

## Werk

**Jahr:** 1970

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 Z NAT 2148:36

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN101433392X\_0036

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X\\_0036](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0036)

**LOG Id:** LOG\_0159

**LOG Titel:** Eine säkulare Schwingung des erdmagnetischen Quadrupolfeldes als Ursache einer Änderung der Erdrotation

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN101433392X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=101433392X>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# **Eine säkulare Schwingung des erdmagnetischen Quadrupolfeldes als Ursache einer Änderung der Erdrotation**

## **A Secular Oscillation of the Earth's Magnetic Quadrupole Field Causing a Change of the Earth's Rotation**

VON H. WILHELM, Göttingen<sup>1)</sup>

Eingegangen am 8. Juli 1970

*Zusammenfassung:* Für einen zonalen Anteil des erdmagnetischen Quadrupolfeldes, der eine Schwingung mit einer Periode von 100 Jahren ausführt, wird ein erzeugendes Geschwindigkeitsfeld im Erdkern berechnet und die Abhängigkeit der Dämpfung des Feldes von der elektrischen Leitfähigkeit des Erdmantels untersucht. Unter der Voraussetzung, daß es ein stationäres magnetisches  $T_1^0$ -Feld im Erdkern und im unteren Erdmantel gibt, wird das Drehmoment berechnet, das der mit dem  $T_1^0$ -Feld verbundene elektrische Strom in diesem zonalen Quadrupolfeld auf den elektrisch leitenden Erdmantel ausübt. Dabei wird die elektromagnetische Kopplung zwischen Erdkern und Erdmantel anhand eines Modells berücksichtigt, das auch eine einfache Deutung für die Westdrift des erdmagnetischen Feldes gibt. Durch eine harmonische Analyse des Ganges der Erde wird die Größe der 100jährigen Periode in der Änderung der Rotationsgeschwindigkeit des Erdmantels bestimmt. Durch Vergleich mit dem theoretisch berechneten Wert erhält man eine Aussage über die elektrische Leitfähigkeit im unteren Erdmantel und über die Größe des  $T_1^0$ -Feldes am Rand des Erdkerns.

*Summary:* For a zonal part of the earth's magnetic quadrupole field, which is varying with a period of 100 years, the inducing velocity field in the earth's core is calculated, and the attenuation of the field depending on the electrical conductivity of the earth's mantle is studied. When a stationary magnetic  $T_1^0$ -field is assumed in the earth's core and lower mantle, the torque can be calculated, which is caused by the Lorentz-force of the electric current related to the  $T_1^0$ -field and acting on the electrically conducting mantle in the zonal quadrupole field. The electromagnetic core-mantle coupling is taken into consideration by a model giving also a simple formal explanation of the westdrift of the earth's magnetic field. The resulting period of 100 years in the earth's rotation is determined by harmonically analysing the time derivative of the change of the length of the day. By comparison with the calculated value of the model under consideration the electrical conductivity of the lower mantle and the intensity of the  $T_1^0$ -field at the core-mantle boundary can be estimated.

---

<sup>1)</sup> Dr. HELMUT WILHELM, Institut für Geophysik der Universität Göttingen, 34 Göttingen, Herzberger Landstraße 180.

## 1. Einleitung

Eine Analyse der zeitlichen Änderung des erdmagnetischen Quadrupolfeldes in den Jahren von 1835 bis 1965 hat ergeben, daß darin ein zonaler Anteil enthalten ist, der gedeutet werden kann durch eine von NAGATA und RIKITAKE [1963] berechnete Eigenschwingung des Erdkerns [WILHELM 1969]. Es sei  $a$  der Erdradius und  $\theta$  die geographische Poldistanz, dann läßt sich das Potential dieses Quadrupolfeldes annähernd beschreiben durch den Realanteil von

$$V_2 = e^{i\omega t} g_2^0 a P_2(\cos \theta) \quad (1.1)$$

mit 
$$g_2^0 = 10^{-3} \Gamma, \quad (1.2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.3)$$

$$T = 100 \text{ Jahre}, \quad (1.4)$$

$$t = 0 \text{ zur Epoche } 1925.5. \quad (1.5)$$

Es ist bekannt, daß das zeitlich variable Erdmagnetfeld Kräfte auf den elektrisch leitenden Erdmantel ausübt, die zu irregulären Änderungen der Tageslänge führen können [VESTINE 1953]. In der vorliegenden Arbeit wird der Zusammenhang zwischen einer Änderung des Magnetfeldes und der Erdrotation für den speziellen Fall des erwähnten Anteils des Quadrupolfeldes untersucht. Er ist aus drei Gründen dafür besonders geeignet: 1. Periodisch variierende Vorgänge lassen sich in der Theorie leichter behandeln als aperiodische. 2. Die Periode von 100 Jahren gestattet es, sich auf die erst seit 1830 existierenden systematischen und genaueren Messungen des Erdmagnetfeldes und der Änderungen der Tageslänge zu beschränken. 3. Wegen der Kleinheit des betrachteten Anteils im Vergleich zum gesamten Quadrupolfeld und zum Dipolfeld kann man den Erzeugungsprozeß dieses Anteils unabhängig vom Dynamo- problem des erdmagnetischen Hauptfeldes behandeln.

Eine wichtige Rolle bei der Betrachtung der durch die Änderung des Erdmagnetfeldes verursachten Schwankungen der Erdrotation spielt die elektromagnetische Kopplung zwischen Erdkern und Erdmantel. In dieser Arbeit wird die Kopplung durch ein einfaches im Anhang beschriebenes Modell berücksichtigt.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Hauptteile: In den Abschnitten 2, 3 und 4 werden die Erzeugung und der Verlauf des Quadrupolfeldes mit dem Potential (1.1) im Erdinnern untersucht. Die Abschnitte 5 und 6 behandeln den Zusammenhang zwischen dem betrachteten Quadrupolfeld und der Erdrotation unter der Voraussetzung, daß es im Erdkern und im unteren Erdmantel ein stationäres toroidales Magnetfeld einfachster Struktur gibt. Daran schließt sich in Abschnitt 7 eine kurze Diskussion der in Tab. 2 dargestellten Ergebnisse an.

## 2. Aufstellung und Lösung der Ausgangsgleichung für den Bereich des Erdkerns

Die Erzeugung und Aufrechterhaltung des erdmagnetischen Hauptfeldes und die Erscheinungen der Säkularvariation können vermutlich bald durch einen im Erdkern stattfindenden Dynamoprozeß beschrieben werden. Bei einer vollständigen Behandlung dieses Problems sind bei vorgegebener Zustandsgleichung die Bewegungsgleichung und die Grundgleichungen für elektromagnetische Felder in langsam bewegten Medien mit dazugehörigen Randbedingungen zu lösen. Da Geschwindigkeiten und Magnetfelder in der Bewegungsgleichung in nichtlinearer Form auftreten, bereitet die Lösung dieses Problems erhebliche Schwierigkeiten.

Für die Behandlung des interessierenden Quadrupolfeldes soll angenommen werden, daß ein Dynamo existiert, dessen Geschwindigkeitsfeld durch  $V_D$  und dessen Magnetfeld durch  $H_D$  beschrieben werden. Der Geschwindigkeit  $V_D$  sei eine periodisch veränderliche Geschwindigkeit  $v$  überlagert, durch die ein Magnetfeld  $h$  erzeugt wird. Es sei

$$|h| \ll |H_D|, \quad (2.1)$$

also etwa

$$\left| \frac{h}{H_D} \right| \approx 10^{-2} \dots 10^{-3}. \quad (2.2)$$

Mit

$$H = H_D + h \quad (2.3)$$

und

$$V = V_D + v \quad (2.4)$$

erhält man unter der Voraussetzung, daß die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_K$  im Erdkern konstant ist, aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in langsam bewegten Medien die Grundgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial t} - (4\pi\sigma_K)^{-1} \Delta H = \text{rot}(V \times H) \quad (2.5)$$

im elektromagnetischen Maßsystem [RIKITAKE 1966]. Dabei wird der Verschiebungsstrom vernachlässigt, und die Permeabilität wird gleich 1 gesetzt.

Die Felder des Dynamoprozesses erfüllen nach Voraussetzung die Gleichung

$$\frac{\partial H_D}{\partial t} - (4\pi\sigma_K)^{-1} \Delta H_D = \text{rot}(V_D \times H_D). \quad (2.6)$$

Durch Einsetzen von (2.3) und (2.4) in (2.5) erhält man mit Berücksichtigung von (2.6)

$$\frac{\partial h}{\partial t} - (4\pi\sigma_K)^{-1} \Delta h = \text{rot}(v \times H_D) + \text{rot}(V_D \times h) + \text{rot}(v \times h). \quad (2.7)$$

Wegen (2.1) kann der letzte Summand auf der rechten Seite von (2.7) gegen den ersten vernachlässigt werden. Der zweite Summand muß gesondert abgeschätzt werden. Um die Größenordnung der Geschwindigkeit  $V_D$  feststellen zu können, braucht man in (2.6) nur das zweite Glied auf der linken Seite zu berücksichtigen. Mit einer typischen Länge von  $3,5 \cdot 10^8$  cm (Kernradius) und der Leitfähigkeit

$$\sigma_K = 10^{-6} \text{ emu} \quad (2.8)$$

folgt

$$|V_D| \approx 2,3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}. \quad (2.9)$$

Andererseits genügt es, bei einer Schwingungsdauer von 100 Jahren in Gleichung (2.7) nur das erste Glied auf der linken Seite bei der Abschätzung zu berücksichtigen.

Man erhält dann

$$\frac{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^8}{3,15 \cdot 10^9} |\mathbf{h}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{H}_D| + |V_D| |\mathbf{h}|. \quad (2.10)$$

Aus (2.9) und (2.2) ergibt sich als Abschätzung

$$|\mathbf{v}| \gtrsim |V_D|. \quad (2.11)$$

Wegen (2.1) kann daher auch der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung (2.7) gegen den ersten vernachlässigt werden, und man erhält die Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - (4\pi\sigma_K)^{-1} \Delta \mathbf{h} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_D). \quad (2.12)$$

Alle divergenzfreien Felder lassen sich eindeutig nach poloidalen und toroidalen Vektorfeldern entwickeln. Es wird angenommen, daß  $\mathbf{v}$  quellenfrei und ein sich harmonisch änderndes  $S_1^0$ -Feld ist. In der allgemein üblichen Schreibweise für poloidale und toroidale Vektorfelder hat  $\mathbf{v}$  die Form [RIKITAKE 1966]

$$\mathbf{v} = e^{i\omega t} \cdot \begin{cases} -2\eta(r) \cos \theta \\ \left( r \frac{d\eta}{dr} + 2\eta(r) \right) \sin \theta \\ 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

In (2.12) ist  $\mathbf{h}$  eine Summe von Feldern entsprechend den in  $\mathbf{H}_D$  vorhandenen poloidalen und toroidalen Magnetfeldern. Von dieser Gesamtheit interessiert nur ein  $S_2^0$ -Feld, das mit dem in (1.1) angegebenen Potential in Beziehung gebracht werden kann.

Eine Untersuchung der rechten Seite von (2.12) ergibt, daß der Ausdruck  $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_D)$  ein toroidales Feld ist, wenn  $\mathbf{H}_D$  ein toroidales Feld ist. Ein poloidales Feld wird durch  $\mathbf{v}$  höchstens bei Vorhandensein von poloidalen Anteilen in  $\mathbf{H}_D$  erzeugt. Der größte poloidale Anteil in  $\mathbf{H}_D$  dürfte das  $S_1^0$ -Feld sein. Dieses bildet an der Erdoberfläche das Dipolfeld. Da über den Verlauf dieses Feldes im Erdkern nichts bekannt ist, wird angenommen, daß es sich um ein konstantes Feld  $\mathbf{H}_0$  handelt — eine Annahme, die an der Kerngrenze sicherlich nicht erfüllt ist:

$$\mathbf{H}_0 = 2F \cdot \begin{cases} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Mit (2.14) ergibt sich als Ausgangsgleichung für die Behandlung des gesuchten  $S_2^0$ -Feldes  $\mathbf{h}_2$ :

$$\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial t} - (4\pi\sigma_K)^{-1} \Delta \mathbf{h}_2 = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0). \quad (2.15)$$

Dabei gilt für  $\mathbf{h}_2$  der Ansatz:

$$\mathbf{h}_2 = e^{i\omega t} \cdot \begin{cases} 6\xi(r) r P_2(\cos \theta) \\ \left( r \frac{d\xi}{dr} + 3\xi(r) \right) r \frac{dP_2}{d\theta} \\ 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Setzt man

$$\kappa^2 = 4\pi\sigma_K \omega, \quad (2.17)$$

so ergibt sich aus der Radialkomponente von (2.15) mit

$$z = \kappa r e^{3\pi i/4} \quad (2.18)$$

die Gleichung

$$z^2 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + 6z \frac{d\xi}{dz} + z^2 \xi(z) = \frac{8}{3} \pi \sigma_K F z \frac{d\eta}{dz}. \quad (2.19)$$

Das Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\xi_1(z) = z^{-2} j_2(z) \quad (2.20a)$$

und

$$\xi_2(z) = z^{-2} y_2(z). \quad (2.20b)$$

Dabei sind  $j_2(z)$  und  $y_2(z)$  sphärische Besselfunktionen 1. und 2. Art.

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (2.19) finden zu können, muß man Angaben über die Funktion  $\eta(r)$  machen, die die Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  vom Radius  $r$  beschreibt. Es wird angenommen, daß  $\eta(r)$  analytisch ist und sich durch ein Polynom 3. Grades in  $r$  bzw. in  $z$  darstellen läßt. Dann gilt der Ansatz

$$\frac{8}{3} \pi \sigma_K F z \frac{d\eta}{dz} = \sum_{n=1}^3 a_n z^n e^{-3\pi n/4}, \quad (2.21)$$

und als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich

$$\xi_3(z) = (6ia_3 - a_1)(24z^{-5} + 4z^{-3} + z^{-1})e^{i\pi/4} + za_3e^{-i\pi/4} + ia_2. \quad (2.22)$$

Die allgemeine Lösung von (2.19) ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \zeta(z) = & e^{i\pi/4} \{z^{-2}(Aj_2(z) - By_2(z)) \\ & + (6ia_3 - a_1)(24z^{-5} + 4z^{-3} + z^{-1}) - ia_3z + a_2e^{i\pi/4}\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

In dieser Lösung sind 5 freie Konstanten, nämlich  $A$ ,  $B$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  enthalten. Eine Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der Forderung, daß  $\xi(z)$  in  $z = 0$  stetig sein muß. Durch Potenzreihenentwicklung von  $\xi(z)$  um  $z = 0$  folgt daraus die Bedingung

$$B + 8(6ia_3 - a_1) = 0. \quad (2.24)$$

Die übrigen Konstanten sind ebenfalls durch Randbedingungen festgelegt.

### 3. Das Geschwindigkeitsfeld im Erdkern

Die Funktion  $\eta(r)$  beschreibt die radiale Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Es ist  $\mathbf{v} = 0$  an der Kerngrenze  $r = b$ , da dort die Radialkomponente von  $\mathbf{v}$  und die Radialkomponente von  $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0)$  aus Stetigkeitsgründen verschwinden müssen. Da  $\eta(r)$  nach Voraussetzung ein Polynom 3. Grades in  $r$  ist, hat diese Funktion die Form

$$\eta(r) = p(r-b)^2(r-c) \quad (3.1)$$

mit den noch unbestimmten Konstanten  $p$  und  $c$ .

Die maximale radiale Geschwindigkeit tritt entweder bei  $r = 0$  auf oder dort, wo  $d\eta/dr$  verschwindet. Es ist

$$\frac{d\eta}{dr} = 0 \text{ für } r = \begin{cases} b \\ \frac{2c+b}{3} = \tilde{c}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Die maximale radiale Geschwindigkeit  $v_0$  ist deshalb entweder gegeben durch

$$\eta(0) = -pb^2c, \quad (3.3)$$

oder durch

$$\eta(\tilde{c}) = \frac{4}{27}pb^3\left(1 - \frac{c}{b}\right)^3. \quad (3.4)$$

Untersucht man die Abhängigkeit dieser beiden Funktionen vom Verhältnis  $c/b$  in  $0 \leq c/b \leq 1$ , so zeigt sich, daß  $v_0$  innerhalb dieses Argumentbereichs um eine Zehnerpotenz variieren kann. Um die erzeugende Geschwindigkeit möglichst klein zu halten, wird die Konstante  $c$  so bestimmt, daß  $v_0$  dicht an der unteren Grenze seines möglichen Wertbereichs liegt. Das ist der Fall für

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{8}. \quad (3.5)$$

Dann ist

$$|\eta(0)| > |\eta(\tilde{c})| \quad (3.6)$$

und

$$v_0 = -2\eta(0). \quad (3.7)$$

Damit wird

$$p = \frac{v_0}{2b^2c}. \quad (3.8)$$

Es lassen sich nun die Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  in (2.23) bestimmen:

Aus (2.18) und (2.21) erhält man

$$a_3 = \frac{8\pi\sigma_K F v_0}{3\left(\frac{\tilde{c}}{b} - \frac{1}{3}\right)(\kappa b)^3} \quad (3.9)$$

$$a_2 = -(\tilde{c} + b)\kappa a_3 \quad (3.10)$$

$$a_1 = \tilde{c}b\kappa^2 a_3. \quad (3.11)$$



Wenn  $a_3$  gegeben ist, so sind  $v_0$ ,  $a_2$  und  $a_1$  nach den Gleichungen (3.9, 10, 11) und  $B$  nach (2.24) bekannt. Die beiden noch frei bleibenden Konstanten  $A$  und  $a_3$  werden aus den Übergangsbedingungen für  $h_2$  an der Kerngrenze bestimmt.

Die Gleichung der Feldlinien des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}$  ergibt sich aus der Bedingung

$$d\mathbf{s} \times \mathbf{v} = 0, \quad (3.12)$$

wobei  $d\mathbf{s}$  ein infinitesimaler Tangentenvektor an die Feldlinien ist. Daraus erhält man die Gleichung

$$\sin \theta = \frac{r_0}{r} \frac{r_0 - b}{r - b} \left( \frac{r_0 - c}{r - c} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

Für die Bedingung (3.5) zeigt Abb. 1 den Verlauf einiger Feldlinien in einem Meridianquerschnitt des Erdkerns. Ihre Richtung innerhalb des gestrichelten Halbkreises ist entgegengesetzt zu derjenigen außerhalb dieses Halbkreises.

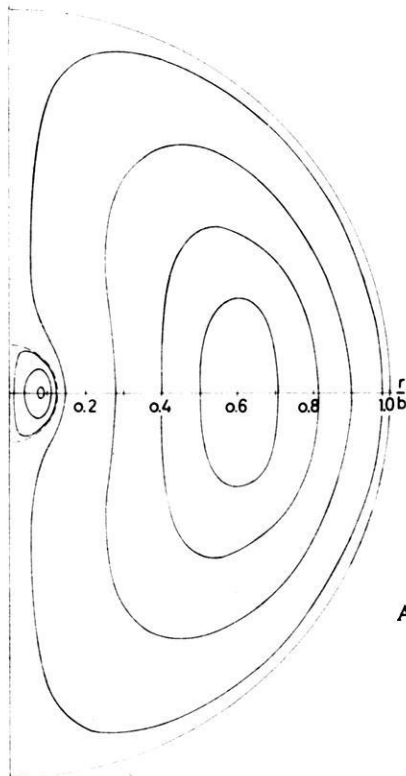
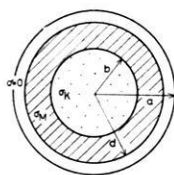


Abb. 1: Feldlinien der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Meridianquerschnitt des Erdkerns.

Field lines of the velocity  $\mathbf{v}$  in a meridional section of the earth's core.

#### 4. Behandlung der Ausgangsgleichung für den Bereich des Erdmantels

Der Erdmantel wird als starrer, kugelschalenförmig aufgebauter Körper betrachtet. Er bestehe aus einer inneren Schale zwischen den Grenzen  $r = b$  und  $r = d$  und einer äußeren Schale zwischen den Grenzen  $r = d$  und  $r = a$ . Der untere Erdmantel besitze eine konstante elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_M$ , während der obere Erdmantel ein elektrischer Isolator sei. Der Einfluß der teilweise gutleitenden oberen Kruste und der Ozeane wird vernachlässigt. Abb. 2 zeigt das bei den Rechnungen benutzte Leitfähigkeitsmodell.



- $a = 6370$  km Erdradius
- $d = 5470$  km äußere Grenze des unteren Mantels
- $b = 3470$  km Kerngrenze
- $\sigma_K$  = elektrische Leitfähigkeit im Kern
- $\sigma_M$  = elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel

Abb. 2: Theoretisches Leitfähigkeitsmodell der Erde.

Theoretical model for the distribution of the electrical conductivity in the earth.

Das Feld  $h_2$  erfüllt im unteren Erdmantel die Diffusionsgleichung

$$4\pi\sigma_M \frac{\partial h_2}{\partial t} - \Delta h_2 = 0. \quad (4.1)$$

Mit dem Ansatz

$$h_2 = e^{i\omega t} \cdot \begin{cases} 6\zeta(r) r P_2(\cos\theta) \\ \left( r \frac{d\zeta}{dr} + 3\zeta(r) \right) r \frac{dP_2}{d\theta} \\ 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

und der Transformation (2.18), in der  $x$  durch

$$\tilde{x} = \sqrt{4\pi\sigma_M\omega} \quad (4.3)$$

ersetzt wird, erhält man für  $\zeta(z)$  die Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2\zeta}{dz^2} + 6z \frac{d\zeta}{dz} + z^2\zeta(z) = 0. \quad (4.4)$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$\zeta(z) = e^{\pi i/4} z^{-2} (A' j_2(z) - B' y_2(z)). \quad (4.5)$$

Darin sind  $A'$  und  $B'$  freie Konstante. Es gilt

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{i\pi/4} z^{-2} \{ -5 z^{-1} (A' j_2(z) - B' y_2(z)) + A' j_1(z) - B' y_1(z) \}. \quad (4.6)$$

Im nichtleitenden oberen Mantel ist  $h_2$  das Feld eines zonalen Quadrupols

$$h_2 = -\text{grad } V_2, \quad (4.7)$$

wobei  $V_2$  durch (1.1) bis (1.5) definiert ist.

Daher gilt in  $d \leq r \leq a$

$$h_2 = e^{i\omega t} \cdot \begin{cases} 3 g_2^0 \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_2(\cos \theta) \\ -g_2^0 \left(\frac{a}{r}\right)^4 \frac{dP_2}{d\theta} \\ 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Wegen der Stetigkeit von  $h_2$  bei  $r = d$  ist

$$\zeta(d) = \frac{1}{2} g_2^0 a^4 d^{-5} \quad (4.9)$$

und

$$\left( r \frac{d\zeta}{dr} + 5 \zeta(r) \right)_{r=d} = 0. \quad (4.10)$$

Es sei

$$z = z_2 \quad \text{für} \quad r = d. \quad (4.11)$$

Dann ergibt sich aus (4.10) unter Benutzung von (4.5) und (4.6) die Bedingung

$$\frac{A'}{B'} = \frac{y_1(z_2)}{j_1(z_2)}. \quad (4.12)$$

Durch Vergleich von (4.9) und (4.5) erhält man mit (4.12) und einer Rekursionsformel für Besselfunktionen die Beziehung

$$A' = -\frac{i}{2} g_2^0 a^4 \tilde{\kappa}^5 z_2^{-1} y_1(z_2). \quad (4.13)$$

Die beiden Gleichungen (4.12) und (4.13) sind die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten  $A'$  und  $B'$ .

Bei der Diffusion des Feldes  $h_2$  durch den elektrisch leitenden unteren Erdmantel tritt eine Dämpfung auf. Ein Maß für ihre Größe ist das Verhältnis der Radialkomponenten von  $h_2$  an den Grenzen  $r = b$  und  $r = d$ . Wäre der untere Erdmantel ein Isolator, so wäre dieses Verhältnis gegeben durch den Ausdruck  $(b/d)^4$ . Diese normale Abhängigkeit des Quadrupolfeldes von der Entfernung wird im Dämpfungsverhältnis berücksichtigt, indem man das Verhältnis der Radialkomponenten bei  $r = d$  und  $r = b$  mit dem Faktor  $(d/b)^4$  multipliziert.

Es sei

$$z = z_1 \quad \text{für} \quad r = b. \quad (4.14)$$

Dann ist das Dämpfungsverhältnis  $D$  gegeben durch

$$D = \frac{\zeta(z_2)}{\zeta(z_1)} \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^5. \quad (4.15)$$

Setzt man

$$D = |D| e^{-i\varphi}, \quad (4.16)$$

so ergeben sich bei Benutzung der Angaben in Abb. 2 für  $|D|$  die in Abb. 3 und für die Phase  $\varphi$  die in Abb. 4 dargestellten Werte in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit  $\sigma_M$  für die Schwingungsdauern  $T = 60$  Jahre und  $T = 100$  Jahre [WILHELM 1968].

Aus dem Dämpfungsverhältnis  $D$  folgt aus (4.15) mit (4.9) und (4.16) für die Radialfunktion  $\zeta(r)$  an der Kerngrenze  $r = b$

$$\zeta(b) = \frac{1}{2} g_2^0 a^4 b^{-5} |D|^{-1} e^{i\varphi}. \quad (4.17)$$

Abb. 5 stellt den Betrag von  $\zeta(b)$  in Abhängigkeit von  $\sigma_M$  für die Schwingungsdauer von 100 Jahren dar. Die Phase von  $\zeta(b)$  gegenüber dem Quadrupolfeld (4.8) an der Erdoberfläche ist  $\varphi$ .

An der Kerngrenze  $r = b$  muß  $h_2$  stetig sein. Mit

$$z_0 = \kappa b e^{3\pi i/4} \quad (4.18)$$

gelten die Übergangsbedingungen

$$\zeta(z_0) = \zeta(z_1), \quad (4.19)$$

$$z \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_0} = z \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_1}. \quad (4.20)$$

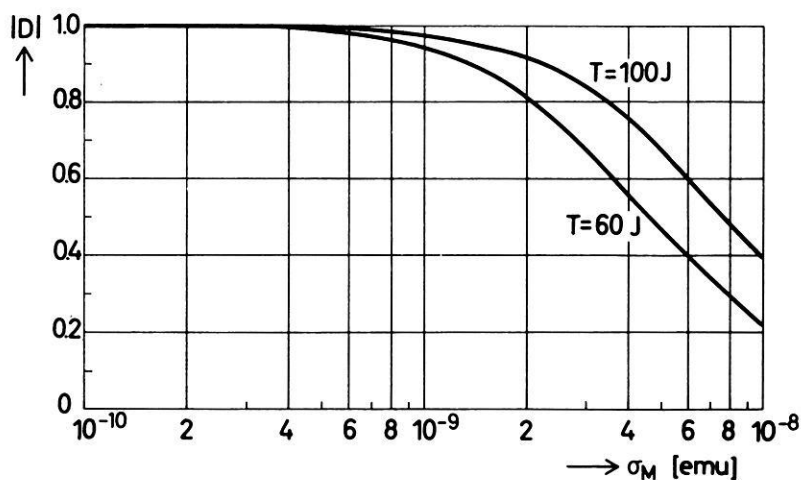


Abb. 3: Betrag des Dämpfungsverhältnisses  $D$  für die Schwingungsdauern  $T = 60$  Jahre und  $T = 100$  Jahre.

Magnitude of the attenuation ratio  $D$  for the periods  $T = 60$  years and  $T = 100$  years.

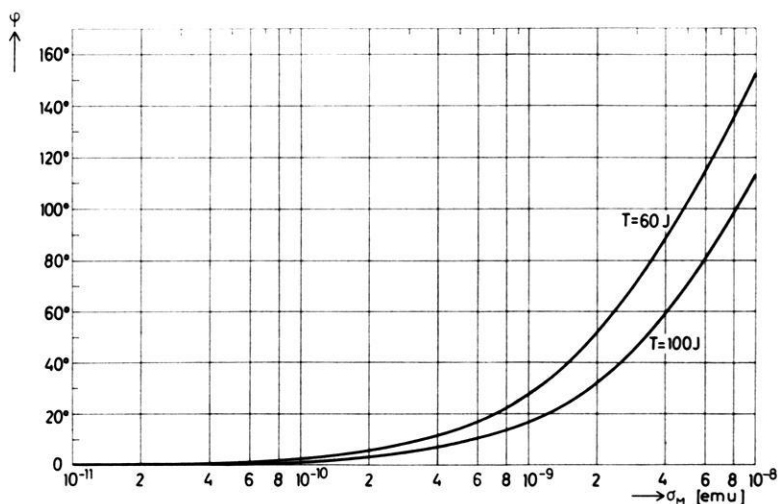


Abb. 4: Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen den Radialkomponenten von  $\mathbf{h}_2$  bei  $r = b$  und  $r = d$ .

Phase difference  $\varphi$  between the radial components of  $\mathbf{h}_2$  at  $r = b$  and  $r = d$ .

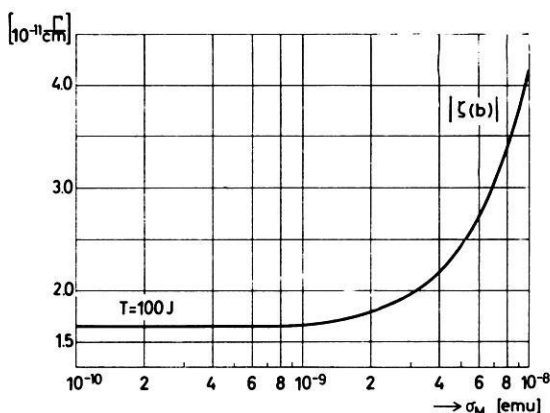


Abb. 5: Betrag der Funktion  $\zeta(b)$  für die Schwingungsdauer  $T = 100$  Jahre.

Magnitude of the function  $\zeta(b)$  for the period  $T = 100$  years.

Statt (4.20) benutzt man besser die aus (4.19) und (4.20) folgende Beziehung

$$z \frac{d\xi}{dz} + 5 \xi(z) \Big|_{z=z_0} = z \frac{d\zeta}{dz} + 5 \zeta(z) \Big|_{z=z_1} \quad (4.21)$$

Aus (4.19) und (4.21) ergeben sich zwei Gleichungen, aus denen die Konstanten  $A$  und  $a_3$  berechnet werden können. Damit ist der Verlauf des Feldes  $h_2$  eindeutig bestimmt.

Man kann nun die durch (3.7) definierte maximale Radialkomponente  $v_0$  der das Feld  $h_2$  erzeugenden Geschwindigkeit  $v$  berechnen, wenn man für  $F$  in (2.14) einen plausiblen Wert einsetzt:

$$F = -2 \Gamma. \quad (4.22)$$

Durch

$$v_0 = |v_0| e^{i\varepsilon} \quad (4.23)$$

werden der Betrag von  $v_0$  und die Phase gegenüber dem Quadrupolfeld (4.8) gegeben, und mit (3.9) erhält man aus der Konstanten  $a_3$  für  $|v_0|$  den in Abb. 6 und für  $\varepsilon$  den in Abb. 7 dargestellten Verlauf in Abhängigkeit von  $\sigma_M$  für die Schwingungsdauern 60, 80 und 100 Jahre.

Wie man durch Vergleich der Abb. 6 und 3 feststellt, wächst beim Übergang zu kleineren Schwingungsdauern die Geschwindigkeit, die zur Erzeugung des vorgegebenen Feldes (4.7) benötigt wird, stärker als die Dämpfung. Daher läßt der Abbruch eines Spektrums erdmagnetischer Variationen bei kurzen Schwingungsdauern

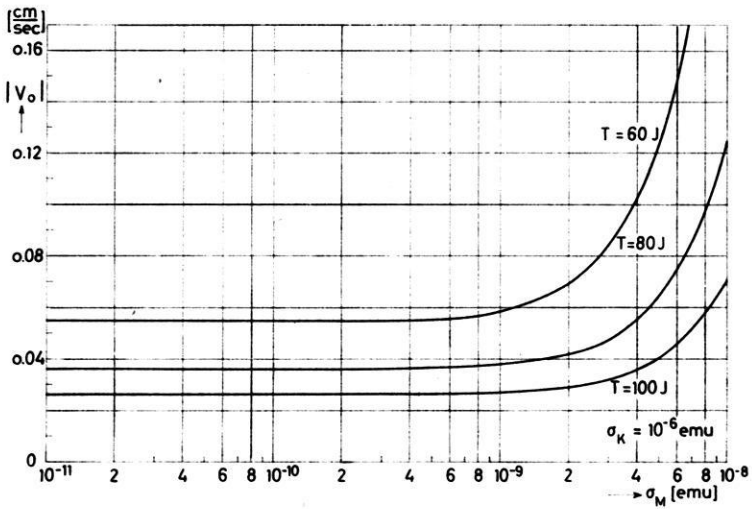


Abb. 6: Betrag der maximalen Radialkomponente  $v_0$  der Geschwindigkeit  $v$  für verschiedene Schwingungsdauern  $T$ .

Magnitude of the maximum value  $v_0$  of the radial component of the velocity  $v$  for several periods  $T$ .

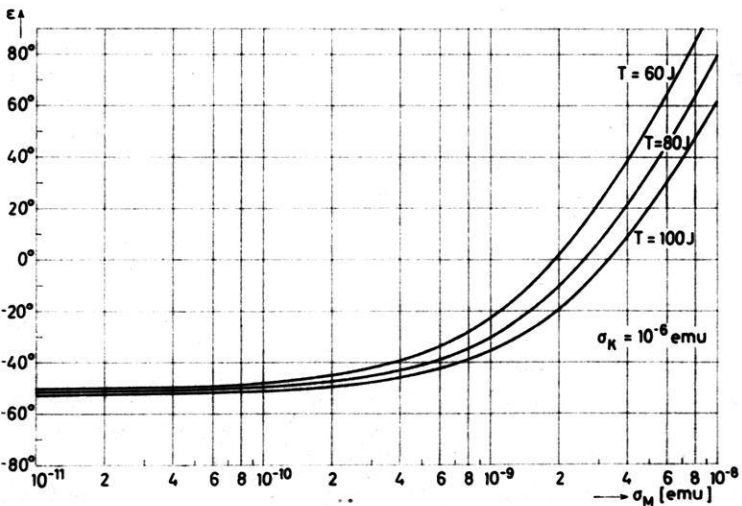


Abb. 7: Phasendifferenz  $\epsilon$  zwischen  $v_0$  und dem Quadrupolfeld  $h_2$  an der Erdoberfläche.

Phase difference  $\epsilon$  between  $v_0$  and the quadrupole field  $h_2$  at the earth's surface.

nicht eindeutig einen Rückschluß auf die elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels zu; denn dieser Abbruch kann auch dadurch bedingt sein, daß die im Erdkern auftretenden Geschwindigkeiten nicht groß genug sind, um an der Erdoberfläche noch meßbare Magnetfelder kürzerer Schwingungsdauer zu erzeugen.

## 5. Drehmomente und Gang der Erde

In jedem Punkt des elektrisch leitenden unteren Erdmantels existiert eine Kraftdichte

$$\mathbf{P} = \mathbf{j} \times \mathbf{H}. \quad (5.1)$$

Auf den Erdmantel wirkt daher ein Drehmoment

$$\mathbf{N} = \int_{V_M} \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV. \quad (5.2)$$

Die Komponente des Drehmomentes bezüglich der als Symmetrieachse angenommenen Rotationsachse ist

$$N_z = \int_{V_M} r \sin \theta (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_\phi dV. \quad (5.3)$$

ROCHESTER [1962] hat gezeigt, daß sich dieses Volumintegral in ein Oberflächenintegral über die Grenzfläche des Erdkerns verwandeln läßt. Unter der Voraussetzung, daß außerhalb des leitenden Mantels die Materie nichtleitend ist und das Magnetfeld dort mindestens wie  $r^{-3}$  mit der Entfernung abnimmt, erhält er für das Drehmoment (5.2)

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{F_K} (\mathbf{r} \times \mathbf{H}) H_r dF. \quad (5.4)$$

Das Drehmoment um die z-Achse wird

$$N_z = -\frac{1}{4\pi} \oint_{F_K} r \sin \theta H_\phi H_r dF. \quad (5.5)$$

Die Felder  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{j}$  setzen sich aus einzelnen Anteilen unterschiedlicher Struktur und Zeitabhängigkeit zusammen. Sie erzeugen eine Summe von verschiedenen zeitlich veränderlichen Drehmomenten, die sich auf die Rotationsgeschwindigkeit des Erdmantels und damit auf die Tageslänge auswirken.

Ersetzt man in (5.5)  $H_r$  durch die Radialkomponente des Feldes (4.2) an der Kerngrenze, also durch

$$h_{2r} = e^{i\omega t} 6 b \zeta(b) P_2(\cos \theta), \quad (5.6)$$



so ergibt sich mit

$$dF = b^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.7)$$

$$N_{zq} = -3 b^4 (2\pi)^{-1} \zeta(b) e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H_\varphi P_2(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (5.8)$$

Wenn in diesem Ausdruck das Integral nicht verschwindet und sich  $H_\varphi$  stationär verhält, wirkt also ein Drehmoment  $N_{zq}$  auf den Mantel, das sich zeitlich wie das Quadrupolfeld mit einer Schwingungsdauer von 100 Jahren ändert. Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Kugelflächenfunktionen kann das Integral in (5.8) nur einen von Null verschiedenen Wert haben, wenn  $H_\varphi$  die  $\varphi$ -Komponente eines toroidalen  $T_1^0$ -Feldes oder  $T_3^0$ -Feldes ist.

Sei  $H_\varphi$  die  $\varphi$ -Komponente eines stationären  $T_1^0$ -Feldes:

$$H_\varphi = f(r) \sin \theta = -f(r) \frac{dP_1}{d\theta}, \quad (5.9)$$

dann ist das resultierende Drehmoment um die z-Achse nach (5.8)

$$N_{zq} = 0,8 b^4 \zeta(b) f(b) e^{i\omega t}. \quad (5.10)$$

Ist  $H_\varphi$  durch ein  $T_3^0$ -Feld gegeben, d. h.

$$H_\varphi = \tilde{f}(r) \frac{dP_3}{d\theta}, \quad (5.11)$$

so gilt

$$N_{zq} = 2,057 b^4 \zeta(b) \tilde{f}(b) e^{i\omega t}. \quad (5.12)$$

Im folgenden wird angenommen, daß es im Erdkern ein stationäres toroidales magnetisches  $T_1^0$ -Feld  $H_1$  gibt. Es hat die Struktur

$$H_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ f(r) \sin \theta \end{cases} \quad (5.13)$$

und soll an der Kerngrenze nach Westen gerichtet sein:

$$f(b) < 0. \quad (5.14)$$

Das in (5.10) berechnete Drehmoment  $N_{zq}$  ruft eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_M$  des Erdmantels hervor. Bei Berücksichtigung der elektromagnetischen Kopplung zwischen Erdkern und Erdmantel ergibt sich mit einer einfachen Modellrechnung der in (A 19) und (A 23) im Anhang dargestellte Zusammenhang zwischen der Rotationsgeschwindigkeit  $\Omega_M$  des Erdmantels und dem wirkenden Drehmoment  $N_M$ . Andererseits besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_M$  und dem Gang  $G$  der Erde nach JUNG [1966] die Beziehung

$$\Omega_M = \omega_0 (q - G). \quad (5.15)$$

Dabei ist  $\omega_0 = 7,292115144 \cdot 10^{-5}$  rad/sec die Rotationsgeschwindigkeit der Erde für 1900, Jan. 0,5, und  $q$  eine Konstante. Durch Vergleich der zeitabhängigen Anteile von (5.15) und (A 23) ergibt sich

$$G = -\frac{N_M \tau}{\omega_0 \Theta_M (1 + i\omega\tau)}. \quad (5.16)$$

$\Theta_M = 7,2 \cdot 10^{44}$  g cm<sup>2</sup> ist das Trägheitsmoment des Erdmantels. Die Beziehung (5.16) ist unabhängig von den Anfangsbedingungen für die Winkelgeschwindigkeit des Mantels und des Kerns. Für die Zeitkonstante  $\tau$  der Kopplung zwischen Erdkern und Erdmantel wird ein Wert von 10 Jahren angenommen, der nach den Arbeiten von ROCHESTER [1960] und RODEN [1963] plausibel erscheint:

$$\tau = 10 \text{ Jahre}. \quad (5.17)$$

Setzt man  $\omega$  nach (1.3) und (1.4) und  $N_M$  nach (5.10) in (5.16) ein, so ergibt sich mit (5.14) und

$$\zeta(b) = |\zeta(b)| e^{i\varphi} \quad (5.18)$$

für die 100jährige Schwingung im Gang der Erde

$$G_0 = \frac{0,8 b^4 |\zeta(b)| |f(b)| \tau}{\omega_0 \Theta_M \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{i(\omega\tau + \varphi - \psi)} \quad (5.19)$$

mit

$$\text{tg } \psi = \omega\tau. \quad (5.20)$$

Aus (5.17) folgt

$$\omega\tau = 0,628. \quad (5.21)$$

Damit ergibt sich

$$\psi = 32,1^\circ. \quad (5.22)$$

Kennt man den zeitlichen Verlauf von  $G_0$ , so kann man  $\varphi$  und damit nach Abb. 4 die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_M$  des unteren Erdmantels bestimmen. Aus  $\sigma_M$  folgt nach Abb. 5 eine Aussage über  $|\zeta(b)|$ , und damit kann aus  $|G_0|$  die Feldstärke  $f(b)$  des toroidalen  $T_1^0$ -Feldes an der Kerngrenze bestimmt werden, dessen Existenz vorausgesetzt worden ist.

## 6. Harmonische Analyse des Ganges der Erde

Die Ausgangsdaten für die Analyse des Ganges der Erde findet man bei BROUWER [1952a] in Tabelle VIIIa in der 11. Spalte unter der Bezeichnung  $d/dt (\Delta t_Q)$ . Es sind ausgeglichene jährliche Werte von 1820.5 bis 1950.5. Um Amplitude und Phase der darin vermuteten 100jährigen Schwingung zu finden, werden die Werte zunächst einer phasentreuen numerischen Filterung unterworfen und dann harmonisch analysiert. Dann wird der Einfluß der Filterung auf die Amplitude nachträglich berücksichtigt. Es ist der Zweck der numerischen Filterung, einen linearen Trend im Gang der Erde zu eliminieren, da dieser das Ergebnis der harmonischen Analyse verfälscht.

Die einfachste Filtermethode zur Eliminierung eines unbekanntes linearen Trends aus einer äquidistanten Zeitreihe ist die Anwendung eines Filters  $\Delta$  mit dem Koeffizientenschema  $(-0,25; 0,5; -0,25)$ . Die Übertragungsfunktion dieses Filters ist  $\sin^2 \pi \nu \Delta t$ , wobei  $\Delta t$  der Punktabstand ist. Es wird außerdem zweimal ein Glättungsfilter  $\Sigma$  angewendet, das einen linearen Gang erhält und das Koeffizientenschema  $(0,25; 0,5; 0,25)$  besitzt. Die Übertragungsfunktion  $U$  des kombinierten Filters  $\Sigma^2 \Delta$  ist  $U(\Delta t) = \cos^4 \pi \nu \Delta t \cdot \sin^2 \pi \nu \Delta t$  und hat ihr Maximum bei einer Periode von 25 Jahren, wenn  $\Delta t = 5$  Jahre gewählt wird. Sie ist in Abb. 8 dargestellt. Wollte man ein Filter anwenden, dessen Maximum bei  $T = 100$  Jahren liegt, so brauchte man eine wesentlich längere Zeitreihe. Das Ergebnis  $\tilde{G}$  der mit  $\Sigma^2 \Delta$  gefilterten Zeitreihe  $G$  zeigt Abb. 9.

Die harmonische Analyse der gefilterten Zeitreihe wurde mit einem Punktabstand  $\Delta t = 1$  Jahr für den Zeitraum 1835.5 bis 1935.5 durchgeführt. In Tab. 1 (s. S. 716) sind die Resultate bis zu einer Periode von 10 Jahren angegeben. Die letzte Spalte enthält die Amplituden der Grundschwingung und der Oberschwingungen in der ursprünglichen Zeitreihe. Sie ergeben sich, wenn man die aus der harmonischen Analyse errechneten Amplituden dividiert durch den Wert der Übertragungsfunktion des Filters  $\Sigma^2 \Delta$  für die entsprechende Frequenz. Für die Schwingungsdauern  $T = 11,1$  Jahre und  $T = 10$  Jahre ist die Inversion nicht mehr stabil.

Das Ergebnis der harmonischen Analyse wird dadurch verfälscht, daß das berechnete Spektrum der gefilterten Zeitreihe diskret und harmonisch ist, während in Wirklichkeit ein kontinuierliches Spektrum auftritt. Der Einfluß der anharmonischen Frequenzen auf die Amplitude und Phase der Grundschwingung läßt sich abschätzen aus den Amplituden, die die harmonische Analyse für die höheren Harmonischen liefert. Betrachtet man als einfachstes statistisches Modell dazu ein weißes Rauschen, das oberhalb einer bestimmten Frequenz abbricht, so kann man das Mittel der Amplituden der

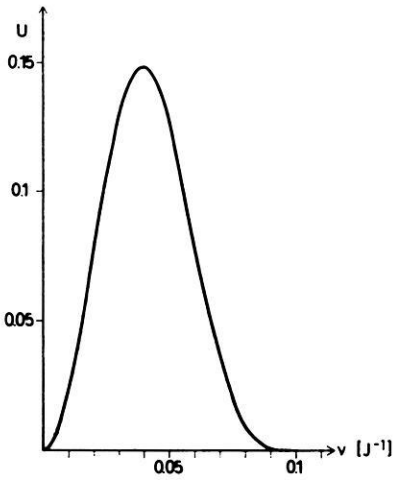


Abb. 8: Übertragungsfunktion des Filters  $\Sigma^2\Delta$  für  $\Delta t = 5$  Jahre.

Response function of the filter  $\Sigma^2\Delta$  for  $\Delta t = 5$  years.

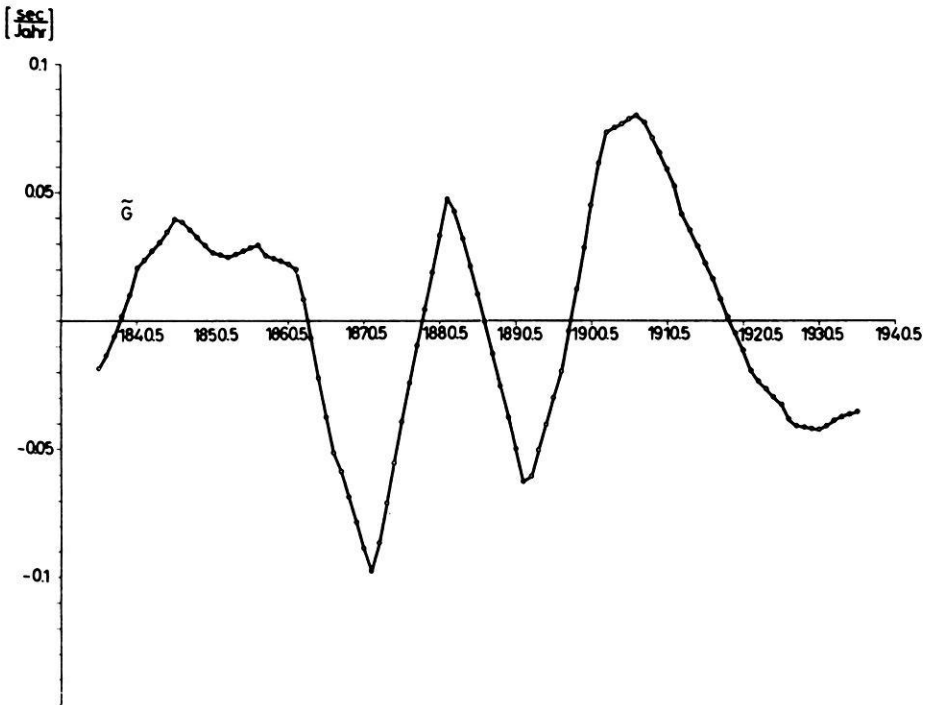


Abb. 9: Das Ergebnis  $\tilde{G}$  der mit  $\Sigma^2\Delta$  gefilterten Zeitreihe  $G$ .

Time series  $\tilde{G}$  resulting from the application of the filter  $\Sigma^2\Delta$  to the time series  $G$ .

Tabelle 1: Ergebnis der harmonischen Analyse von  $G$  für die Schwingungsdauern  $T=100$  Jahre bis  $T=10$  Jahre.

Result of the harmonic analysis of  $G$  for the periods  $T=100$  years to  $T=10$  years.

$T = \frac{1}{\nu}$ [J]	$U$	$ \tilde{G}  \left[ 10^{-2} \frac{\text{sec}}{\text{J}} \right]$	$\alpha$	$ G  \left[ \frac{\text{sec}}{\text{J}} \right]$
100	0,0233	1,47	68,8°	0,63
50	0,0781	3,69	234,1°	0,47
33,3	0,1299	2,77	243,4°	0,21
25	0,1480	2,53	48,4°	0,17
20	0,1250	2,31	240,5°	0,18
16,6	0,0781	0,582	96,2°	0,07
14,3	0,0343	0,0354	233,5°	0,01
12,5	0,0083	0,0710	231,8°	0,09
11,1	0,0006	0,0292	-75,6°	0,50
10	0	0,0377	-73,5°	$\infty$

höheren Harmonischen als ein Maß für die konstante spektrale Intensität dieses Rauschens ansehen und daraus einen Fehler der Amplitude und der Phase der Grundschwingung berechnen.

Bei der Mittelung bleibt die erste Oberschwingung unberücksichtigt, da sie neben der 100jährigen Periode besonders hervortritt und eine entsprechende Schwingung von BARTA [1962] auch in der Säkularvariation gefunden worden ist. Man kann vermuten, daß hier ebenfalls ein Zusammenhang über Lorentzkräfte und die elektromagnetische Kopplung von Mantel und Kern besteht.

Aus den Oberschwingungen ergibt sich ein Fehler der Amplitude von

$$\Delta G_0 = 0,10 \text{ sec/Jahr} . \quad (6.1)$$

Dem entspricht ein Fehler in der Phase von

$$\Delta \psi = 9,1^\circ . \quad (6.2)$$

Bezüglich der Zeit  $t$ , die bei der Darstellung der Schwingung des zonalen Quadrupolfeldes verwendet wird, hat  $G_0$  nach (1.5) und Tab. 1 die Form

$$G_0(t) = 0,63 \cos(\omega t + 32,8^\circ) \text{ sec/Jahr} . \quad (6.3)$$

Daraus ergibt sich durch Vergleich mit der Phase von (5.19)

$$\varphi = 64,9^\circ . \quad (6.4)$$

Tabelle 2: Ergebnisse des Vergleichs der theoretisch berechneten und der empirisch bestimmten Werte von  $G_0$ .Results obtained by comparing the theoretically calculated and the analysed values of  $G_0$ .

$ G_0  \left[ \frac{\text{sec}}{\text{J}} \right]$	$\varphi$	$\sigma_M$ [emu]	$ \zeta(b)  \left[ \frac{\Gamma}{\text{cm}} \right]$	$ f(b) $ [ $\Gamma$ ]
0,53	55,8°	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-11}$	13,6
0,63	64,9°	$4,5 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	14,7
0,73	74,0°	$5,3 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-11}$	15,7

Aus den durch die harmonische Analyse gefundenen Werten von  $|G_0|$  und von  $\varphi$  lassen sich nun die Leitfähigkeit  $\sigma_M$  nach Abb. 5, der Betrag der Radialfunktion  $\zeta(r)$  des Quadrupolfeldes an der Kerngrenze  $r = b$  nach Abb. 4 und die Feldstärke  $f(b)$  des toroidalen  $T_1^0$ -Feldes an der Kerngrenze aus (5.19) bestimmen. Innerhalb der Fehlergrenzen von  $|G_0|$  und von  $\varphi$  erhält man die in Tab. 2 zusammengefaßten Werte.

Es wird i. a. angenommen, daß die elektrische Leitfähigkeit im unteren Erdmantel  $10^{-9}$  bis  $2 \cdot 10^{-9}$  emu beträgt [RODEN 1963, SMYLLIE 1965, CURRIE 1967, 1968, PRICE 1970]. Die hier sich ergebenden Leitfähigkeiten sind größer, sie liegen aber durchaus im Bereich möglicher Abweichungen von den Standardwerten. So braucht ROCHESTER [1960] eine Leitfähigkeit  $\sigma_M = 2,5 \cdot 10^{-9}$  emu, um eine Kopplungskonstante  $\tau = 10$  Jahre zu erhalten; und ECKHARDT, LARNER und MADDEN [1963] haben ein modifiziertes McDONALDSches Leitfähigkeitsprofil mit  $\sigma_M = 5 \cdot 10^{-9}$  emu angegeben, das mit ihren Ergebnissen aus der Untersuchung langperiodischer magnetischer Fluktuationen noch in Übereinstimmung gebracht werden kann. CURRIE [1968] findet  $\sigma_M = 2 \cdot 10^{-9}$  emu mit einer möglichen Abweichung um den Faktor 2.

Die Feldstärke des toroidalen  $T_1^0$ -Feldes, dessen Existenz vorausgesetzt wurde, um die Wirkung der Änderung des zonalen Quadrupolfeldes auf die Erdrotation zu erklären, beträgt an der Kerngrenze nach Tab. 2 etwa das 3- bis 4fache der Feldstärke des Dipolfeldes. Inwieweit diese Aussage den Realitäten entspricht, kann nur aus einer Dynamtheorie geschlossen werden.

## 7. Diskussion der Ergebnisse

Die in Tab. 2 zusammengefaßten Ergebnisse sind noch mit einem Fehler behaftet, der durch die Ungenauigkeit entsteht, mit der die in der Einleitung beschriebene Schwingung des Quadrupolfeldes bekannt ist. Wegen der Kürze der Zeitreihe ist ein Fehler von 50% in der Amplitude dieser Schwingung nicht ausgeschlossen, und ebenso ist die Phase nicht genau bestimmbar. Daher können die in Tab. 2 angegebenen Leitfähigkeiten und Feldstärken des toroidalen  $T_1^0$ -Feldes nur Anhaltspunkte für den ungefähren Wert dieser Größen geben. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache stehen die hier gefundenen Werte für die Leitfähigkeit nach Tab. 2 nicht im Widerspruch zu den

von SMYLYE [1965] und CURRIE [1968] berechneten Werten. Wenn man außerdem bedenkt, welche einschränkenden Voraussetzungen bei der modellmäßigen Behandlung dieser Vorgänge gemacht worden sind, so kann das Ergebnis durchaus als Hinweis dafür angesehen werden, daß der in dieser Arbeit dargestellte Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung des betrachteten Anteils des Quadrupolfeldes und der entsprechenden Änderung der Erdrotation tatsächlich existiert.

Herrn Prof. SIEBERT danke ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit, die im wesentlichen auf einer am Institut für Geophysik der Universität Göttingen angefertigten Dissertation beruht.

## Anhang

### Modellmäßige Behandlung der elektromagnetischen Kopplung zwischen Erdkern und Erdmantel

Erdkern und Erdmantel seien eine starre Kugel bzw. Kugelschale, die um eine gemeinsame Achse rotieren können. Zwischen Kern und Mantel bestehe eine Kopplung derart, daß das rücktreibende Drehmoment proportional zur Differenz der Winkelgeschwindigkeiten ist, wie es bei der elektromagnetischen Kopplung der Fall ist. Ein auf den Mantel wirkendes Drehmoment wird kompensiert durch ein entgegengesetzt gleich großes Drehmoment, das auf den Kern wirkt, da die Summe der auf die gesamte Erde wirkenden Drehmomente verschwindet.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$N_M = \Theta_M \frac{d\Omega_M}{dt} + R(\Omega_M - \Omega_K) \quad (\text{A1})$$

$$N_K = -N_M = \Theta_K \frac{d\Omega_K}{dt} + R(\Omega_K - \Omega_M). \quad (\text{A2})$$

Die Indizes  $K$  und  $M$  beziehen sich auf den Kern bzw. auf den Mantel.  $R$  ist eine Konstante, die die Stärke der Kopplung, also des rücktreibenden Drehmomentes bestimmt. Durch Addition der beiden Gleichungen (A 1) und (A 2) erhält man

$$0 = \Theta_M \frac{d\Omega_M}{dt} + \Theta_K \frac{d\Omega_K}{dt}. \quad (\text{A3})$$

Daher ist ein Integral der Bewegungsgleichungen

$$\Theta_M \Omega_M + \Theta_K \Omega_K = C = \text{const.} \quad (\text{A4})$$

Zur Zeit

$$t=0 \text{ sei } \Omega_M = \Omega_K = \Omega_0. \quad (\text{A5})$$



Daraus folgt

$$C = \Omega_0 (\Theta_M + \Theta_K), \quad (\text{A6})$$

$$\Omega_K = \Omega_0 + \frac{\Theta_M}{\Theta_K} (\Omega_0 - \Omega_M) \quad (\text{A7})$$

und

$$N_M = \Theta_M \left\{ \frac{d\Omega_M}{dt} + R (\Theta_M^{-1} + \Theta_K^{-1}) (\Omega_M - \Omega_0) \right\}. \quad (\text{A8})$$

Es werden nun Spezialfälle von Drehmomenten betrachtet:

1. Zur Zeit  $t < 0$  sei  $N_M = 0$ , und für  $t \geq 0$  wirke das konstante Drehmoment  $N$ :

$$N_M = N. \quad (\text{A9})$$

Setzt man

$$\tau = [R (\Theta_M^{-1} + \Theta_K^{-1})]^{-1}, \quad (\text{A10})$$

so ergibt sich als Lösung

$$\Omega_M - \Omega_0 = \frac{N\tau}{\Theta_M} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (\text{A11})$$

und

$$\Omega_K - \Omega_0 = -\frac{N\tau}{\Theta_K} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (\text{A12})$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Mantels  $\Omega_M$  nähert sich asymptotisch dem Wert  $\Omega_M + N\tau/\Theta_M$ , während  $\Omega_K$  in gleicher Weise dem Wert  $\Omega_0 - N\tau/\Theta_K$  zustrebt. Der Mantel rotiert unter der Wirkung des konstanten Drehmomentes  $N > 0$  und des durch die elektromagnetische Kopplung bedingten rücktreibenden Drehmomentes für  $t \gg \tau$  um den Betrag  $\Omega_M - \Omega_K = N\tau (\Theta_M^{-1} + \Theta_K^{-1}) = N/R$  schneller als der Erdkern. Die Konstante  $\tau$  gibt an, nach welcher Zeit sich die Winkelgeschwindigkeit des Mantels dem neuen Grenzwert  $\Omega_0 + N\tau/\Theta_M$  bis auf  $e^{-1}$  genähert hat.

Daraus läßt sich eine einfache Interpretation der Westdrift des erdmagnetischen Feldes finden: Das erdmagnetische Dipolfeld übt ein Drehmoment auf den Erdmantel aus, wenn ein beim Dynamoprozeß auftretendes  $T_2^0$ -Feld an der Kerngrenze nicht verschwindet, sondern in den elektrisch leitenden Mantel hinausgreift. Das Dipolfeld im Mantel ist gegeben durch

$$H_{DP} = g_1^0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \begin{cases} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0, \end{cases} \quad (\text{A13})$$

während für das  $T_2^0$ -Feld gilt

$$H_{T20} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{T_2(r) dP_2}{r d\theta} \end{cases} \quad (\text{A14})$$

Für das auf den Erdmantel wirkende Drehmoment folgt aus (5.5), wenn man für  $H_r$  die  $r$ -Komponente von  $H_{DP}$  und für  $H_\varphi$  die  $\varphi$ -Komponenten des  $T_2^0$ -Feldes einsetzt

$$N_z = -3 T_2(b) b^{-1} g_1^0 a^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta. \quad (\text{A15})$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$N_z = -\frac{8}{15} M a^3 g_1^0 \quad (\text{A16})$$

mit

$$M = \frac{3 T_2(b)}{2 b}. \quad (\text{A17})$$

ROCHESTER hat  $M$  abgeschätzt zu  $M \approx 0,1 \Gamma$ . Setzt man  $g_1^0 = -0,305 \Gamma$  und  $a = 6,37 \cdot 10^8$  cm ein, so ergibt sich

$$N_z = 4,21 \cdot 10^{24} \text{ dyn cm}. \quad (\text{A18})$$

Durch die Wirkung des Drehmomentes  $N_z$  rotiert der Erdmantel schneller als der Erdkern, so daß eine Westdrift des aus dem Kern stammenden Magnetfeldes resultiert. Aus der Größe der Drift kann man Rückschlüsse auf  $\tau$  ziehen [ROCHESTER 1960, RODEN 1963].

2. Es wirke ein sich periodisch änderndes Drehmoment

$$N_M = N e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{A19})$$

auf den Erdmantel. Dann ergibt sich die Lösung

$$\Omega_M - \Omega_0 = \frac{N\tau}{\Theta_M} \left( \frac{e^{i(\omega t + \varphi)}}{1 + i\omega\tau} - e^{-t/\tau} \right) \quad (\text{A20})$$

oder

$$\Omega_M - \Omega_0 = \frac{N\tau}{\Theta_M} \left( \frac{e^{i(\omega t + \varphi - \psi)}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} - e^{-t/\tau} \right) \quad (\text{A21})$$

mit

$$\text{tg } \psi = \omega\tau. \quad (\text{A22})$$

Für  $t \gg \tau$  rotiert der Mantel mit der Geschwindigkeit

$$\Omega_M = \Omega_0 + \frac{N\tau e^{i(\omega t + \varphi)}}{\Theta_M 1 + i\omega\tau} \quad (\text{A23})$$

und der Kern mit der Geschwindigkeit

$$\Omega_K = \Omega_0 - \frac{N\tau e^{i(\omega t + \varphi)}}{\Theta_K 1 + i\omega\tau}. \quad (\text{A24})$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_M$  besitzt eine konstante Phasenverschiebung  $\psi$  gegen das wirkende Drehmoment  $N_M$ . Der Fall 1 ergibt sich als Grenzfall für  $\omega = 0$ . Aus (A 23) folgt, daß auch bei verschwindender Kopplung von Mantel und Kern ( $\tau \rightarrow \infty$ ) durch variierende Lorentzkräfte Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit des Erdmantels erzeugt werden können.

### Literatur

- BARTA, G.: Der Zusammenhang der Exzentrizität des erdmagnetischen Feldes mit der Dreiaxigkeit der Erde. Abhandl. Geom. Inst. Potsdam 29, 12–21, 1962
- BROUWER, D.: A study of the changes in the rate of rotation of the earth. *Astron. J.* 57, 125–146, 1952a
- : A new discussion of the changes in the earth's rate of rotation. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 38, 1–12, 1952b
- CURRIE, R. G.: Magnetic shielding properties of the earth's mantle. *J. Geophys. Res.* 72, 2623–2633, 1967
- : Geomagnetic spectrum of internal origin and lower mantle conductivity. *J. Geophys. Res.* 73, 2779–2786, 1968
- ECKHARDT, D. H., K. LARNER, und T. MADDEN: Long period magnetic fluctuations and mantle conductivity estimates. *J. Geophys. Res.* 68, 6279–6285, 1963
- JONES, H. S.: The rotation of the earth, and the secular accelerations of the sun, moon and planets. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 99, 541–558, 1939

- JUNG, K.: Zur Änderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. *Z. Vermessungswesen* 91, 349—358, 1966
- MUNK, W. H., und G. J. F. McDONALD: *The rotation of the earth*. Cambridge, University Press, 1960.
- NAGATA, T., und T. RIKITAKE: The northward shifting of the geomagnetic dipole and stability of the axial magnetic quadrupole of the earth. *J. Geomagn. Geoelectr.* 14, 213—220, 1963
- PRICE, A. T.: The electrical conductivity of the earth. *Quart. J. Roy. Astron. Soc.* 11, 23—42, 1970
- RIKITAKE, T.: *Electromagnetism and the Earth's Interior*. Development in Solid Earth Physics, 2, Am. Elsevier Publ. Comp., Amsterdam, 1966
- ROCHESTER, G. M.: Geomagnetic westward drift and irregularities in the earth's rotation. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 252, 531—555, 1960
- : Geomagnetic core-mantle coupling. *J. Geophys. Res.* 67, 4833—4836, 1962
- RODEN, B. R.: Electromagnetic core-mantle coupling. *Geophys. J.* 7, 361—374, 1963
- SMYLIE, D. E.: Magnetic diffusion in a spherically symmetric conducting mantle. *Geophys. J.* 9, 169—184, 1965
- VESTINE, E. H.: On variations of the geomagnetic field, fluid motions, and the rate of the earth's rotation. *J. Geophys. Res.* 58, 127—145, 1953
- WILHELM, H.: *Zeitliche Änderungen des erdmagnetischen Quadrupolfeldes und daraus folgende mögliche Einflüsse auf die Erdrotation*. Dissertation D7, Göttingen, 1968
- : Das zeitliche Verhalten des erdmagnetischen Quadrupolfeldes von 1835—1965. *Z. Geophys.* 35, 517—527, 1969

