsten Nachbarn im Kristall-Gitter. Man nimmt allgemein an, daß das Eisen des äußeren Erdkerns in der δ -Phase, das des inneren in der γ -Phase kristallisiert. Um den Dichtewerten von *K. E. Bullen* gerecht zu werden, habe ich zusätzlich angenommen, daß der innere Erdkern aus Nickel (das in der γ -Phase kristallisiert) besteht. Es ist klar, daß ein Wechsel des Kristallsystems die Höhe der Schmelzpunkttemperatur beeinflußt. Die *Gilvarrysche* Theorie scheint den Rechnungen von *Jacobs* und *Simon* überlegen zu sein. Meine vorläufigen Ergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt ⁴⁾.

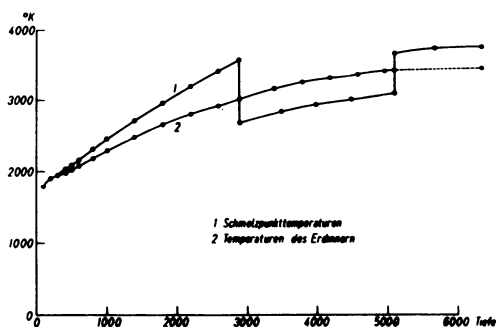


Abb. 8: Die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers.

⁴⁾ Mit einer aktuellen Temperatur von $T_0 = 3000^\circ\text{K}$ an der Grenze zwischen Erdkern und -mantel liegt die vorgeschlagene Temperatur in der Mitte zwischen $T_0 \approx 4600^\circ\text{K}$ [J. J. Gilvarry: Temp. in the earth's interior. J. Atm. Terr. Physics Vol. 10, No. 1 S. 24 (1957)] und $T_0 \approx 2500$ [J. Verhoegen: Thermal expansion of Solids and the Temp. at the Boundary of the core. Trans. Atm. Geophys. Union, Vol. 36, No. 5, S. 866 (1955)], während J. A. Jacobs $T_0 = 3600^\circ$ erhält. [J. A. Jacobs: The earth's interior im Hdb. d. Physik, Bd. XLVII, Geophysik I, herausgegeben von J. Bartels, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956].

Die Theorie der elektrischen Leitfähigkeit im gesamten Erdkern ist nach den soeben dargelegten Ergebnissen die der Übergangsmetalle Eisen und Nickel bei Temperaturen von etwa 3000°K und den Drucken von mehr als $1 \cdot 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$. Es erscheint möglich, die bisherigen Ergebnisse der

Theorie auf Grund des Bändermodells dieser Metalle auszudehnen und H. Mikis Ansatz zu sichern.

Eine dritte notwendige Voraussetzung für die Existenz des erdmagnetischen Hauptfeldes ist wahrscheinlich die, daß die Erde rotiert.

Eine einfache Unterscheidung kann man in der folgenden Weise gewinnen. Man kann nach E.C. Bullard ([31] S. 110) den Wärmestrom, der aus dem Erdkern an die Oberfläche der Erde gelangt, günstigstenfalls zu $0,3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$ annehmen. Davon kann die Hälfte

als die Kondensations- und Schmelzwärme des Silikats an der Oberfläche des Erdkerns angenommen werden, während die andere Hälfte aus dem Wachstum des inneren Erdkerns stammen dürfte. Wenn man $1,5 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$ in erg für die obersten Schichten des

äußeren Erdkerns ausdrückt, erhält man $\frac{6,3}{(0,547)^2} = 19 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$. Diese Energiestrom-

dichte erhält man auch, wenn man das Wiedemann-Franzsche Gesetz [S. Chapman and T.G. Cowling: The math. Theory of nonuniform gases, Cambridge 1953, S. 316] in der folgenden Weise benutzt. Die Wärmeleitfähigkeit ist: $\kappa_\omega = 2,44 \cdot 10^{-1} T \cdot \kappa_e \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$,

wenn T [°K] und κ_e [$\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] gegeben sind. $\kappa_e = 3 \cdot 10^3$ [$\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$]. $\vec{j}_\omega = \kappa_\omega \frac{\partial T}{\partial r} = 0,244 \cdot \kappa_e T \frac{\partial T}{\partial r} = 0,73 \cdot 10^3 T \frac{\partial T}{\partial r}$.

Für die vom Verfasser vorgeschlagene Temperaturverteilung ergibt sich $T = 3000^\circ\text{K}$, $\frac{\partial T}{\partial r} = 3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{cm}} \right]$

$$|\vec{j}_\omega| = 7 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$$

für die von J. Gilvarry errechnete dagegen

$$T = 4600^\circ\text{K}, \frac{\partial T}{\partial r} = 1 \cdot 10^{-5} \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{cm}} \right]$$

$$|\vec{j}_\omega| = 34 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$$

Die wirkliche Temperaturverteilung scheint mehr der des Verfassers zu ähneln, aber etwas größere Werte aufzuweisen, während die von J. Gilvarry zu große Werte liefert, wenn nicht die elektrische Leitfähigkeit $\kappa_e = 3 \cdot 10^3$ [$\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$] zu hoch angenommen wird.

Verschiedene Autoren (ich nenne *H. Takeuchi* und *Y. Shimazu* [24] und *E.C. Bullard* und *H. Gellman* [25]) haben versucht, unter Annahme konstanter elektrischer Leitfähigkeit und geeigneter Randbedingungen im Erdkern die Existenz des erdmagnetischen Hauptfeldes im Sinn einer Dynamotheorie aus den hydromagnetischen Differentialgleichungen heraus zu beweisen. Die hydromagnetischen Differentialgleichungen sind eine Kombination der *Maxwellschen* Gleichungen für mäßig bewegte leitende Materie mit den *Eulerschen* Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

$$(5a) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathfrak{F} + [\vec{j} \times \mathfrak{B}] - 2\rho [\vec{\Omega} \times \mathbf{v}] + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

$\mathbf{S}$ = Spannungstensor

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(5b) \quad [\nabla \times \mathfrak{E}] = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad [\nabla \times \mathfrak{H}] = \vec{j}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathfrak{D} = \rho_e \quad (\text{el. Raumladungsdichte})$$

$$\vec{j} = \kappa_e (\mathfrak{E} + [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}])$$

Bei den hier zu betrachtenden Feldern kann man den Verschiebungsstrom $\mathfrak{D}$ und den Konvektionsstrom $\rho_e \mathbf{v}$ vernachlässigen [10], [27]. Das System der elektromagnetischen Gleichungen kann man zu dem folgenden zusammenfassen:

$$(6) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}] + \nu_m \nabla^2 \mathfrak{B}$$

mit $\nu_m = \frac{1}{\mu \kappa_e}$, nach *Elsasser* [10] die magnetische Zähigkeit genannt.

Das Problem der Entstehung des erdmagnetischen Feldes fordert eine großräumige Betrachtung. Wir formen deshalb um:

$$(6a) \quad [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathfrak{B}]] = (\nabla \cdot \{ \mathfrak{B} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathfrak{B} \})$$

$\mathfrak{B} \circ \mathbf{v}$ ist das tensorielle Produkt von $\mathfrak{B}$ und $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \circ \mathfrak{B}$ dasjenige von $\mathbf{v}$ und $\mathfrak{B}$. In der geschweiften Klammer von (6a) befindet sich der antisymmetrische Teil von $[\mathfrak{B} \circ \mathbf{v}]$. Wir wenden auf die umgeformte Gleichung

$$(6) \text{ den Operator } \bar{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} f(\mathbf{r}, t + \Theta) d\Theta \text{ an, wobei } t_0 \text{ von der}$$

Größenordnung von 1 – 10 Tagen aus noch zu besprechenden Gründen sein soll.

Man erhält bei konstant angenommenem ν_m

$$(6b) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\bar{\mathfrak{v}} \times \bar{\mathfrak{B}}]] + \nabla \cdot \{ \overline{\mathfrak{B}' \circ \mathfrak{v}' - \mathfrak{v}' \circ \mathfrak{B}'} \} + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Wenn man kartesische Koordinaten einführt, $\mathfrak{B} = \{ B_i \}$, $i = 1, 2, 3$ und $\mathfrak{v} = \{ v_k \}$, $k = 1, 2, 3$, so enthält die geschweifte Klammer Ausdrücke der Form $\overline{B'_i v'_k} - \overline{B'_k v'_i} = m_{ik}^2(0) - m_{ki}^2(0)$, die also einen antisymmetrischen Tensor bilden. Die Produkte sind über das Zeitintervall t_0 gemittelt.

Eine bestimmte Kombination der Zusatzvektoren $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{v}' B'_i v'_k$ ist nicht unabhängig von den vorangegangenen. Man kommt zu ihrer durchschnittlichen Lebensdauer auf statistischem Wege. Man glättet die statistische Verbindung der Wertevorräte B'_i und v'_k im Intervall t_0 , wenn man im Zeitpunkt t_1 die folgenden Integrale bildet.

$$B'_i(g) = \frac{1}{g} \int_0^g B'_i(t_1 + \theta_1) d\theta_1 \quad v'_k(g) = \frac{1}{g} \int_0^g v'_k(t_1 + \theta_2) d\theta_2$$

Nun bildet man wieder

$$\overline{B'_i(g) v'_k(g)} = m_{ik}^2(g)$$

und es gilt

$$m_{ik}^2(g) < m_{ik}^2(0)$$

Der Ausdruck

$$r_{ik}(g) = \frac{g m_{ik}^2(g)}{m_{ik}^2(0)}$$

würde nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für diskrete Wertevorräte (bei denen die Integrale durch Summen zu ersetzen wären), die keine Erhaltungstendenz haben, gleich eins sein. Das kann man für die physikalischen Größen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{v}'$ nicht annehmen, schon weil wir sie als kontinuierliche Funktionen ansetzen müssen. Man wird also für $r_{ik}(g)$ Werte größer als eins erhalten. Wir postulieren nach dem Vorbilde von *J. Bartels* [28], daß die $r_{ik}(g)$ mit bis g_m wachsendem g , wobei $g_m < t_0$ bleibt, praktisch einem Grenzwert zustreben.

$$r_{ik}(g_m) \rightarrow r_{ik}(g_m) \equiv r_{ik}$$

$g \rightarrow g_m$

Diese Annahme setzt über die Struktur der strömenden Flüssigkeit voraus, daß die Turbulenzkörper (=einigermaßen homogene, laminar-strömende Bereiche) mit bestimmten Ausmaßen, die mit den τ_{ik} zusammenhängen, weit häufiger als die übrigen vorkommen. Innerhalb solcher Bereiche ist $\mathbf{v}'$ und damit $\mathbf{v}$, weil sich $\mathbf{v}$ räumlich (außerhalb von Grenzschichten) wenig veränderlich zeigen dürfte, einigermaßen konstant. Im allgemeinen wird gelten $|\mathbf{v}'| > |\mathbf{v}|$. Die Zeitdauer, in der sich der Aufpunkt r_a in einem solchen Bereich befindet, wird im Durchschnitt etwa von der Größenordnung der τ_{ik} sein. Während dieser Zeit wird sich die Dichte der Materie innerhalb des Bereiches wenig ändern, so daß auch der $\text{div } \mathbf{v} = 0$ angenommen werden kann. Im Inneren solcher Bereiche können an der Gleichung (6) einige Vereinfachungen vorgenommen werden. Wir schreiben sie:

$$(6c) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \underbrace{\mathbf{v} (\nabla \cdot \mathfrak{B})}_0 + \underbrace{(\mathfrak{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_0 - \underbrace{\mathfrak{B} (\nabla \cdot \mathbf{v})}_0 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathfrak{B} + \nu_m \nabla^2 \mathfrak{B}$$

Die Elemente der lokalen Dyade $\{\nabla \circ \mathbf{v}\}$ sind nach dem soeben Gesagten wenig von null verschieden, so daß auch der zweite Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Es erscheint daher vernünftig zu sein, den folgenden Ansatz zu machen:

$$(7) \quad \mathfrak{B}' = - \mathbf{v}' (\overline{\tau_{ik}}) \{ \nabla \circ \mathfrak{B} \}$$

Man erhält ihn, wenn man in (6c) zur Differenzengleichung übergeht. Die $\overline{\tau_{ik}}$ sind sicher kleiner als die soeben definierten τ_{ik} , weil das letzte Glied der Gleichung (6c) auf der rechten Seite ein Dämpfungsglied ist. Es wird $|\mathfrak{B}'| < |\mathfrak{B}|$ angenommen:

Wenn man mit dem Ansatz (7), der in Turbulenzkörpern des Erdinneren vom vertikalen Ausmaß von etwa 1 km sicher noch erlaubt ist, in (6b) einsetzt, erhält man

$$(8) \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathfrak{B}}]] - \nabla \cdot \mathfrak{A}'' \{ \nabla \circ \mathfrak{B} \} + \nu_m \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}},$$

$\mathfrak{A}''$ = antimetr. Teil des kinemat. Austauschensors.

Wenn man noch annimmt, daß in Schichten gewissen Ausmaßes $\mathfrak{A}''$ eine räumlich konstante Größe ist, so erhält man, wenn man außerdem $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ setzt

$$(8a) \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathfrak{B}}]] - (\mathfrak{A}'' - \nu_m E) \nabla^2 \overline{\mathfrak{B}}$$

E soll den Einheitstensor bezeichnen.

Man findet, daß in Gebieten, in denen der Austauschtensor ausgesprochen unsymmetrische Gestalt hat, also in der Nähe der Grenzschichten, die Wirkung des Dämpfungsgliedes, das für die Erzeugung der *Jouleschen* Wärme verantwortlich ist, kompensiert oder sogar überkompensiert werden kann. Mit anderen Worten:

Man könnte wahrscheinlich einen Verstärkermechanismus finden, der zum Aufbau großräumiger Magnetfelder führt, wenn in den Turbulenzelementen Zusatzfelder $\mathfrak{B}'$ von einer nicht zu vernachlässigenden Größe vorkommen. Anfängliche äußerst schwache Magnetfelder sind immer vorhanden. Die Frage ist nur, ob sie durch einen Mechanismus, wie ihn wohl *G. K. Batchelor* [27] zuerst geschildert hat, so verstärkt werden können, daß sie als Vektor $\mathfrak{B}'$ der Gleichung (8) angesehen werden können. Wir wollen diesen Mechanismus hier als "hydromagnetischen Effekt" bezeichnen. Er besteht darin, daß ein bedeutender Teil der Bewegungsenergie der turbulenten Strömung in die turbulenten Magnetfelder fließt. Dieser Effekt scheint im äußeren Erdkern nicht einzutreten. Sein Auftreten hat nach *G. K. Batchelor* als Voraussetzung (wegen des exakten Beweises siehe [26]), daß die "*Batchelorsche*" Kennzahl

$$(9) \quad B_a = \frac{\nu^*}{\nu_m} > 1 \quad \text{gilt.}$$

Es ist $B_a = 4 \pi \kappa_e \nu^*$, wenn $\mu' = 1 \left(\frac{\mu}{\mu_0} = \mu' \right)$ und wenn die Leitfähigkeit in [e m E] und ν^* in [c g s]-Einheiten angegeben wird. $\nu^* = 1 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \right]$ nach [5] und $\kappa_e \approx 1 \cdot 10^{-6}$ [e m E]. Auf keine Weise kann im Inneren der Erde der hydromagnetische Effekt eintreten. Man kann also die $\bar{\tau}_{ik}$ von $\mathfrak{A}'$ sämtlich gleich null setzen, so daß die Gleichung (8a) sich auf die folgende reduziert:

$$(8b) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{B}}}{\partial t} = [\nabla \times [\bar{\mathfrak{v}} \times \bar{\mathfrak{B}}]] + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Die meisten Autoren sind der Ansicht, daß in Räumen mit den Ausmaßen des äußeren Erdkerns ein hydromagnetischer Effekt eintritt, obwohl das Spectrum von $\mathfrak{B}'$ in den kleineren Dimensionen keine Werte hat. Um diese Ansicht klar zu machen, soll über die von (8b) dargestellten Vektorfelder eine erneute zeitliche und räumliche Mittelung über Räume mit den Ausmaßen von etwa $10 \div 100$ [km] vorgenommen werden. Die gemittelten Vektorfelder sollen durch einen doppelten Querstrich gekennzeichnet werden. In ihnen ist wahrscheinlich das Vorhandensein von Grenzschichten nicht mehr zu erkennen. Wir setzen voraus, was aber nicht vollständig erfüllt sein dürfte, daß gilt: $\text{div } \bar{\bar{\mathfrak{v}}} = 0$, und erhalten, weil jetzt der Austauschensor als symmetrisch angenommen werden kann,

$$(8c) \quad \frac{d \bar{\mathfrak{B}}}{dt} = (\bar{\mathfrak{B}} \cdot \nabla) \bar{\mathfrak{b}} + \nu_m \nabla^2 \bar{\mathfrak{B}}$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt einen Vorgang, bei dem die Kraftlinien des ausgeglichenen Magnetfeldes durch die ausgeglichenen Bewegungen der Materie entweder gereckt oder gestaucht werden, so daß ihr Energieinhalt auf Kosten desjenigen der mechanischen Energie verstärkt wird, wenn die Energiedissipation der Magnetfelder durch Erzeugung Joulescher Wärme genügend schwach ist. Das ist der Fall, wenn nach *Batchelor*

$$(9a) \quad \frac{\bar{v} L}{\nu_m} > 1 \quad \text{gilt.}$$

Man kann diese Größe auch als *Batchelorsche Zahl* auffassen in einer ausgeglichenen Strömung $\bar{\mathfrak{b}}$, bei der die Mittelwerte über Räume von den Ausmaßen $(a_1 - a_2)$, der radialen Erstreckung des äußeren Erdkerns, gebildet werden. Man kann sie deshalb auch schreiben

$$(9b) \quad \frac{\bar{v}^2 \bar{r}}{\nu_m} > 1$$

Solche turbulenten Schwankungen größten Ausmaßes sind wahrscheinlich im Erdinneren vorhanden. Man kann sie erstens aus den schönen Modellversuchen von *R. Hide* erschließen. Danach müßte eine Strahlströmung in einigen Mäandern (oder auch nur einer Schwingung) zwischen dem wärmespendenden inneren Erdkern und der Untergrenze des Erdmantels vorhanden sein. Man kann zweitens folgende Feststellung als Beweis für ihre Existenz ansehen:

Die irreguläre säkulare Änderung der Tageslänge kann man wahrscheinlich nur erklären, wenn man annimmt, daß sich die Zirkulationsströmung im äußeren Erdkern ändert [29].

Wenn der Erdkern ebenso starr wie der Erdmantel rotieren würde, wäre der Durchschnitt des Wirbelvektors

$$\bar{\omega}_d = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{\mathfrak{b}}_d,$$

über alle Flächen $R = r \sin \theta = \text{const}$, die im Inneren des Erdkerns liegen, genommen, konstant. Er ist indessen eine Funktion von R . Eine Zunahme der Konvektionsströmungen senkrecht zur Drehachse der Erde hat zur Folge, daß $\bar{\omega}_d$ in der Nähe des inneren Erdkerns zunimmt, in der Nähe des Erdmantels dagegen abnimmt. Er ist also eine monoton abnehmende Funktion

von R , die im Intervall zwischen $0 \leq R \leq a_1 \sin \theta$ einmal den Wert $\bar{\bar{\omega}}_1$ annimmt, den der Erdkern haben müßte, wenn er wie eine starre Kugel rotieren würde.

Wir nehmen an, daß bei diesem konvektiven Austausch die Reibungswärme zu vernachlässigen ist und daß gilt:

$$(10) \quad \mathfrak{D}_{1m} = \int_{(E.K.)} (\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{v}}_d) dm = \text{Const}$$

$dm = \text{Massenelement,}$
 $(E.K.) = \text{Erdkern,}$

wobei also vorausgesetzt wird, daß die Kopplung zwischen den Bewegungen des Erdkerns und denen des Erdmantels zu vernachlässigen ist. Wir können (10) auch schreiben:

$$(10a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D}_{1m} = 0 = \int_{(E.K.)} \bar{\bar{\omega}}_d^{\cdot} (R) ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) E - \{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\}) dm = \int_{(E.K.)} \bar{\bar{\omega}}_d^{\cdot} dI_1$$

$$= \bar{\bar{\omega}}^{\cdot} I_1$$

wobei R den Abstand von der Drehachse und I_1 die Trägheitsdyade des Erdkerns bezeichnen soll.

Wenn die zeitlichen Schwankungen von $\mathfrak{D}_{1m}$ die Ursache der irregulären säkularen Schwankungen sein sollen, muß eine Kopplung zwischen den Bewegungen des Erdkerns und denen des Erdmantels vorhanden sein. Diese Kopplung kann, wie *S. K. Runcorn* ansetzt, mechanischer Natur sein; sie könnte auch, wie *E. C. Bullard* annimmt, elektromagnetischer Natur sein. Wir werden sehen, daß sich die *Bullardsche* Annahme kaum halten läßt, während die von *Runcorn* plausible Aussagen über den Austauschtensor der Strömungen des äußeren Erdkerns und damit über die Größe der Zusatzgeschwindigkeiten erlaubt.

Der gesamte Drehimpuls der Erde $\mathfrak{D}_m$ setzt sich additiv zusammen aus dem des Erdkerns $\mathfrak{D}_{2m}$ und dem des Erdmantels $\mathfrak{D}_{3m}$, und es muß gelten

$$(11) \quad \mathfrak{D}_{2m}^{\cdot} + \mathfrak{D}_{3m}^{\cdot} = 0$$

ganz abgesehen von der Kopplung und der sie charakterisierenden Relaxationszeit. Wir denken uns dabei, daß wir über Zeiträume gemittelt haben, die groß sind gegenüber der Relaxationszeit (etwa über einige Jahre). Das muß möglich sein, weil sonst ein detaillierter Verlauf der Änderung der Länge des Jahres (Abb. 9) nicht zu erwarten ist. $\mathfrak{D}_{2m}^{\cdot}$ ist nicht mit $\mathfrak{D}_{1m}$ zu identifizieren. Es gelten nach (10a) und (11)

$$(11a) \quad \bar{\bar{\omega}}_2 I_1 + \bar{\bar{\omega}}_3 I_3 = 0$$

und

$$|\bar{\bar{\omega}}_2| > |\bar{\bar{\omega}}_3|,$$

wegen der Reaktion des Erdmantels.

Wir interessieren uns hier nur für die axialen Komponenten $\bar{\bar{\omega}}_2$ und $\bar{\bar{\omega}}_3$ von $\bar{\bar{\omega}}_2$ bzw. $\bar{\bar{\omega}}_3$ und nehmen ferner an, daß die Rotationsachse eine Hauptachse der Trägheitsdyade ist. Für eine genügend kleine Zeiteinheit δt kann man dann für Gleichung (11a) schreiben:

$$(11b) \quad \delta v_{\phi a} \equiv a_1 \delta \bar{\bar{\omega}}_2 = -a_1 \delta \bar{\bar{\omega}}_3 \frac{I_{31}}{I_{11}}$$

wobei I_{31} und I_{11} die axialen Trägheitsmomente von Erdmantel bzw. Erdkern sind. Um ihr Verhältnis zu berechnen, nehmen wir ganz grob an, daß die Dichte ρ des Erdmantels eine konstante Größe und $3,5 \rho$ die Dichte des Erdkerns sei [31].

Dann ist

$$(11c) \quad \frac{I_{31}}{I_{11}} = \frac{1}{3,5} \left(\left(\frac{a}{a_1} \right)^5 - 1 \right) \approx 5,5$$

Ferner gilt

$$(11d) \quad \delta \bar{\bar{\omega}}_3 = - \frac{2\pi \delta \tau}{(8,54)^2 \cdot 10^8} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right], \quad \text{rad} = \text{Radiant},$$

wenn $\delta \tau$ die Anzahl von Sekunden ist, die den mittleren Tag von 86 400 sec verlängern. $a_1 = 3,473 \cdot 10^8$ cm.

Wenn man (11c) und (11d) in (11b) einsetzt, erhält man für die Änderung der tangentialen Geschwindigkeit am Äquator des Erdkerns

$$(11e) \quad \delta v_{\phi a} = + \frac{2\pi \cdot 3,473}{(8,64)^2} \frac{I_{31}}{I_{11}} \delta \tau \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right], \quad [\delta \tau] = [\text{sec}]$$

$$\delta v_{\phi a} = 1,6 \delta \tau \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right],$$

wenn $\delta \tau$ in Sekunden der Änderung der Tageslänge angegeben wird.

Nach Abbildung 9 können Änderungen der Länge des Jahres bis $\pm 1,9$ sec, also Änderungen der Länge des Tages bis $\pm 7 \cdot 10^{-3}$ [sec] vorkommen, das sind Geschwindigkeitsänderungen bis

$\delta v_{\phi g} \approx \pm 1,1 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right] \approx \pm 0,11 \left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}} \right]$. Die Geschwindigkeit selbst kann um eine oder höchstens um zwei Größenordnungen größer sein. Wegen (11a), d. h. wegen der monotonen Abnahme von $\bar{\omega}_d(R)$ mit wachsendem R ist sie relativ zum Erdmantel ebenfalls nach Osten gerichtet. Ihre Richtung stimmt nicht überein mit den Richtungen an der Oberfläche des Erdkerns.

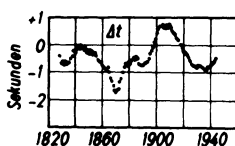


Abb. 9: Änderungen der Länge des Jahres in Sekunden als Funktion der Zeit.

Über die westwärtige Drift der Schichten am oberen Erdkernrand kann man Aufschluß erhalten, wenn man annimmt, daß der hydromagnetische Effekt für Strömungen großen Stils im Erdkern wirklich vorhanden ist. Die Gleichung (8c) mit zu vernachlässigendem v_m hat nämlich die Gestalt der Wirbelgleichung für reibungsfreie, kompressible Flüssigkeitsströmungen. Aus ihr muß sich also ein Analogon zu dem *Helmholtz*schen Wirbelsatz ableiten, das aussagen muß, daß die Materie an den magnetischen Kraftlinien haftet oder daß diese in die Materieströmung eingefroren sind. Dann kann man aus der westwärtigen Wanderung des erdmagnetischen Feldes von 18 ± 2 [°/100 Jahre] auf die Geschwindigkeit der Materie am Äquator des Erdkerns schließen.

$$v_{\phi gm} = 0,34 \pm 0,04 \left[\frac{\text{mm}}{\text{sec}} \right].$$

Diese Geschwindigkeit müßte mit den durchschnittlichen Bewegungen des Erdkerns zu tun haben, wenn das Eintreten des hydromagnetischen Effektes vorausgesetzt wird. Eine Verstärkung der Konvektion müßte sich in der Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes ausdrücken. Es müßte also eine Korrelation zwischen der Änderung der Tageslänge und den Wanderungen des erdmagnetischen Feldes bestehen. In Abb. 10 wurde versucht, die Änderungen der Stärke und der Lage des erdmagnetischen Dipols mit δr zu korrelieren. Auch die Lage und die Stärken des Quadrupols wurden mit δr korreliert und im Gegensatz zu *E. H. Vestine* kein von null verschiedener Korrelationskoeffizient gefunden. Die Größenordnungen der auftretenden Geschwindigkeiten sind aber so beschaffen, daß eine gegenseitige Beziehung zu erkennen sein müßte. Es ist allerdings zu bemerken, daß $v_{\phi g}$ nach Osten, $v_{\phi gm}$ nach Westen gerichtet ist. Ferner müßten, wenn

der hydromagnetische Effekt im Erdkern vorhanden wäre, alle Bewegungen in Ebenen senkrecht zur Rotationsachse verlaufen, worüber noch gesprochen werden wird. Die Analyse der Bewegungen des Magnetfeldes der Erde zeigt aber, daß besonders beim Quadrupolfeld auch meridionale Wanderungen vorkommen. Außerdem ist zu bemerken, daß die Konvergenz der Reihen, die *E. C. Bullard* und *H. Gellman* als Lösung des Problems gewinnen, unbefriedigend konvergieren⁵⁾.

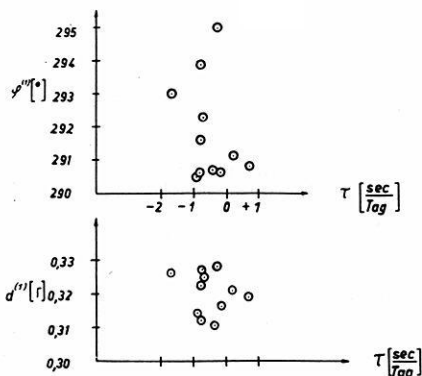


Abb. 10: Korrelationstabelle der Änderungen der Tageslänge und der Lage der Intensität des geomagnetischen Dipols.

Zu c)

Der Schluß, der aus den bisherigen Ausführungen zu ziehen ist, ist vielleicht der folgende:

Die Entstehung des erdmagnetischen Hauptfeldes beruht nicht auf dem

5) Zu dem selben Schluß gelangt man auf Grund einer neuen Arbeit von H. Takeuchi: The Dynamo theorie of the Earth' main magnetic field. J. Phys. Earth Vol. 4, No. 1, S. 11 (1956). Der Grund liegt wohl darin, daß die in den Dynamotheorien angenommenen Geschwindigkeitsverteilungen nicht den wirklichen Verhältnissen entsprechen. Eine andere Fassung der Induktionstheorie stammt von E.N. Parker: Hydromagnetic Dynamo modells Ap. J. 122 S. 293 (1955). Siehe auch [10]. Danach entsteht das Dipolfeld durch eine Zyklonentätigkeit in den tieferen Schichten des Erdkerns. Das vorausgesetzt, wird es auch möglich, die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes auf dem Boden der Induktionstheorien zu verstehen. Siehe H. Takeuchi und W.M. Elsasser: Fluid motions near the earth's core boundary. J. Phys. Earth Vol. 2, S. 39 (1955), W.M. Elsasser und H. Takeuchi: Nonuniform rotation of the Earth and geomagnetic drift. Trans. Am. Geophys. Union Vol. 36, No. 4, S. 584 (1955) und Probleme der Geophysik, herausgegeben von G. Fenselau, Magnetismus III, 12. Kapitel: Ein Abriß der Physik des Erdinnern, hydromagnetische und andere Theorien des erdmagnetischen Hauptfeldes von O. Lucke. Dt. Verlag der Wiss. Berlin (im Druck).

hydromagnetischen Effekt und betrifft nicht den ganzen Erdkern. Das Feld entsteht vielmehr in einer sehr seichten Schicht an seiner Oberfläche. Dort wird noch eine Zirkulationsbewegung angenommen, die wesentlich größere Geschwindigkeiten als die bisher betrachteten aufweist. Sie muß zustande kommen, weil die großräumigen Konvektionsbewegungen im wesentlichen auf Ebenen senkrecht zur Rotationsachse der Erde beschränkt sind. Das folgt daraus, daß die Coriolis-Kraftdichten bei weitem die größten Kraftdichten auf der rechten Seite der erweiterten *Eulerschen* Gleichungen sind (*Taylor-Effekt*). Die Richtigkeit dieser Folgerung ist überall in den Atmosphären der Planeten und der Sonne bestätigt.

Die Konvektionsströmungen werden also Wärme am Äquator der Obergrenze des äußeren Erdkerns ansammeln. Dort wird auch der Transport von Impuls stattfinden. In der Grenzschicht des sehr scharfen Überganges zwischen Erdmantel und Erdkern sind die Reibungskräfte etwa von der Größenordnung der Coriolis-Kräfte. Dort kann sich eine seichte Zirkulation ausbilden, die den Wärmetransport zwischen dem Äquator und den Polen des äußeren Erdkerns besorgt. Sie ist außerhalb der Äquatorbereiche nach Osten und Norden bzw. Süden gerichtet und weist vielleicht nur ein Blatt (im Sinne *R. Hides*) auf. Wo das flüssige Metall an die Gesteine des Erdmantels grenzt, macht sich eine Art *Tolman-Effekt* bemerkbar, wie ihn Prof. *Lochte-Holtgreven* und Mitarbeiter an hochionisierten Plasmen studiert hat [12]. Die Elektronen des Materials folgen der Bremsung des Metalls in der Grenzschicht nicht. Wenn man Geschwindigkeiten von einigen cm/sec zuläßt, kommt nach einer einfachen Rechnung auf Grund der *Schlüterschen* Gleichungen für hochionisierte Plasmen ein genügend starker Effekt heraus. Er würde Stromelemente hervorbringen, die sich innerhalb der Turbulenzelemente nicht schließen, weil außerhalb der Grenzschicht Elektronen und Ionen die gleiche Geschwindigkeit haben. Sie würden zu großräumigen Magnetfeldern, wie es das Erdfeld eins ist, Anlaß geben. Man könnte auf diese Weise erklären, warum der Magnetpol der Erde nicht mit dem geographischen Pol übereinstimmt. Ferner könnte man einige Ergebnisse der Hydrodynamik der Atmosphären auf den äußeren Erdkern anwenden. Z.B. würde die Westwärtswanderung des erdmagnetischen Feldes, insbesondere die des Quadrupolfeldes, als Westwärtswanderung langer hydrodynamischer Wellen im Sinne von *Rossby* verstanden werden ⁶⁾.

6) Die quantitative Begründung des Vorschlages mit Hilfe der Dynamik der Plasmen, deren Elektronengas entartet ist, stößt auf Schwierigkeiten, solange nicht Geschwindigkeiten von $10 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$ und mehr und eine ostwärts gerichtete Zirkulation angenommen werden können. Da auch die anderen plasmatheoretischen Effekte zu schwach sind, um ein Feld wie das Dipolfeld der Erde zu erklären, (siehe D.R. Inglis: *Theories of the Earth's Magnetism*. Rev. Mod. Physics 27, No. 2, S. 212 (1955), erscheinen die Entwicklungen von E.N. Parker und W.M. Elsasser zur Zeit die besten Erklärungen für seine Existenz zu sein.

Literatur

- [1] *Bullard, E. C. u. a.*: Phil. Transact. Roy. Soc. 273, S. 67 (1950).
- [2] *Macht, H. G.*: Transact. Am. Geophys. Union 32, S. 555 (1951).
- [3] *Bullard, E. C.*: Proc. Roy. Soc. London 197, S. 433 (1949).
- [4] *Mauersberger, P.*: Abh. Nr. 5 des geophysik. Inst. Potsdam, (1952).
- [5] *Miki, H.*: J. Phys. of the Earth 1, S. 67 (1952).
- [6] *Vestine, E. H.*: J. of Geophys. Res. 58, S. 127 (1953).
- [7] *Birch, Francis*: J. Geophys. Res. 57, S. 227 (1952).
- [8] *Knopoff, L. und Uffen, R. J.*: J. Geophys. Res. 59, S. 471 (1954).
- [9] *Gilvarry, J. J.*: Phys. Rev. 102, S. 308 ff. (1956).
- [10] *Elsasser, W. M.*: Rev. Mod. Phys. 28, S. 135 (1956).
- [11] *Hide, R.*: Quarterly Journal of Roy. Met. Soc. London 79, S. 161.
- [12] *Lochte-Holtgreven, u. a.*: Die Naturw. 40, S. 387 (1953).
- [13] *Urey, H. C.*: Ann. d. Géophys. Tome II Nr. 1, S. 65 (1955).
- [14] *Suess, H. E. and Urey, H. C.*: Rev. Mod. Phys. 28, Nr. 1, S. 53 (1956).
- [15] *Kuiper, G. P.*: The origin of earth and planets, J. Geophys. Res. 61, Nr. 2, S. 398 (1956).
- [16] *Urey, H. C.*: Astrophys. J. Suppl. Ser. 1, S. 147 (1955).
- [17] *Gutenberg, B.*: Internal Constitution of the Earth, Dover Publ. 1951.
- [18] *Reasbeck, P. u. Mayne, K. I.*: Nature 176, S. 186 (1955).
- [19] *Uhlig, H. H.*: Geochim. et Cosmochim. acta Vol 6, S. 282 (1954), Vol 7, S. 24 (1955).
- [20] *Gombás, P.*: Die statist. Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Vol 7, S. 34 (1955), Wien 1949.
- [21] *Bullen, K. E.*: An introduction of the Theory of Seismology, Cambridge 1953.
- [22] *Shimazu, Y.*: The J. Earth Sciences, Nagoya Univ. 3, Nr. 2, S. 85 (1955).
- [23] *Jeffreys, H.*: The Earth, Cambridge 1952.
- [24] *Takeuchi, H. u. Shimazu, Y.*: J. Phys. Earth 2, 39 (1954).
- [25] *Bullard, E. C. u. Gellman, H.*: Phil. Transact. Roy. Soc. 247, 213 (1954).

- [26] *Lundquist, S.*: Arkiv för Fysik 5, Nr. 5, S. 297 (1953).
- [27] *Batchelor, S. K.*: Proc. Roy. Soc. (London) 201, S. 405 (1950).
- [28] *Bartels, J.*: Naturf. u. Medizin in Deutschland, Bd. 7, Teil V.
- [29] *Spencer-Jones, H.*: Hdb. der Physik, Bd. XLVII, Geophys. I., Herausgegeben von S. Flügge. Springer 1956.
- [30] *Runcorn, S. K.*: Transact. Am. Geophys. Union Vol. 35, S. 49 (1954).
- [31] *Kuiper, B. G.*: The Earth as a Planet, Chicago 1954, S. 94.